Série 10

CORRIGE

Exercice 1

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (4 \cdot 1 - 3 \cdot 3) - 2 \cdot (5 \cdot 1 - 3 \cdot 2) + 9 \cdot (5 \cdot 3 - 4 \cdot 2) = 4 - 9 - 2(5-6) + 9(15-8) =$$

$$= -5 + 2 + 63 = 60.$$

Exercice 2

Une matrice n'est pas inversible si son déterminant est nul.

On a
$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4-\lambda & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\big((4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \cdot 1\big) - \big(2(3-\lambda) - 2\big) + 2 \cdot 1 - (4-\lambda) \cdot 1 =$$

$$= (3-\lambda)^2(4-\lambda) - 2(3-\lambda) - 2(3-\lambda) + 2 + 2 - (4-\lambda) =$$

$$= (3-\lambda)^2(4-\lambda) - 4(3-\lambda) + 4 - 4 + \lambda = (3-\lambda)^2(4-\lambda) - 4(3-\lambda) + \lambda =$$

$$= (9 - 6\lambda + \lambda^2)(4-\lambda) - 12 + 4\lambda + \lambda = 36 - 9\lambda - 24\lambda + 6\lambda^2 + 4\lambda^2 - \lambda^3 - 12 + 5\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 28\lambda + 24$$

Ainsi la matrice n'est pas inversible si $-\lambda^3 + 10\lambda^2 - 28\lambda + 24 = 0$, c'est-à-dire $\lambda^3 - 10\lambda^2 + 28\lambda - 24 = 0$.

On remarque que $\lambda = 2$ est solution de cette équation : $2^3 - 10 \cdot 2^2 + 28 \cdot 2 - 24 = 8 - 40 + 56 - 24 = 0$.

On effectue la division euclidienne de $\lambda^3 - 10\lambda^2 + 28\lambda - 24$ par $\lambda - 2$:

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 - 10\lambda^2 + 28\lambda - 24 & \lambda - 2 \\ \cline{2-2} -(\lambda^3 - 2\lambda^2) & \lambda^2 - 8\lambda + 12 \\ \cline{1-1} -8\lambda^2 + 28\lambda - 24 & \\ -(-8\lambda^2 + 16\lambda) & \\ \cline{1-1} 12\lambda - 24 & \\ -(12\lambda - 24) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Comme $\lambda^2 - 8\lambda + 12 = (\lambda-2)(\lambda-6)$, on en déduit que $\lambda^3 - 10\lambda^2 + 28\lambda - 24 = (\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-6) =$
$= (\lambda-2)^2(\lambda-6)$. Ainsi les solutions de $\lambda^3 - 10\lambda^2 + 28\lambda - 24 = 0$ sont $\lambda = 2$ et $\lambda = 6$.

Par conséquent, la matrice n'est pas inversible si $\lambda = 2$ ou $\lambda = 6$.

Exercice 3

On a $B=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$.

$$\det(B)=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{vmatrix}=0\cdot\begin{vmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-\left(0\cdot\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\right)=-\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=$$

$$=-(0\cdot 0-1\cdot 1)=-(-1)=1.$$

Exercice 4

On a $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{pmatrix}$.

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}b&c\\b^2&c^2\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}1&1\\b^2&c^2\end{vmatrix}+a^2\cdot\begin{vmatrix}1&1\\b&c\end{vmatrix}=$$

$$=bc^2-b^2c-a(c^2-b^2)+a^2(c-b)=bc^2-b^2c-ac^2+ab^2+a^2c-a^2b=$$

$$=a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a).$$

On a $B=\begin{pmatrix}a&a&a&a\\a&b&b&b\\a&b&c&c\\a&b&c&d\end{pmatrix}$.

$$\det(B)=a\cdot\begin{vmatrix}b&b&b\\b&c&c\\b&c&d\end{vmatrix}-a\cdot\begin{vmatrix}a&a&a\\b&c&c\\b&c&d\end{vmatrix}+a\cdot\begin{vmatrix}a&a&a\\b&b&b\\b&c&d\end{vmatrix}-a\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}a&a&a\\b&b&b\\b&c&c\end{vmatrix}}_{=0 \text{ car 2 colonnes sont identiques}}=$$

$$=a\left(b\cdot\begin{vmatrix}c&c\\c&d\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}b&b\\c&d\end{vmatrix}+b\underbrace{\begin{vmatrix}b&b\\c&c\end{vmatrix}}_{=0}-a\begin{vmatrix}c&c\\c&d\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}a&a\\c&d\end{vmatrix}-b\underbrace{\begin{vmatrix}a&a\\c&c\end{vmatrix}}_{=0}+\right.$$

$$\left.+a\cdot\begin{vmatrix}b&b\\c&d\end{vmatrix}-b\cdot\begin{vmatrix}a&a\\c&d\end{vmatrix}+b\underbrace{\begin{vmatrix}a&a\\b&b\end{vmatrix}}_{=0}\right)=$$

$$=a\left(b(cd-c^2)-b(bd-bc)-a(cd-c^2)+b\cancel{(ad-ac)}+a(bd-bc)-b\cancel{(ad-ac)}\right)=$$

$$=a\left((b-a)(cd-c^2)+(a-b)(bd-bc)\right)=a(b-a)(cd-c^2-bd+bc)=$$

$$=a(b-a)\left(c(d-c)-b(d-c)\right)=a(b-a)(c-b)(d-c).$$

Exercice 5

Une matrice n'est pas inversible si son déterminant est nul.

Avec la matrice $\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$, on a $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(5-\lambda)-2\cdot(-2) =$

$= 5-\lambda-5\lambda+\lambda^2+4 = \lambda^2-6\lambda+9$

Son déterminant est nul si $\lambda^2-6\lambda+9=0$, c'est-à-dire $(\lambda-3)^2=0 \Rightarrow \lambda-3=0$
$\Rightarrow \lambda=3$.

Ainsi la matrice n'est pas inversible si $\lambda=3$.

Avec la matrice $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{pmatrix}$, on a $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} =$

$= (1-\lambda)\cdot\left((-\lambda)(-2-\lambda)-4\cdot 1\right) - \left(2(-2-\lambda)-4\cdot(-1)\right) + 2\left(2\cdot 1-(-\lambda)\cdot(-1)\right) =$

$= (1-\lambda)\cdot\lambda(2+\lambda) - (1-\lambda)\cdot 4 + 2(2+\lambda) - 4 + 4 - 2\lambda =$

$= (\lambda-\lambda^2)(2+\lambda) - 4 + 4\lambda + 4 + 2\lambda - 2\lambda =$

$= 2\lambda+\lambda^2-2\lambda^2-\lambda^3+4\lambda = -\lambda^3-\lambda^2+6\lambda = -\lambda(\lambda^2+\lambda-6) = -\lambda(\lambda-2)(\lambda+3)$.

Le déterminant est nul si $-\lambda(\lambda-2)(\lambda+3)=0 \Rightarrow \lambda=0$, $\lambda=2$ ou $\lambda=-3$.

Ainsi la matrice n'est pas inversible si $\lambda=-3$, $\lambda=0$ ou $\lambda=2$.

Exercice 6

Le déterminant est $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & c \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & c \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$

$$= 2c - 4 - (3c - 5) + 12 - 7 = 2c - 4 - 3c + 5 + 5 = -c + 6.$$

Une matrice est inversible si son déterminant est non nul.

Ainsi $-c+6 \neq 0 \Rightarrow c \neq 6$.

Par conséquent, si $c \neq 6$, la matrice est inversible.

Exercice 7

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est linéaire si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = kx$

a) $f(x) = \ln(x) \neq kx \Rightarrow f$ n'est pas linéaire

b) $f(x) = 2x+3 \neq kx \Rightarrow f$ n'est pas linéaire

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est linéaire si on a au moins $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

c) On a $f(x) = (x ; x^2)$, $f(y) = (y ; y^2)$ et $f(x+y) = (x+y ; (x+y)^2)$.
Or, comme $x^2 + y^2 \neq (x+y)^2$, on a $f(x+y) \neq f(x) + f(y)$.
$\Rightarrow f$ n'est pas linéaire.