Analyse

9.1 Quelques théorèmes

9.1.1 Théorème de la valeur intermédiaire

> Une fonction continue sur un intervalle fermé $[a;b]$, admet sur cet intervalle un maximum absolu, un minimum absolu et prend toutes les valeurs entre ces extremums.
> Les maximums et minimums absolus d'une fonction continue f considérée sur un intervalle $[a;b]$ sont atteints soit aux bords de l'intervalle, soit aux points critiques.

► **Remarque :** Ce résultat se trouve dans le formulaire et tables, page 73.

9.1.2 Théorème de Rolle

> Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$, dérivable sur l'intervalle $]a;b[$ et si $f(a) = f(b) = 0$, alors il existe au moins un nombre $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve :

a. Si la fonction est nulle sur tout l'intervalle, alors tout point est à tangente horizontale.

b. Sinon... La fonction étant dérivable sur l'intervalle, ses extrema sont les bords de l'intervalle ou des points à tangente horizontale. Par le théorème de la valeur intermédiaire la fonction possède un maximum absolu M et un minimum absolu m dans l'intervalle. M et m ne sont pas nuls les deux car la fonction n'est pas nulle sur tout l'intervalle. Ainsi un des extrema n'est pas atteint aux bords de l'intervalle. C'est donc un point à tangente horizontale.

□

Interprétation géométrique

Autrement dit, entre deux zéros d'une fonction continue et dérivable, le graphe possède au moins un point à tangente horizontale.

Corollaire

> Si f satisfait aux conditions du théorème de Rolle, mais que $f(a) = f(b) \neq 0$, alors il existe au moins un nombre $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$

Preuve :

Soit $g(x) = f(x) - f(a)$, la fonction g satisfait aux conditions du théorème de Rolle car $g(a) = f(a) - f(a) = 0$ et $g(b) = f(b) - f(a) = 0$ comme $f(a) = f(b)$. Et g est continue et dérivable car f l'est. Ainsi il existe au moins un nombre $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$. C'est-à-dire que $g'(x) = (f(x) - f(a))' = f'(x)$ s'annule en $x = c$. Ainsi $f'(c) = 0$.

□

Interprétation géométrique

Autrement dit, entre deux points de même ordonnée d'une fonction continue et dérivable, il existe au moins un point à tangente horizontale.

9.1.3 Théorème des accroissements finis

> Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ est une fonction continue sur l'intervalle $]a;b[$, alors il existe au moins un nombre $c \in]a;b[$ tel que
>
> $$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Preuve :

Soit la fonction

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-b)$$

Comme f, elle est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. De plus $g(a) = g(b)$:

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(a-b) = f(b)$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(b-b) = f(b)$$

Par le corollaire du théorème de Rolle, il existe donc $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$.
C'est-à-dire que

$$g'(x) = \left(f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-b)\right)' = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

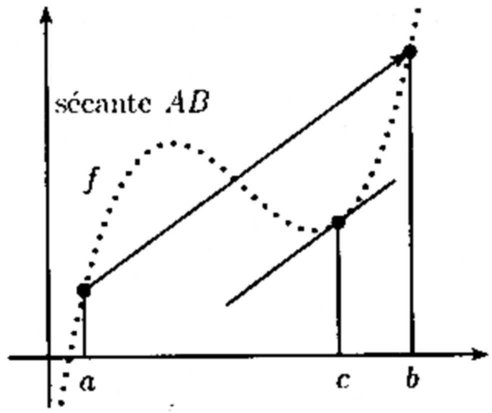
s'annule en $x = c$. Ainsi

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

□

Interprétation géométrique

Autrement dit, entre les points A et B, il existe au moins un point du graphe en lequel la tangente est parallèle à la sécante AB.



Autre version

En écrivant $h = b - a$, on obtient

$$f'(c) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \Rightarrow \quad f(a+h) = f(a) + h\cdot f'(c),\ c \in [a;a+h]$$

Finalement avec $a = x_0$ et $h = \Delta x$, nous obtenons

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \Delta x \cdot f'(c),\ c \in [x_0;x_0+\Delta x]$$

► **Remarque :** Ce résultat se trouve dans le formulaire et tables, page 75.

9.2 Notion de différentielle

Soit la fonction $y = f(x)$, continue et dérivable, on définit (notation de Leibniz)

dx, appelé **différentielle de** x, selon la relation $dx = \Delta x$.
dy, appelé **différentielle de** y, selon la relation $dy = f'(x)dx$.

On écrit alors

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = y'$$

Si $dx = \Delta x$ est relativement petit par rapport à x, dy est une approximation convenable Δy.

► **Exemples :**

a. $y = f(x) = x^2$, $dy = 2x\,dx$. $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2$

b. $y = f(x) = \sqrt{x}$, $dy = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$. $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$

Que vaut $f(101) = \sqrt{101}$? Soit $x = 100$ et $\Delta x = 1$. La valeur exacte de la variation Δy est :

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt{101} - \sqrt{100} \cong 0,0499$$

Alors $dy = f'(x) \cdot dx = \dfrac{1}{2\sqrt{100}} \cdot 1 = \dfrac{1}{20} = 0.05$ est une bonne approximation de Δy.

► **Remarque :** Ce résultat se trouve dans le formulaire et tables, page 74.

9.3 Règle de l'Hospital

Si f and g deux fonctions telles que (avec $a \in \mathbb{R}$)

a. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

b. Les fonctions f and g sont dérivables au voisinage de a (elles sont donc aussi continues)

c. The limit $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe

alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Cette règle est aussi valable si $a = \pm\infty$, ou si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

► **Exemple :**

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} = \dfrac{f(x)}{g(x)} =$ « $\dfrac{0}{0}$ ». Comme $f'(x)$ and $g'(x)$ sont dérivables au voisinage de $a = 0$, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \cdot \dfrac{1}{x^2+1}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x^2+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Avant de démontrer la règle de l'Hospital étudions la fonction

$$h(x) = [g(b) - g(a)] \cdot f(x) - [f(b) - f(a)] \cdot g(x)$$

On a alors

$$h(a) = [g(b) - g(a)] \cdot f(a) - [f(b) - f(a)] \cdot g(a) = g(b)f(a) - f(b)g(a)$$
$$h(b) = [g(b) - g(a)] \cdot f(b) - [f(b) - f(a)] \cdot g(b) = -g(a)f(b) + f(a)g(b)$$

Ainsi $h(a) = h(b)$. la dérivée est $h'(x) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(x) - [f(b) - f(a)] \cdot g'(x)$.
Par le théorème des accroissements finis. il existe $c \in [a;b]$ avec $h'(c) = \dfrac{h(b) - h(a)}{b-a}$.
Ainsi $[g(b) - g(a)] \cdot f'(c) - [f(b) - f(a)] \cdot g'(c) = 0$. D'où le résultat dû à Cauchy.

$$[g(b) - g(a)] \cdot f'(c) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(c) \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Preuve :

Pa le résultat dû à Cauchy, $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, avec c compris entre x et a. Comme $f(a)=g(a)=0$, on a $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Quand $x\to a$, c se rapproche a, comme il est entre x et a. Ainsi

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

D'où,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Utilisation de la règle de l'Hospital

a. Vérifier que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est une forme indéterminée $\left(\frac{0}{0}, 0\cdot\infty ou \frac{\infty}{\infty}\right)$ .Si ce n'est pas le cas, la règle de l'Hospital n'est pas applicable!!

b. Dériver $f(x)$ and $g(x)$ **séparément.**

c. Calculer $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

On peut au besoin répéter ce processus plusieurs fois.

► **Exemple :**

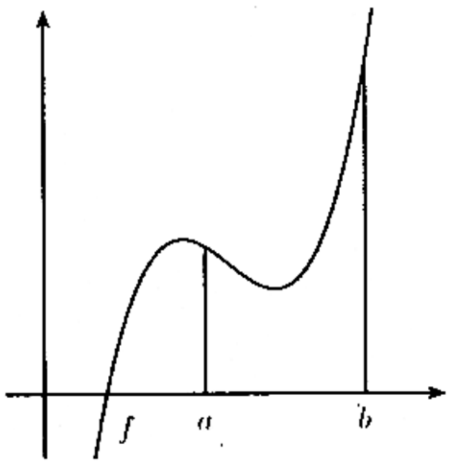
Preuve de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0$ en utilisant la règle de l'Hospital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=«\frac{+\infty}{+\infty}»\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^n)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n\cdot x^{n-1}}{e^x}=«\frac{+\infty}{+\infty}»\overset{H}{=}\ldots\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=«\frac{n!}{+\infty}»=0$$

9.4 Calcul intégral

9.4.1 Définition et exemples

Si f est une fonction continue et positive dans un intervalle $[a;b]$, alors on définit l'intégrale de f entre a et b comme étant un nombre qui mesure l'aire de la surface hachurée ci-contre, c'est-à-dire délimitée par la courbe $y=f(x)$, l'axe des x $(y=0)$ et les droites verticales $x=a$ et $x=b$.
L'unité d'aire est le rectangle construit sur les vecteurs de base du système d'axes.
L'intégrale de f entre a et b se note $\int_a^b f(x)\,dx$.



► **Important :** Pour a, b et $c\in\mathbb{R}$, on a : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$

► **Exemples :**

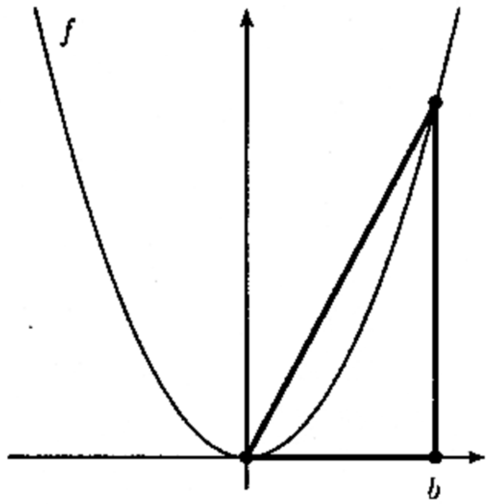
a. **Fonction constante :** $f(x) = c$ $(c > 0)$ alors : $\int_a^b c\,dx = (b-a)\cdot c = bc - ac$

b. **Fonction linéaire :** $f(x) = k \cdot x$ (avec $0 \leq a \leq b$) alors : $\int_a^b k \cdot x\, dx = \frac{1}{2}kb^2 - \frac{1}{2}ka^2$

c. **Fonction affine :** $f(x) = mx + h$ (entre a et b, avec f positive sur $[a;b]$) alors : $\int_a^b mx + h\, dx = \frac{1}{2}mb^2 + hb - \left(\frac{1}{2}ma^2 + ha\right)$

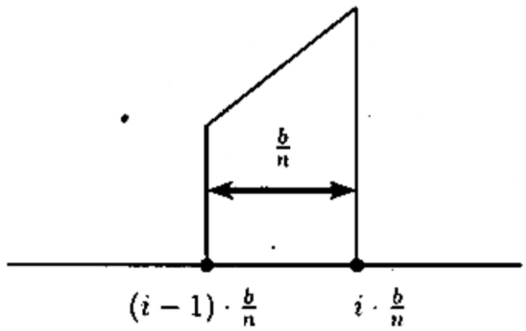
d. **Fonction quadratique :** $f(x) = x^2$ (entre a et b). Comme $\int_0^b f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$, on a $\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx$.

Déterminons l'intégrale $\int_0^b x^2\,dx$ (avec $b>0$). Cette surface ne peut être calculée précisément, il faut l'approximer. Une première approximation se fait à l'aide d'un triangle. Nous avons :



$$A = \int_0^b x^2\,dx < \frac{1}{2}\cdot b \cdot b^2 = \frac{b^3}{2}$$

En découpant la surface en plusieurs tranches de formes trapézoïdales, on parvient à améliorer la première estimation.
Décidons de couper la base (l'intervalle $[0;b]$) en n tranches de longueur identiques $\frac{b}{n}$ comme sur le dessin ci-contre. En cumulant l'aire des trapèzes, on obtient :



$$A_n = \frac{b}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\left(\frac{b}{n}\right)^2 + \left(2\cdot\frac{b}{n}\right)^2\right) + \ldots + \frac{b}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\left((i-1)\cdot\frac{b}{n}\right)^2 + \left(i\cdot\frac{b}{n}\right)^2\right) + $$
$$+ \frac{b}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\left((n-1)\cdot\frac{b}{n}\right)^2 + \left(n\cdot\frac{b}{n}\right)^2\right)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{b}{n}\right)^3 \cdot \left[1 + (1+2^2) + (2^2+3^2) + \ldots + ((n-1)^2 + n^2)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^3 \cdot \left[2\cdot 1^2 + 2\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + \ldots + 2\cdot(n-1)^2 + n^2\right] = \\ &= \left(\frac{b}{n}\right)^3 \cdot \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2\right] + \frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{n} \end{aligned}$$

Comme $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on a

$$A_n = \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6} + \frac{b^3}{2n} = \frac{b^3}{6}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{2n-1}{n} + \frac{b^3}{2n}$$

Lorsque $n \to \infty$, $\frac{n-1}{n} \to 1$ et $\frac{2n-1}{n} \to 2$.
Ainsi

$$\int_0^b x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^3}{6}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{2n-1}{n} + \frac{b^3}{2n}\right) = \frac{b^3}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{b^3}{3}$$

et donc.
$$\int_a^b x^2\,dx = \int_0^b x^2\,dx - \int_0^a x^2\,dx = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3$$

► **Exemple :** $\displaystyle\int_{-2}^{5} x^2\,dx = \frac{1}{3}\cdot 5^3 - \frac{1}{3}\cdot(-2)^3 = \frac{125}{3} + \frac{8}{3} = \frac{133}{3} \cong 44.\bar{3}$

Observation

En considérant tous les exemples traités, on voit que $\int_a^b f(x)\,dx$ se calcule à l'aide d'une différence de deux expression semblables, l'une contenant a l'autre b.
C'est-à-dire $\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = e(b) - e(a)$. où $e(x)$ est une fonction qui dépend de f. Déterminons $e(x)$ pour les cas étudiés.

Type de f	$f(x)$	$e(x)$
Fonction constante	h	hx
Fonction linéaire	mx	$\frac{1}{2}mx^2$
Fonction affine	$mx+h$	$\frac{1}{2}mx^2 + hx$
Fonction quadratique	x^2	$\frac{1}{3}x^3$

Dans chaque cas l'expression $e(x)$ a une dérivée égale à $f(x)$. La fonction est appelée une **primitive** de la fonction $f(x)$, et elle se note $F(x)$.

On constate donc que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \overset{notation}{=} F(x)|_a^b$ avec $F'(x) = f(x)$. Ce résultat doit encore être démontré dans un cas général.

► **Définitions** On appelle a la **borne inférieure** d'intégration, b la **borne supérieure**. Le segment $[a;b]$ est appelé **segment d'intégration**, alors que x est la **variable d'intégration**.
L'expression $\int_a^b f(x)dx$ s'appelle **intégrale définie**. C'est un nombre calculé par $F(b) - F(a)$, avec $F(x)$ une primitive de $f(x)$.

► **Théorème :** Si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont deux primitives de la fonction $f(x)$ sur $[a;b]$, alors $F_2(x) = F_1(x) + C$, avec C une constante ($\in \mathbb{R}$).

Preuve :

$$F_1'(x) = F_2'(x) = f(x) \quad\Rightarrow\quad (F_1(x) - F_2(x))' = 0 \quad\Rightarrow\quad F_1(x) - F_2(x) = C$$

En conclusion, si nous connaissons une primitive quelconque $F(x)$ d'une fonction $f(x)$, toute autre primitive de cette fonction sera de la forme $F(x) + C$. □

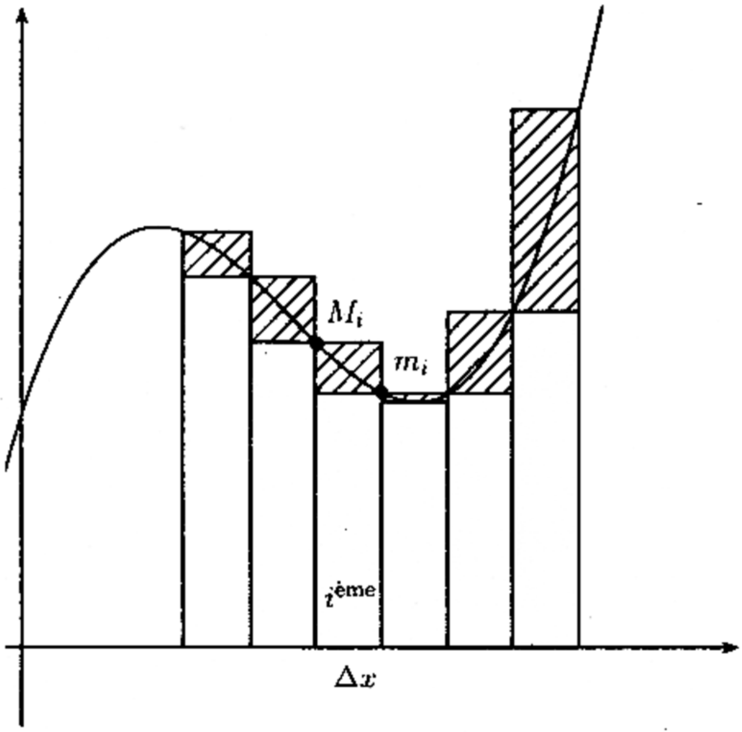
► **Définition** On appelle **intégrale indéfinie** de la fonction $f(x)$ et on note $\int f(x)\,dx$ toute expression de la forme $F(x) + C$. où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ et C une constante. Ainsi par définition. $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

► **Remarque :** L'intégrale définie se calculant par la différence $(F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$. la constante C peut être omise dans les calculs d'intégrales définies. Nous choisirons donc toujours la primitive la plus simple.

► **Exemples :** $\int 5\,dx = 5x + C$, $\int (7x+2)\,dx = 3.5x^2 + 2x + 6 + C$ et $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$

9.4.2 Intégrales (sommes) de Riemann (Allemand, 1826-1866)

Si f désigne une fonction continue dans un intervalle $[a;b]$, on définit le nombre $\int_a^b f(x)\,dx$ à l'aide d'estimations successives.
Pour produire deux estimations, l'une par **excès** et l'autre par **défaut**, on subdivise l'intervalle $[a;b]$ en un certain nombre n de tranches, puis dans chaque tranche on remplace le graphe par une horizontale, maximum ou minimum de la fonction sur la tranche.
Soit $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, la largeur de chaque tranche, que nous choisissons égales. Nommons M_i le maximum de f dans la $i^{\text{ème}}$ tranche, et m_i son minimum. On obtient alors les estimations suivantes :



Par défaut : $A^- = \Delta x \cdot m_1 + \Delta x \cdot m_2 + \Delta x \cdot m_3 + \ldots + \Delta x \cdot m_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot m_i$

Par excès : $A^+ = \Delta x \cdot M_1 + \Delta x \cdot M_2 + \Delta x \cdot M_3 + \ldots + \Delta x \cdot M_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot M_i$

Pour obtenir la valeur exacte, on passe à la limite lorsque la subdivision devient de plus en plus fine, c'est-à-dire lorsque $n \to \infty$.
On a :

$$A^- = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot m_i \leq A \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot M_i = A^+$$

Si on choisit Δx de plus en plus petit ($\Delta x \to 0$), on obtient l'égalité :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot m_i = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot M_i = A$$

A la limite, le symbole Σ se transforme en $\int$ et Δx en dx. $M_i = m_i = f(x_i)$ car au passage à la limite, les maximums et les minimums sont identiques. Finalement, on obtient

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

L'intégrale étant la limite d'une sommation, elle possède les mêmes propriétés que les sommes.

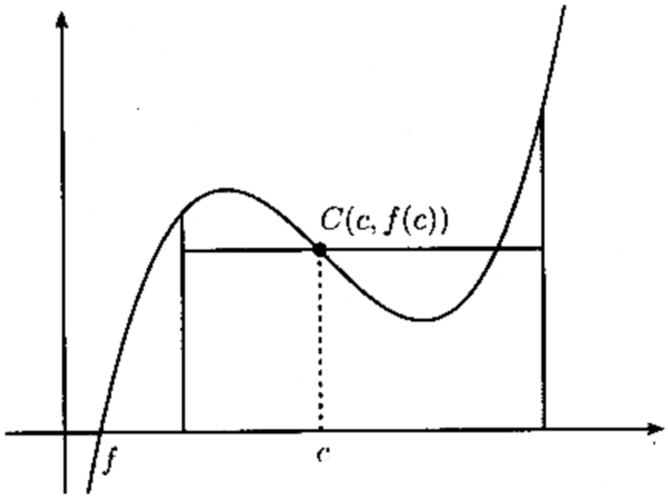
$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int \mu f(x)\,dx = \mu \int f(x)\,dx, \mu \in \mathbb{R}$$

9.4.3 Moyenne d'une fonction

D'après sa définition, l'intégrale mesure une somme d'aires pourvues de signes. L'intégrale permet de définir la valeur moyenne d'une fonction dans un intervalle.
$\overline{f}$ la moyenne de la fonction f entre a et b vaut

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$



Pour une fonction continue f, la valeur moyenne est l'une des valeurs de f. Il existe en effet un nombre $c \in [a;b]$ tel que $\overline{f} = f(c)$.
Ce résultat est connu sous le nom de **théorème de la moyenne**.

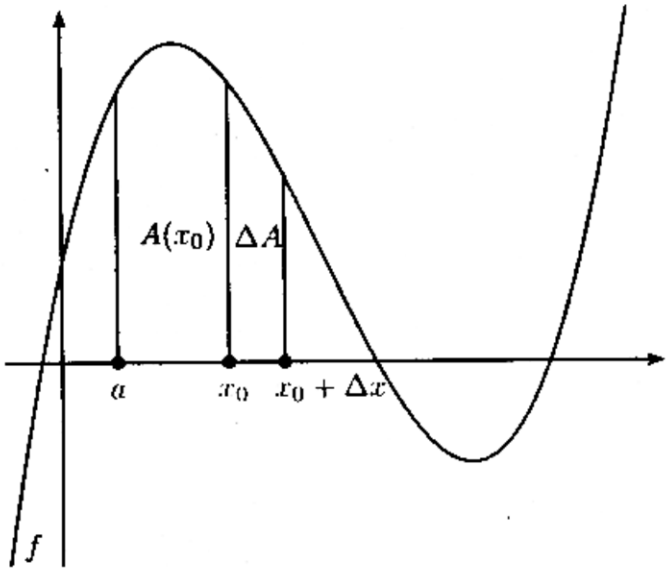
9.4.4 Théorème fondamental du calcul intégral

Soit la fonction $A(x) = \int_a^x f(t)dt$. Cette fonction calcule l'aire entre l'axe des x-axis, le graphe de f et deux droites verticales . La dérivée de $A(x)$ en x_0 vaut

$$A'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x}$$

Comme

$$\begin{aligned} \Delta A &= A(x_0 + \Delta x) - A(x_0) \\ &= \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt \end{aligned}$$



Par le théorème de la moyenne, il y a une valeur $c \in [x_0; x_0 + \Delta x]$ telle que $\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt = \Delta x \cdot f(c)$. On a ainsi $\frac{\Delta A}{\Delta x} = f(c)$. Finalement,

$$A'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x_0)$$

Nous venons de démontrer le « **théorème fondamental du calcul intégral** » qui dit que « **l'intégration est le contraire de la dérivation** ».

> ► **Important :**
> $A(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \Rightarrow \quad A'(x_0) = f(x_0)$,c'est-à-dire : $(\int f(x)\,dx)' = f(x)$

> ► **Théorème :** Si F désigne une primitive quelconque de la fonction f, alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Preuve :

La fonction F et la fonction A donnée par $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ sont toutes deux des primitives de f.
Comme F et A ont la même dérivée, elles diffèrent d'une constante k : $F(x) - A(x) = k$.
Posons $x = a$: $F(a) - A(a) = F(a) = k$. La constante est donc $F(a)$.
Posons $x = b$: $F(b) - A(b) = F(a)$.
D'où $A(b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$ □

▶ **Exemple :** $\int_{-3}^{2} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^{2} = \frac{1}{2}\cdot 2^2 - \frac{1}{2}(-3)^2 = 2 - 4.5 = -2.5$

9.4.5 Interprétation géométrique de l'intégrale définie

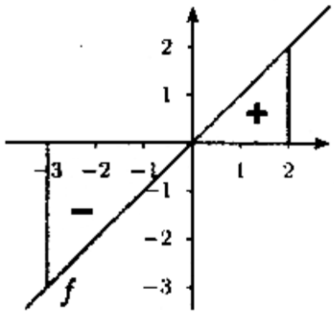
Soit $f(x)$ une fonction **continue** sur $[a;b]$. En utilisant la définition de l'intégrale (intégrale de Riemann), $\int_a^b f(x)\,dx$ représente **l'aire signée** délimitée par l'"abscisse, le graphe de f et les droites verticales $x = a$ et $x = b$.

> ▶ **Important :**
> Si $f(x) > 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. Par contre si $f(x) < 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx < 0$.

9.4.6 Aire de la surface entre une fonction et l'axe des x

Soit la fonction $y = f(x)$. Pour déterminer l'aire comprise entre la courbe et l'axe des x, dans l'intervalle $[a;b]$ on ne peut pas systématiquement calculer $\int_a^b f(x)\,dx$. Regardons deux exemples.

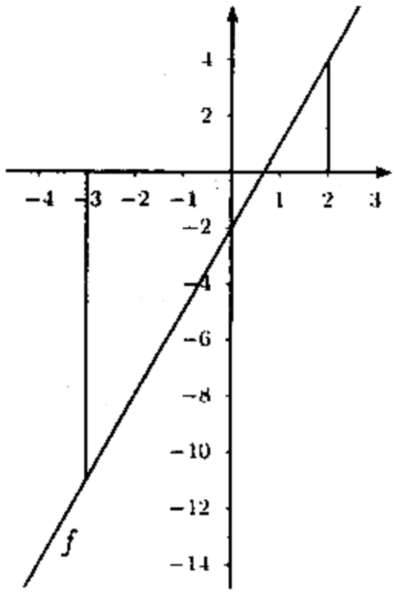
▶ **Exemple :**



$$\int_{-3}^{2} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^{2} = \frac{1}{2}\cdot 2^2 - \frac{1}{2}(-3)^2 = 2 - 4.5 = -2.5$$

Comme la fonction n'est pas positive partout sur l'intervalle, le calcul de $\int_{-3}^{2} x\,dx$ ne donne pas la réponse exacte. Pour déterminer l'aire grisée, considérer $|f(x)|$ au lieu de f. On obtient alors :

$$A = -\int_{-3}^{0} x\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx = 4.5 + 2 = 6.5$$



▶ **Exemple :**

Soit la $f(x) = 3x - 2$. Pour calculer l'aire entre la fonction et l'axe des x sur l'intervalle $[-3;2]$, nous devons déterminer les zéros de la fonction et considérer la fonction $|f(x)|$ au lieu de f.

$$A = \left|\int_{-3}^{2/3} 3x - 2\,dx\right| + \left|\int_{2/3}^{2} 3x - 2\,dx\right| \simeq 22.8$$

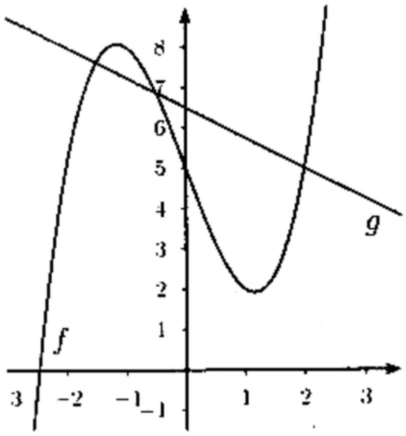
9.4.7 Aire de la surface limitée par deux courbes

Soient f et g deux fonctions. Le graphe des fonctions f et g délimite une surface fermée si l'équation $f(x) = g(x)$ possède deux solutions et si entre ces deux solutions les fonctions sont continues.

▶ **Exemple :**

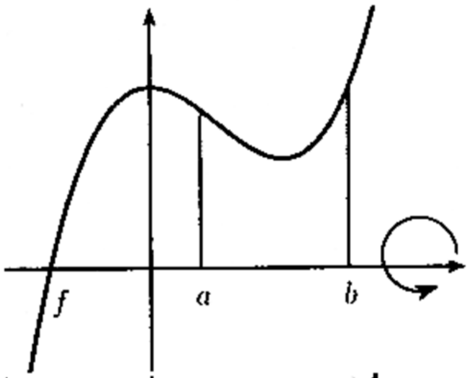
Soient $f(x) = x^3 - 4x + 5$ et $g(x) = -0.75x + 6,5$ deux fonctions. Les zéros de $f(x) - g(x)$ sont $\{-1.5; -0.5; 2\}$. La surface fermée délimitée par les courbes f et g vaut

$$A = \int_{-1.5}^{-0.5} g(x) - f(x)\ dx + \int_{-0.5}^{2} f(x) - g(x)\ dx \simeq 6.36$$



9.4.8 Volume d'un corps de révolution et longueur d'arc

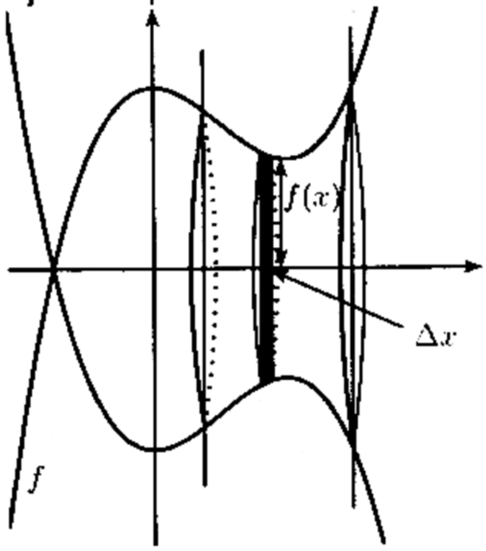
On construit un corps solide en faisant tourner autour de l'axe x une surface délimitée par un graphe et les droites verticales $x = a$ et $x = b$.
Pour estimer le volume de ce corps, on le débite en fines tranches cylindriques.
Le volume de la tranche vaut $\pi \cdot [f(x)]^2 \cdot \Delta x$.
Le volume est obtenu en sommant les volumes des cylindres et en passant à la limite (nombre de tranches tend vers l'infini).



$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot [f(x_i)]^2\, \Delta x = \int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2\ dx$$

(avec $x_i \in i^{ème}$ intervalle). Finalement, on obtient

$$\boxed{V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\ dx}$$



▶ **Remarque :** On peut aussi construire un corps solide en faisant tourner autour de l'axe y une surface délimitée par un graphe et les droites verticales $y = c$ et $y = d$. Le volume de de corps vaut $V = \int_c^d \pi x^2 dy$. Concrètement, nous devons exprimer x en fonction de y c'est-à-dire calculer $x = f^{-1}(y)$.

▶ **Exemples :**

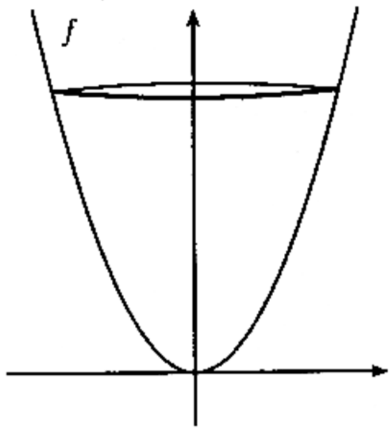
a. **Volume du paraboloïde**

Ce volume est obtenu par rotation de la courbe $y = x^2$ autour de l'axe y.

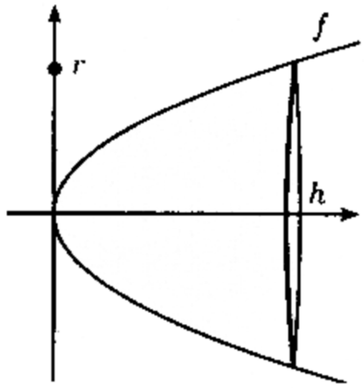
$$y = f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

$$V = \int_0^h \pi \sqrt{y}^2 dy = \int_0^h \pi y\, dy = \frac{\pi}{2} h^2$$

Nous avons traité le cas où $f(x) = \sqrt{x}$ ce qui implique que $r = \sqrt{h}$.



Plus généralement, déterminons le volume du paraboloïde de hauteur h et de rayon r. Déterminons m de telle sorte que $f(x) = m \cdot \sqrt{x}$ passe par le point $(h; r)$:
$f(h) = m \cdot \sqrt{h} = r$. On a donc $m = \frac{r}{\sqrt{h}}$. Ainsi $f(x) = \frac{r}{\sqrt{h}}\sqrt{x}$.
On obtient :



$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[\frac{r}{\sqrt{h}}\sqrt{x}\right]^2 dx = \pi \cdot \int_0^h \frac{r^2 x}{h}\, dx$$
$$= \frac{\pi r^2}{h} \cdot \int_0^h x\, dx = \left[\frac{\pi r^2}{h} \cdot \frac{1}{2}x^2\right]_0^h = \frac{1}{2}\frac{\pi r^2}{h}h^2 = \frac{1}{2}\pi r^2 h$$

b. **Volume obtenu par rotation de la surface délimitée par deux courbes**

Soit la surface délimitée par les courbes f en g entre $x = a$ et $x = b$. Nous supposerons que $f(x) > g(x) > 0$ sur $[a; b]$.

Cette surface est calculée par $A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$.

Le volume obtenu par rotation de cette aire n'est **pas** $V = \pi \int_a^b (f(x) - g(x))^2\, dx$ .Il se calcule par soustraction de deux volumes :

$$\boxed{V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2\, dx - \pi \cdot \int_a^b g(x)^2\, dx}$$

c. **Longueur d'un arc**

Soit f une fonction continue et dérivable sur $[a; b]$. On appelle L la longueur de la courbe sur cet intervalle. Cette longueur peut être approchée en calculant la longueur de n segments puis en faisant tendre n vers l'infini. (avec $x_i \in i^{\text{ème}}$ intervalle)

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f(x_i + \Delta x) - f(x_i))^2 + (\Delta x)^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left[\left(\frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}\right)^2 + 1\right] \cdot (\Delta x)^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'(x_i)^2 + 1} \cdot \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

► **Exemple :**

Calculons la longueur de l'arc de $f(x) = x^{3/2}$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \left[\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^1$$
$$= \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^1 \simeq 1.44$$

9.4.9 Méthodes d'intégration

La recherche des primitives fait parfois appel à des méthodes d'intégration.

a. **Intégration par parties**

Soit $f(x) = u(x) \cdot v(x)$. Nous avons démontré que sa dérivée est $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.
Nous pouvons alors écrire les intégrales indéfinies suivantes :

$$\int f'(x)\, dx = \int (u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x))\, dx = \int u'(x)v(x)\, dx + \int u(x) \cdot v'(x)\, dx$$

Comme $\int f'(x)\ dx = f(x) = u(x)\cdot v(x)$, nous obtenons finalement :

$$u(x)\cdot v(x) = \int u'(x)\cdot v(x)\ dx + \int u(x)\cdot v'(x)\ dx$$

Resultat

La formule d'intégration par partie se mémorise et s'utilise sous la forme (la constante est volontairement négligée) :

$$\boxed{\int u(x)\cdot v'(x)\ dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\ dx}$$

▶ **Exemples :**

a) Pour calculer $\int_a^b x\cdot\cos(x)\ dx$, il faut identifier correctement u et v'.
Choisissons $u = x$ et $v' = \cos(x)$. On a alors

$$\int_a^b x\cdot\cos(x)\ dx = x\sin(x)\Big|_a^b - \int_a^b 1\cdot\sin(x)\ dx = x\sin(x) + \cos(x)\Big|_a^b$$

b) Pour calculer $\int \sin^2(x)\ dx$ choisissons $u = v' = \sin(x)$. On a alors

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)\ dx &= \int \sin(x)\cdot\sin(x)\ dx\\ &= -\sin(x)\cos(x) - \int -\cos^2(x)\ dx = -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)\ dx\end{aligned}$$

On remplace $\cos^2(x)$ par $1-\sin^2(x)$. On a alors :

$$\int \cos^2(x)\,dx = \int 1-\sin^2(x)\,dx = \int 1\ dx - \int \sin^2(x)\,dx = x - \int \sin^2(x)\,dx$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)\ dx &= -\sin(x)\cos(x) + x - \int \sin^2(x)\ dx\\ 2\cdot\int \sin^2(x)\ dx &= -\sin(x)\cos(x) + x\\ \int \sin^2(x)\ dx &= \frac{1}{2}\left(-\cos(x)\sin(x) + x\right) + C\end{aligned}$$

c) Primitive de la fonction logarithme naturel : Que vaut $\int \ln(x)\ dx = \int \ln(x)\cdot 1\ dx$? Choisissons. $u = \ln(x) et v' = 1$. on obtient :

$$\begin{aligned}\int \ln(x)\ dx &= \int 1\cdot\ln(x)\ dx = x\cdot\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\ dx\\ &= x\cdot\ln(x) - \int 1\ dx = x\left(\ln(x) - 1\right) + C\end{aligned}$$

b. **Intégration par changement de variable (par substitution)**
Cette méthode permet de calculer dans certains cas la primitive d'une fonction composée.
Resultat

$$\boxed{\int_a^b g(f(x)) \cdot f'(x)\, dx = G(f(x))\Big|_a^b}$$

Preuve :

Dérivons la fonction composée $G(f(x))$

$$x \xrightarrow[f'(x)]{} f(x) = u \xrightarrow[G'(u)]{} G(u) = y$$

Ainsi

$$[G(f(x))]' = f'(x) \cdot G'(f(x)) = f'(x) \cdot g(f(x))$$

Donc

$$\int_a^b g(f(x)) \cdot f'(x)\, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)\, du$$

On passe du membre de gauche à celui de droite en posant $u = f(x)$, $du = f'(x)\,dx$, et en changeant les bornes d'intégration. □

► **Exemples :**

a) Pour calculer $\int_a^b x^2 \sin(x^3)\, dx$, on pose $u = x^3$ donc $\frac{du}{3} = x^2 dx$. On obtient :

$$\int_a^b x^2 \sin(x^3)\, dx = \frac{1}{3}\int_{a^3}^{b^3} \sin(u)\, du = -\frac{1}{3}\cos(u)\Big|_{a^3}^{b^3}$$
$$= -\frac{1}{3}\cos(x^3)\Big|_a^b = -\frac{1}{3}\left(\cos(b^3) - \cos(a^3)\right)$$

b) Déterminons l'aire A d'un quart de disque à l'aide du calcul intégral. Equation du cercle centré en l'origine et de rayon r : $x^2 + y^2 = r^2$, ainsi $y = \sqrt{x^2 - r^2}$ représente un demi cercle.

$$A = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

On calcule cette intégrale par changement de variable : $x = r\cos(\varphi)$ et donc $dx = -r\sin(\varphi)\, d\varphi$. Ce changement de variable provient des équations paramétriques du cercle de rayon r centré en l'origine. Les nouvelles bornes sont obtenues par $\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{x}{r}\right)$.

$$A = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{r^2 - (r\cos(\varphi))^2}(-r\sin(\varphi) d\varphi)$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -r^2\sin^2(\varphi) d\varphi = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\varphi) d\varphi = r^2 \cdot \frac{1}{2}\left(-\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}$$

c. **Intégration par identifiaction**. Cette méthode, appelée par identification, peut s'appliquer dans les cas où la forme de la primitive est connue.

► **Exemples :**

a) Que vaut la dérivée de $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{kx}$?
On a :

$$F'(x) = (ax^2 + bx + c)ke^{kx} + (2ax + b)e^{kx} = (kax^2 + (2a + kb)x + (b + kc))e^{kx}$$

En posant, $A = ka$, $B = 2a + kb$ et $C = b + kc$, on a que $F'(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{kx}$ est de ma même forme que $F(x)$.
Ce résultat général nous permet par exemple de déterminer $\int(3x^2 - 2x + 1)e^x dx$. On trouve $a = 3$, $b = -2 - 6 = -8$ et $c = 1 + 8 = 9$ donc finalement,

$$\int (3x^2 - 2x + 1)e^x dx = (3x^2 - 8x + 9)e^x$$

b) Que vaut la dérivée de $F(x) = (a\cos(x) + b\sin(x))e^{kx}$?
On a :

$$F'(x) = ((ka + b)\cos(x) + (kb - a)\sin(x))e^{kx}$$

En posant, $A = ka + b$, $B = kb - a$, on a que $F'(x) = (A\cos(x) + B\sin(x))ke^{kx}$ est de ma même forme que $F(x)$.
Ce résultat général nous permet par exemple de déterminer $\int(\sin(x))e^{\frac{x}{2}}dx$. Dans notre exemple,on a $A = 0$, $B = 1$ et $k = 0.5$. On trouve $a = \frac{-4}{5}$ et $b = \frac{2}{5}$ donc finalement,

$$\int \sin(x)e^{\frac{x}{2}}dx = (\frac{2}{5}\sin(x) - \frac{4}{5}\cos(x))e^{\frac{x}{2}}$$

d. **Intégration des fonctions rationnelles**. L'intégration des fonctions rationnelles $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ avec $\deg(q) = 2$ sera étudié dans les exercices. Vous trouvez les différents cas dans votre formulaire.

9.4.10 Intégrales impropres

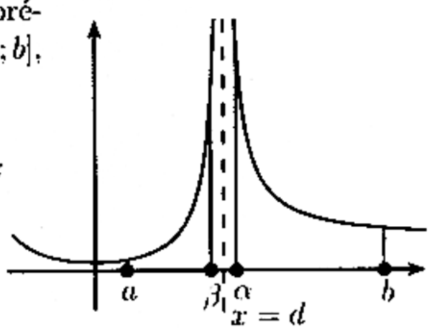
La définition de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ et les méthodes d'intégration ne sont valables que si la fonction f est continue sur tout l'intervalle fini $[a;b]$. Lorsque la fonction n'est pas continue ou lorsque l'intervalle est de la forme $]-\infty;b[$, $[a;+\infty[$ ou $]-\infty;+\infty[$, on prolonge la notion d'intégrale à l'aide de limites. On appelle de telles intégrales des **intégrales impropres**.

Intervalles infinis
On dit que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ existe si $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ existe. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Intervalles contenant une discontinuité Si f présente une discontinuité (en $x = d$) dans l'intervalle $[a;b]$, alors on définit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to d^-}\int_a^\beta f(x)\;dx + \lim_{\alpha\to d^+}\int_\alpha^b f(x)\,dx$$



► **Exemples :**

a. $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{b} + 1 = 1$$

b. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-1/2}\,dx = \lim_{b\to\infty} 2x^{1/2}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{b}-2$ n'existe pas.

c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\alpha\to 0^+}\int_\alpha^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\alpha\to 0^+} -\frac{1}{x}\Big|_\alpha^1 = \lim_{\alpha\to 0^+} -1+\frac{1}{\alpha}$ n'existe pas.

d. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\alpha\to 0^+}\int_\alpha^1 x^{-1/2}\,dx = \lim_{\alpha\to 0^+} 2x^{1/2}\Big|_\alpha^1 = \lim_{\alpha\to 0^+} 2-2\sqrt{\alpha} = 2.$

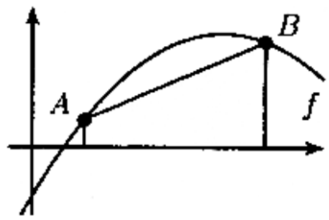
9.4.11 Intégration numérique

Parfois aucunes des méthodes présentées jusqu'ici ne permet de déterminer la primitive cherchée. Il faut alors recourir à des méthodes numériques qui nous livrent des estimations de la valeur de l'intégrale.
L'idée est de subdiviser l'intervalle d'intégration en tranches et de remplacer dans chaque tranche la fonction par une fonction facile à intégrer. Les arcs de graphes sont remplacés par des segments, des arcs de paraboles, voire d'autres courbes.
Les sommes de Riemann, qui recourt à des segments horizontaux, est une méthode d'intégration numérique. Elle permet d'encadrer l'intégrale cherchée par une estimation par excès et une estimation par défaut. La qualité de l'estimation s'améliore avec le nombre de tranches que compte l'intervalle d'intégration

a. **Méthode de la sécante**

La méthode de la sécante est aussi basée sur des segments. Sur l'intervalle $[a;b]$, la courbe $y=f(x)$ est remplacée par la sécante, soit la droite passant par $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$. On obtient

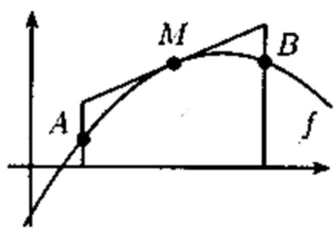
$$\boxed{S = \underbrace{(b-a)}_{\text{base}}\cdot \underbrace{\frac{f(a)+f(b)}{2}}_{\text{hauteur moyenne}}}$$



b. **Méthode de la tangente**

La méthode de la tangente est aussi basée sur des segments. Sur l'intervalle $[a;b]$, la courbe $y=f(x)$ est remplacée par la tangente, soit la droite tangente à $y=f(x)$ passant par le point milieu $M\left(\frac{a+b}{2}; f(\frac{a+b}{2})\right) = (m; f(m))$.

$$\boxed{T = \underbrace{(b-a)}_{\text{base}}\cdot \underbrace{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{\text{hauteur moyenne}}}$$



Selon la concavité de la fonction sur l'intervalle, l'estimation sera supérieure ou inférieure à la valeur exacte. Si la fonction ne présente pas de point d'inflexion entre a et b, la valeur de $\int_a^b f(x)\,dx$ est entre S et T.

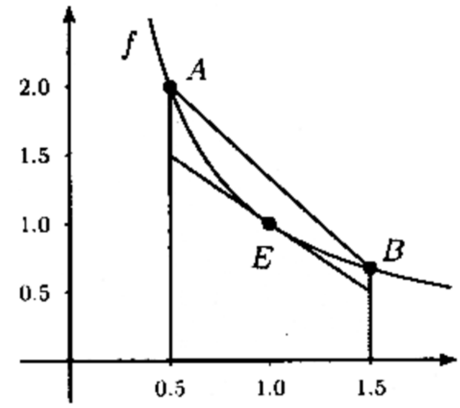
c. **Méthode de Simpson**

La méthode de Simpson est en fait une moyenne pondérée des deux méthodes précédentes. Ainsi l'estimation est meilleure. La méthode de la tangente a un poids double de celle de la sécante. Ainsi,

$$\boxed{\begin{aligned} P = \frac{S+2T}{3} &= (b-a)\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + 2\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \\ &= (b-a)\cdot\frac{f(a)+4f(m)+f(b)}{6} \end{aligned}}$$

► **Exemples :**

a. Illustrons ces méthodes en calculant $I = \int_{0.5}^{1.5} \frac{1}{x}\,dx$. La valeur exacte est $I = \ln(1,5) - \ln(0,5) = \ln(?) \cong 1.09$.



a) Estimation de la **sécante** (excès) :

$$S = (1.5 - 0.5) \cdot \frac{f(0.5) + f(1.5)}{2} = \frac{2 + \frac{2}{3}}{2} = \frac{4}{3} = 1,\overline{3}$$

b) Estimation de la **tangente** (défaut mais meilleure que S) :

$$T = (1.5 - 0.5) \cdot f\left(\frac{0.5 + 1.5}{2}\right) = 1$$

c) Estimation de **Simpson** (meilleure estimation) :

$$P = \frac{S + 2 \cdot T}{3} = 1,\overline{1}$$

La méthode de Simpson est exacte pour les polynômes de degré inférieur à 4 (voir en exercice).

b. Les trois estimations ci-dessus sont basées sur des segments rectilignes. Qu'obtient-on en remplaçant la fonction $y = f(x)$ par un arc de parabole sur l'intervalle d'intégration ?
L'intégrale $I = \int_a^b f(x)\,dx$ est estimée par $\int_a^b g(x)\,dx$,avec $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ la parabole passant par les points $A(a; f(a))$, $M(m; f(m)$ and $B(b; f(b))$ $(m = \frac{a+b}{2})$.
Pour déterminer α, β et γ, nous procédons à une translation du système d'axes de telle sorte que l'origine soit en $(m;0)$. Posons $h = \frac{b-a}{2}$ de sorte que $A\,(-h; y_0)$, $M\,(0; y_1)$ et $B\,(h; y_2)$, avec $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(m)$ et $y_2 = f(b)$:

$$\begin{array}{lcll} A \in g & : & y_0 = \alpha \cdot (-h)^2 + \beta \cdot (-h) + \gamma & \rightarrow \quad y_0 = \alpha h^2 - \beta h + \gamma \\ M \in g & : & y_1 = \gamma & \rightarrow \quad y_0 + 4 \cdot y_1 + y_2 = 2\alpha h^2 + 6\gamma \\ B \in g & : & y_2 = \alpha \cdot h^2 + \beta \cdot h + \gamma & \rightarrow \quad y_2 = \alpha h^2 + \beta h + \gamma \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x)\,dx &= \int_{-h}^{h} \alpha x^2 + \beta x + \gamma\,dx = \frac{\alpha}{3}x^3 + \frac{\beta}{2}x^2 + \gamma x \Big|_{-h}^{h} \\ &= \frac{\alpha}{3}h^3 + \frac{\beta}{2}h^2 + \gamma h - \left(\frac{\alpha}{3}(-h)^3 + \frac{\beta}{2}(-h)^2 + \gamma(-h)\right) \\ &= \frac{2\alpha}{3}h^3 + 2\gamma h = \frac{h}{3} \cdot \left(2\alpha h^2 + 6\gamma\right) = \frac{h}{3}\,(y_0 + 4y_1 + y_2) \\ &= \frac{b-a}{6}\,(f(a) + 4f(m) + f(b)) \end{aligned}$$

C'est le résultat de la méthode de Simpson !
Ainsi la méthode de Simpson consiste-t-elle à remplacer la fonction par un arc de parabole.

9.5 Equations différentielles

► **Définition**
Une **équation différentielle** est une relation faisant intervenir une fonction $y = f(x)$, des dérivées de cette fonction $y', y'', \ldots$ et la variable x.

► **Notation :** La dérivée de $y = f(x)$ se note y' ou $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Quand x represente le temps, la dérivée de y se note $\dot{y}$ (physique !)

► **Exemples :** $y' + 2y - x^2 = 0$ $\qquad y'' - (1 + 2x^2)y' = 0$ $\qquad y''' = \cos(y'') - \ln(y')$

► **Définition**
Une **solution** d'une équation différentielle est une fonction qui satisfait l'équation. **La famille des fonctions solutions** est appelée **solution générale** de l'équation. La solution générale d'une équation contient une ou plusieurs constantes.

► **Exemples :**

a. $y = x^2 + c$ est la solution générale de $y' = 2x$.
$y = x^2$ est une **solution particulière** de cette équation.

b. Un corps tombe en chute libre, sans frottements. $y = f(t)$ décrit sa position verticale en fonction du temps t. On a $\ddot{y} = g$. D'où $\dot{y} = g \cdot t + c_1$. D'où $y = \frac{1}{2}g \cdot t^2 + c_1 \cdot t + c_2$. Les fonctions $y = \frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2$ forment la solution générale de l'équation $y'' = g$. La connaissance de la vitesse verticale v_0 au temps $t = 0$ ainsi que la position de l'objet d_0 en ce même temps initial $t = 0$, permet d'obtenir une unique solution, appelée solution particulière de l'équation : $f(0) = d_0 = c_2$ et $f'(0) = v_0 = c_1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + d_0$.

► **Définition**
Une équation différentielle est d'**ordre n** si la $n^{\text{ème}}$ dérivée de la fonction y est la dérivée de plus haut rang intervenant dans l'équation. La solution générale d'une équation d'ordre n contient n constantes arbitraires.

► **Exemple :**

$y'' - y' + x - 1 = 0$ est d'ordre 2. Elle admet comme solution générale $y = ae^x + \frac{1}{2}x^2 + b$.

► **Remarque :** Il est possible de trouver une équation différentielle dont la solution générale est donnée : il faut dériver autant de fois qu'il y a de constantes arbitraires puis éliminer ces constantes à partir du système obtenu.

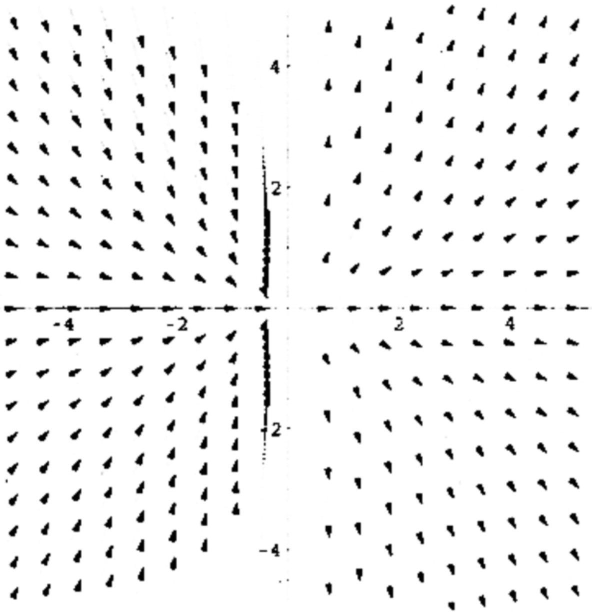
► **Exemple :**

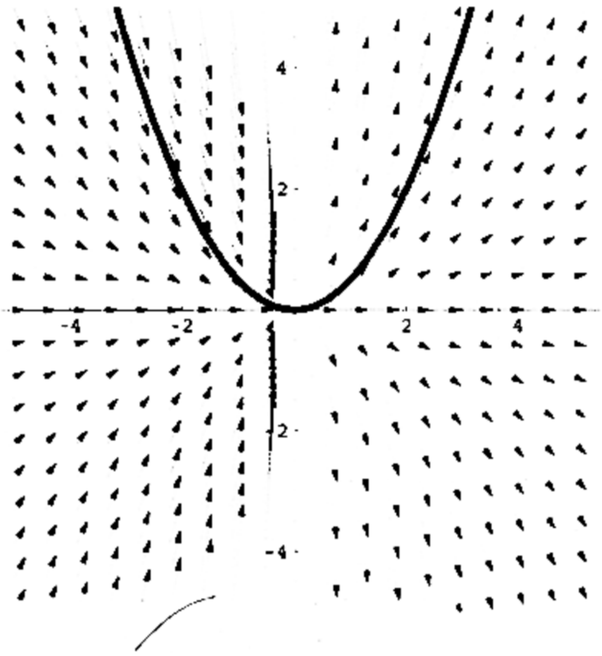
Solution générale : $y = ax^2 + bx$.
On a alors : $y' = 2ax + b$ et $y'' = 2a$. Ainsi $a = \frac{1}{2}y''$ et $b = y' - 2ax = y - xy''$. Donc l'équation différentielle est $y = -\frac{1}{2}y''x^2 + y'x$.

9.5.1 Interprétation graphique d'une équation différentielle d'ordre 1

Considérons l'équation différentielle $y' = \frac{2y}{x}$.
A chaque point $P(x; y)$ du plan, l'équation différentielle associe une direction : le vecteur de pente y'. Par exemple, en $P(2; -3)$ on a $y' = \frac{2y}{x} = \frac{-6}{2} = -3$. Ainsi en chaque point du plan on connaît la pente des fonctions solution $y = f(x)$. On obtient ainsi **le champ des directions** de l'équation différentielle. En partant d'un point P_0 on peut tracer la courbe solution par approximation en suivant le champ de directions. On trouve alors une approximation de la solution particulière qui passe par $P_0(x_0; y_0)$, c'est-à-dire telle que $f(x_0) = y_0$. La solution de l'équation différentielle $y' = \frac{2y}{x}$ est $y = c_0 \cdot x^2$. Graphiquement, les courbes solutions sont les paraboles dont le sommet est en l'origine.

Voici le champ des directions : et la solution particulière passant par $P_0\,(2;2)$.





9.5.2 Résolution d'équations différentielles d'ordre 1

a. **Equation du type $y' = f(x)$**

Il suffit d'intégrer !

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \;\Rightarrow\; dy = f(x)\,dx \;\Rightarrow\; \int dy = \int f(x)\,dx \;\Rightarrow\; y = \int f(x)\,dx$$

► **Exemple :** $y' = x - 1$. Alors $y = \frac{1}{2}x^2 - x + c$

b. **Equation à variables séparées. Equation du type $g(y) \cdot y' = f(x)$**

$$g(y) \cdot \frac{dy}{dx} = f(x) \;\Rightarrow\; g(y)\,dy = f(x)\,dx \;\Rightarrow\; \int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$$

► **Exemple :**

$$(x-1)y' - 2y = 0 \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y} = \frac{2}{x-1} \;\Rightarrow\; \frac{1}{y}\,dy = \frac{2}{x-1}\,dx \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{2}{x-1}\,dx$$
$$\Rightarrow\; \ln|y| = 2\ln|x-1| + c = \ln(x-1)^2 + c \;\Rightarrow\; y = k \cdot (x-1)^2$$

c. **Equation homogène. Equation du type $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$**

Posons $z = \frac{y}{x}$ pour se ramener au cas précédent. Ainsi $y = xz$ d'où $y' = z + xz'$. L'équation devient

$$z + xz' = f(z) \;\Rightarrow\; xz' = f(z) - z \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} = \frac{z'}{f(z) - z} \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{f(z) - z}\,dz$$

La fonction z étant trouvée, on conclut en écrivant $y = x \cdot z$.

► **Exemple :**

$y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$. As $\dfrac{xy}{x^2 - y^2} = \dfrac{xy}{x^2 - y^2} : \dfrac{x^2}{x^2} = \dfrac{y/x}{1 - (y/x)^2}$

En posant $z = \dfrac{y}{x}$, on obtient $y' = \dfrac{z}{1 - z^2}$.

$$z + xz' = \frac{z}{1 - z^2} \;\Rightarrow\; xz' = \frac{z}{1 - z^2} - z = \frac{z - z + z^3}{1 - z^2} = \frac{z^3}{1 - z^2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} = \frac{1 - z^2}{z^3}\,z'$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1-z^2}{z^3}\,dz = \int \frac{1}{z^3}\,dz - \int \frac{z^2}{z^3}\,dz = \frac{-1}{2z^2} - \ln|z| + c = \ln|x|$$

$$\frac{-1}{2z^2} - \ln|z| + c = \ln|x| \;\Rightarrow\; \frac{-1}{2z^2} = \ln|x| + \ln|z| - c = \ln|k\cdot x\cdot z|.$$

On ne peut pas isoler z. En écrivant $z = \frac{y}{x}$, on trouve :

$$\frac{-1}{2(y/x)^2} = \ln\left|k\cdot x\cdot\frac{y}{x}\right| = \ln|k\cdot y|$$

$$\frac{-x^2}{2y^2} = \ln|k\cdot y| \;\Rightarrow\; x^2 = -2y^2\ln|ky| \;\Rightarrow\; x = y\cdot\sqrt{-2\ln|ky|}$$

Notons au passage que la solution est ici une fonction implicite.

d. **Equation linéaire. Equation du type $y' + f(x)y = g(x)$**

Posons $y = u\cdot v$, où u et v sont deux fonctions de x à déterminer. $y' = u'v + uv'$. Ainsi

$$y' + f(x)y = u'v + uv' + f(x)uv = v(u' + f(x)\cdot u) + uv' = g(x)$$

Choisissons u tel que $u' + f(x)u = 0$, puis v sera obtenu en résolvant $uv' = g(x)$.

$$u' + f(x)u = 0 \;\Rightarrow\; \frac{u'}{u} = -f(x) \;\Rightarrow\; \ln|u| = -F(x) \;\Rightarrow\; u = e^{-F(x)}$$

$$uv' = e^{-F(x)}\cdot v' = g(x) \;\Rightarrow\; v' = e^{F(x)}g(x)$$

Ainsi, $v = \int e^{F(x)}g(x)\,dx$ et finalement $y = u\cdot v$ est la solution générale.

► **Remarque :** La présentation du formulaire est un peu différente. La solution générale avec $g(x) = 0$ est $y = c\cdot e^{-F(x)}$ Solution particulière : $p(x)$ telle que $p(x) = c(x)\cdot e^{-F(x)}$ est solution de $y' + f(x)y = g(x)$.

Alors la solution générale de $y' + f(x)y = g(x)$ est $y = c\cdot e^{-F(x)} + c(x)\cdot e^{-F(x)}$. Montrons que c'est la même solution !

$p(x)$ satisfait $p'(x) + f(x)\cdot p(x) = g(x)$

$\Rightarrow\; c'(x)\cdot e^{-F(x)} - \cancel{c(x)\cdot f(x)\cdot e^{-F(x)}} + \cancel{f(x)\cdot c(x)\cdot e^{-F(x)}} = g(x)$

$\Rightarrow\; c'(x)e^{-F(x)} = g(x) \;\Rightarrow c'(x) = e^{F(x)}\cdot g(x)$

Ainsi $c(x)$ et $v(x)$ sont identiques à une constante près.

$$y = u(x)\cdot v(x) = u(x)\cdot(c(x) + c) = e^{-F(x)}\cdot(c(x) + c) = ce^{-F(x)} + c(x)\cdot e^{-F(x)}$$

Ce sont bien les mêmes expressions.

► **Exemple :**

$y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$. Ici $f(x) = \frac{1-2x}{x^2}$ et $g(x) = 1$. Alors

$$F(x) = \int \frac{1-2x}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2}dx - 2\int \frac{x}{x^2}dx = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| = -\frac{1}{x} - \ln x^2$$

et

$$u = e^{-F(x)} = e^{\frac{1}{x}+\ln x^2} = e^{\frac{1}{x}}\cdot x^2$$

Ainsi

$$v' = e^{F(x)}\cdot g(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \;\Rightarrow\; v(x) = \int \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\,dx \underset{\boxed{\begin{array}{l} t = -1/x \\ dt = 1/x^2\,dx \end{array}}}{=} \int e^t\,dt = e^{\frac{-1}{x}} + c$$

Finalement,

$$y = uv = e^{\frac{1}{x}}x^2\cdot\left(e^{-\frac{1}{x}} + c\right) = x^2 + cx^2e^{\frac{1}{x}} = x^2\left(1 + ce^{\frac{1}{x}}\right)$$

est la solution générale de l'équation différentielle $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$.

9.6 Formule de Taylor

Le mathématicien anglais Brook Taylor (1685-1731) constata que pour un polynôme

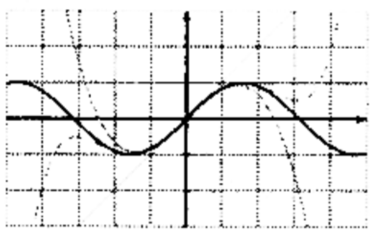
$$f(x) = P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n$$

la $k^{\text{ième}}$ dérivée en a vaut $f^{(k)}(a) = k!c_k$, où $k!$ (k factorielle) désigne le produit des k premiers nombres naturels (on définit encore $0! = 1$). Les coefficients c_k sont donc entièrement déterminés par les dérivées successives de $P_n(x)$:

$$P_n(x) \;=\; f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Etant donné une fonction f, on peut calculer ses dérivées successives en a et construire le polynôme $P_n(x)$ comme ci-dessus. Les n premières dérivées en a de $P_n(x)$ coïncident alors avec celles de f.

► **Exemple :** Par exemple, pour $f(x) = \sin(x)$ and $a = 0$, on construit les polynômes $P_1(x) = x$, $P_3(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 = x - \frac{1}{6}x^3$ et $P_5(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$ représentés ci-contre.



En analyse, le théorème de Taylor appelé aussi la formule de Taylor, du nom du mathématicien Brook Taylor qui l'établit en 1715, montre qu'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point peut être approximée par une fonction polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point.

On peut énoncer la formule de Taylor (ou de Mac Laurin si $a = 0$) comme suit :

> Soit une fonction f qui peut être dérivée $(n+1)$ fois sur un intervalle ouvert contenant les points a et x, alors il existe un nombre ξ entre a et x tel que
>
> $$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k}_{\text{polynôme de Taylor } P_n(x)} \;+\; \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{reste de Lagrange } R_n(x)}$$

Preuve :

On considère l'expression $h(x) = \varphi(x)(b-a)^{n+1} - \varphi(a)(b-x)^{n+1}$ avec

$$\varphi(x) = f(b) - \left[f(x) + \frac{f^{(1)}(x)}{1!}(b-x)^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n\right]$$

La fonction h s'annule pour $x = a$ et $x = b$ (car $\varphi(b) = 0$).Comme elle est continue, il existe forcément un maximum ou un minimum sur l'intervalle $]a;b[$, donc une valeur $\xi \in]a;b[$ qui annule la dérivée $h'(x) = (b-a)^{n+1}\varphi'(x) + (n+1)(b-x)^n\varphi(a)$. On trouve

$$\varphi'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n, \quad h'(x) = (b-x)^n\left((n+1)\varphi(a) - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-a)^{n+1}\right)$$

La relation $h'(\xi) = 0$ signifie $\varphi(a) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$ .Ainsi

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = f(b) - \left[f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a)^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n\right]$$

et donc

$$f(b) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a)^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Finalement, on remplace b par x. $\square$

► **Remarques :**

a. Le polynôme de Taylor de degré 1donne l'équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse a : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

b. Avec $n = 0$, on obtient le théorème des accroissements finis.

c. Le reste $R_n(x)$ contrôle la qualité de l'approximation de $f(x)$ par le polynôme $P_n(x)$. Si on peut montrer que $R_n(x)$ s'approche de zéro lorsque n augmente, on dispose d'un moyen de calculer $f(x)$ aussi précisément que l'on souhaite, en considérant un polynôme $P_n(x)$ d'ordre n suffisamment grand.