Analyse

Suites et séries

§ 1. Suites

Une **suite** est une succession de nombres ayant ou non un lien entre eux. Un élément d'une suite est appelé un **terme**.

§ 2. Compléter des suites

Lorsqu'on a une suite de quelques nombres, on doit parfois déterminer ce que valent les nombres suivants de la suite. Pour cela, il faut trouver le lien qui permet de passer d'un nombre de la suite au suivant, puis de perpétuer ce lien pour trouver les nombres suivants:

Exemples 1:

On a le début d'une suite: 1, 4, 7, 10, 13, et on veut savoir ce que valent les nombres suivants.

On remarque que 1 + 3 = 4, 4 + 3 = 7, 10 + 3 = 13, etc. Ainsi, on additionne à chaque fois 3.

Les nombres suivants de la suite seront donc: 16, 19, 22, 25, etc.

Une telle suite est appelée une **suite arithmétique**.

Exemple 2:

On a le début d'une suite: 1; 2; 4; 8; 16, et on veut savoir ce que valent les nombres suivants.

On remarque que 1 x 2 = 2, 2 x 2 = 4; 4 x 2 = 8, etc. Ainsi, on multiplie à chaque fois par 2.

Les nombres suivants de la suite seront donc: 32, 64, 128, etc.

Une telle suite est appelée une **suite géométrique**.

Exemple 3:

On a le début d'une suite: 1, 4, 9, 16, 25, et on veut savoir ce que valent les nombres suivants.

On remarque que $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^4$, etc. Ainsi, la suite représente la succession des carrés des nombres entiers naturels.

Les nombres suivants de la suite seront donc: 36, 49, 64, 81, etc.

§ 3. Suites arithmétiques

Une **suite** est dite **arithmétique** lorsqu'on passe de chaque terme au suivant en **ajoutant** toujours le même nombre.

Ainsi, la suite 3, 7, 11, 15, 19, ... est une suite arithmétique car on ajoute toujours 4 à un terme pour obtenir le suivant.

La suite 12, 9, 6, 3, 0, -3, -6, -9, ... est aussi une suite arithmétique car on ajoute toujours (-3) à un terme pour obtenir le suivant.

Dans la première suite ci-dessus, on peut écrire:

1er terme:	3
2e terme:	$7 = 3 + 4 = 3 + 1 \cdot 4$
3e terme:	$11 = 3 + 8 = 3 + 2 \cdot 4$
4e terme:	$15 = 3 + 12 = 3 + 3 \cdot 4$
5e terme:	$19 = 3 + 16 = 3 + 4 \cdot 4$
etc.	

Ainsi, le n-ième terme (le terme de rang n) sera obtenu en additionnant le premier nombre de la suite et (n-1) fois le nombre que l'on additionne à chaque fois:

$$\text{n-ième terme:} \qquad 3 + (n-1) \cdot 4$$

Par exemple, le 14e terme sera: $3 + (14-1) \cdot 4 = 13 + 13 \cdot 4 = 13 + 52 = 65$.

§ 4. Suites géométriques

Une **suite** est dite **géométrique** lorsqu'on passe de chaque terme au suivant en **multipliant** toujours par le même nombre.

Ainsi, la suite 3, 6, 12, 24, 48, ... est une suite géométrique car on multiplie toujours par 2 un terme pour obtenir le suivant.

La suite 16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... est aussi une suite géométrique car on multiplie toujours par $\frac{1}{2}$ un terme pour obtenir le suivant.

Dans la première suite ci-dessus, on peut écrire:

1er terme:	3
2e terme:	$6 = 3 \cdot 2$
3e terme:	$12 = 3 \cdot 2^2$
4e terme:	$24 = 3 \cdot 2^3$
5e terme:	$48 = 3 \cdot 2^4$
etc.	

Ainsi, le n-ième terme sera obtenu en multipliant le premier nombre de la suite par (n-1) fois le nombre avec lequel on multiplie à chaque fois:

n-ième terme: $3 \cdot 2^{n-1}$

Par exemple, le 14e terme sera: $3 \cdot 2^{14-1} = 3 \cdot 2^{13} = 3 \cdot 8192 = 24'576$.

§ 5. Séries

Une **série** est l'addition des premiers éléments d'une suite. Par exemple, dans la suite des nombres entiers naturels, une série est 1 + 2 + 3 + 4 + 5.

Une série peut être l'addition d'un nombre fini des éléments d'une suite, ou alors l'addition de tous les éléments d'une suite infinie.

§ 6. Calculer des séries

Connaître des résultats de séries n'est pas toujours facile.

Certains exemples peuvent cependant être utiles. Les voici:

Exemple 1:

On a: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$ et

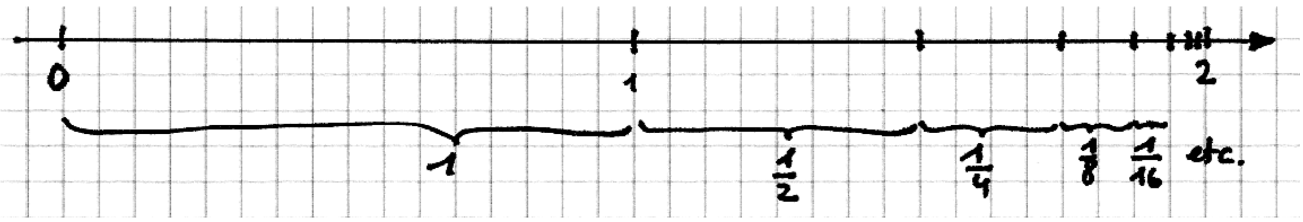
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120.$$

Ainsi, si on veut additionner la suite des premiers nombres entiers naturels, il suffit de multiplier le plus grand d'entre eux avec le suivant, puis de diviser le résultat par deux, et on a le résultat de la série.

Exemple 2:

On a: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=2$ (somme d'un nombre infini de termes qui donne un résultat fini).

On peut prouver ce résultat en dessinant un axe et en y reportant ces nombres successivement:



En fait, on ajoute toujours la moitié de ce qu'il reste entre la somme obtenue jusque-là et 2.