Série 11

CORRIGE

Exercice 1

Soit $f: E \to F$ une application linéaire. Les colonnes de la matrice M associée à f sont les composantes des images par f des vecteurs de la base de E (voir Formulaires et tables, p.25).

a) La base de $\mathbb{R}^2$ est $(1;0)$ et $(0;1)$.
On a $f(1;0)=(3;7)$ et $f(0;1)=(-5;8)$.
Ainsi la matrice est $M=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

b) La base de $\mathbb{R}^2$ est $(1;0)$ et $(0;1)$.
Par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens positif, on a:
$f(1;0)=(0;1)$ et $f(0;1)=(-1;0)$.
Ainsi la matrice est $M=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array}$.

En effectuant $L_3 - L_1$, on obtient $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1' \\ \leftarrow L_2' \\ \leftarrow L_3' \end{array}$.

En effectuant $L_3' - L_2'$, on obtient $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1'' \\ \leftarrow L_2'' \\ \leftarrow L_3'' \end{array}$.

En effectuant $L_2'' - L_1''$, on obtient $A''' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La dimension de l'application linéaire, c'est-à-dire la dimension de A, A', A'' et A''', est donc 2.

Le noyau d'une application linéaire f est $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$, où E est l'ensemble de départ de f.
Avec la matrice A de l'application linéaire, on peut dire que $\mathrm{Ker}(A) =$
$= \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = 0\}$.

Comme $AX = 0$ est équivalent à $A'''X = 0$, on obtient, avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Une base du noyau de A est donc $(1; 0; -1)$ (par exemple).
La dimension du noyau de A est donc 1.

L'image d'une application linéaire f est $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\} = f(E)$, où E est l'ensemble de départ de f.
Avec la matrice A de l'application linéaire, on peut dire que $\mathrm{Im}(A) =$
$= \{AX \mid X \in \mathbb{R}^3\}$.
D'après le théorème du rang, si E est de dimension finie (ici $E = \mathbb{R}^3$, qui est de dimension 3, finie), on a :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E).$$

Comme $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$, on a $\dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2$.
Ainsi la dimension de l'image de A est 2.

Comme $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, une base de l'image de A est, par exemple, $(1; 2; 3)$ et $(1; 3; 4)$.

Exercice 3

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array}$.

En effectuant $L_2 - 2L_1$, on obtient $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1' \\ \leftarrow L_2' \\ \leftarrow L_3' \end{array}$.

En effectuant $L_3' - L_1'$, on obtient $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1'' \\ \leftarrow L_2'' \\ \leftarrow L_3'' \end{array}$.

En effectuant $L_3'' - 2L_2''$, on obtient $A''' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La dimension de l'application linéaire, c'est-à-dire la dimension de A, A', A'' et A''', est donc 2.

Le noyau d'une application linéaire f est $Ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\} = f^{-1}\{0\}$, où E est l'ensemble de départ de f.

Avec la matrice A de l'application linéaire, on peut dire que $Ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = 0\}$.

Comme $AX = 0$ est équivalent à $A'''X = 0$, on obtient, avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 + x_5 \\ x_3 = x_2 - 2x_4 + x_5. \end{cases}$$

En fixant x_2, x_4 et x_5, on obtient des valeurs déterminées pour x_1 et x_3.

On en conclut que la dimension du noyau de A est 3.

En posant $x_2 = 1$, $x_4 = 0$ et $x_5 = 0$, on obtient $x_1 = -2$ et $x_3 = 1$.

En posant $x_2 = 0$, $x_4 = 1$ et $x_5 = 0$, on obtient $x_1 = -1$ et $x_3 = 2$.

En posant $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ et $x_5 = 1$, on obtient $x_1 = 1$ et $x_3 = 1$.

Par conséquent, une base du noyau de A est, par exemple, $(-2; 1; 1; 0; 0)$, $(-1; 0; 2; 1; 0)$ et $(1; 0; 1; 0; 1)$.

L'image d'une application linéaire f est $Im(f) = \{f(x) \mid x \in E\} = f(E)$, où E est l'ensemble de départ de f.

Avec la matrice A de l'application linéaire, on peut dire que $Im(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^5\}$.

D'après le théorème du rang, si E est de dimension finie (ici $E = \mathbb{R}^5$, qui est de dimension 5, finie), on a : $\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(E)$.

Comme $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^5) = 5$ et $\dim(Ker(f)) = \dim(Ker(A)) = 3$, on a $\dim(Im(A)) = \dim(Im(f)) = \dim(E) - \dim(Ker(f)) = 5 - 3 = 2$.

Ainsi la dimension de l'image de A est 2.

Les images des vecteurs unités de $\mathbb{R}^5$ sont $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\-3\\-3\end{pmatrix}$.

Comme la dimension de l'image de A est 2, on choisit 2 vecteurs linéairement indépendants parmi ces 5, par exemple, $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$.

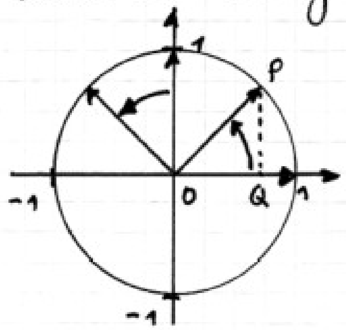
Par conséquent, une base de l'image de A est, par exemple, $(1;2;1)$ et $(2;3;0)$.

Exercice 4

Soit $f: E \to F$ une application linéaire. Les colonnes de la matrice M associée à f sont les composantes des images par f des vecteurs de la base E (voir Formulaires et Tables, p. 25).

a) La base de $\mathbb{R}^2$ est $(1;0)$ et $(0;1)$.

Par la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans le sens positif, on a :



OPQ est isocèle avec $OQ = PQ$ et $OP = 1$;

par le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OPQ, on a $OQ^2 + PQ^2 = OP^2 \Rightarrow OQ^2 + OQ^2 = 1$

$\Rightarrow 2OQ^2 = 1 \Rightarrow OQ^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow OQ = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $(= PQ)$;

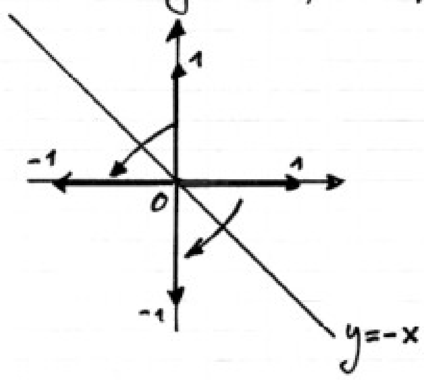
ainsi $f(1;0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

Similairement, on a $f(0;1) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ainsi la matrice est $M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

b) La base de $\mathbb{R}^2$ est $(1;0)$ et $(0;1)$.

Par la symétrie par rapport à la droite $y = -x$, on a :



$f(1;0) = (0;-1)$ et

$f(0;1) = (-1;0)$.

Ainsi la matrice est $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Les colonnes de la matrice M associée à f sont les composantes des images par f des vecteurs de la base de E (voir Formulaires et Tables, p. 25).

a) Ici $E = \mathbb{R}^4$. Une base de $\mathbb{R}^4$ est $(1;0;0;0)$, $(0;1;0;0)$, $(0;0;1;0)$ et $(0;0;0;1)$.

On a $f(1;0;0;0) = (1;1;0)$, $f(0;1;0;0) = (-2;0;1)$,
$f(0;0;1;0) = (3;0;1)$, $f(0;0;0;1) = (-4;-2;0)$.

Ainsi la matrice est $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

On a $B=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \\ \leftarrow L_4 \end{array}$.

On effectue L_2-2L_1 et L_3-2L_1. On obtient $B'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1' \\ \leftarrow L_2' \\ \leftarrow L_3' \\ \leftarrow L_4' \end{array}$.

On effectue $L_4'-L_2'$. On obtient $B''=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La dimension de l'application linéaire, c'est-à-dire la dimension de B, B' et B'', est donc 2.

Le noyau d'une application linéaire f est $Ker(f)=\{x\in E \mid f(x)=0\}=f^{-1}(\{0\})$, où E est l'ensemble de départ de f.
Avec la matrice B de l'application linéaire, on peut dire que $Ker(B)=$
$=\{X\in \mathbb{R}^4 \mid BX=0\}$.

Comme $BX=0$ est équivalent à $B''X=0$, on obtient, avec $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ \qquad\quad x_3+2x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2 \qquad -x_4=0 \\ \qquad\quad x_3+2x_4=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-x_2+x_4 \\ x_3=-2x_4 \end{cases}.$$

En fixant x_2 et x_4, on obtient des valeurs déterminées pour x_1 et x_3.
On en conclut que la dimension du noyau de B est 2.
En posant $x_2=1$ et $x_4=0$, on obtient $x_1=-1$ et $x_3=0$.
En posant $x_2=0$ et $x_4=1$, on obtient $x_1=1$ et $x_3=-2$.
Par conséquent, une base du noyau de B est, par exemple, $(-1;1;0;0)$ et $(1;0;-2;1)$.

L'image d'une application linéaire f est $Im(f)=\{f(x) \mid x\in E\}=f(E)$, où E est l'ensemble de départ de f.
Avec la matrice B de l'application linéaire, on peut dire que $Im(B)=$
$=\{Bx \mid x\in \mathbb{R}^4\}$.
D'après le théorème de rang, si E est de dimension finie (ici $E=\mathbb{R}^4$, qui est de dimension 4, finie), on a: $\dim(Ker(f))+\dim(Im(f))=\dim(E)$.
Comme $\dim(E)=\dim(\mathbb{R}^4)=4$ et $\dim(Ker(f))=\dim(Ker(B))=2$, on a
$\dim(Im(B))=\dim(Im(f))=\dim(E)-\dim(Ker(f))=4-2=2$.

Ainsi la dimension de l'image de B est 2.

Les images des vecteurs unités de $\mathbb{R}^4$ sont $\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\2\\2\end{pmatrix}$.

Comme la dimension de l'image de B est 2, on choisit 2 vecteurs linéairement indépendants parmi ces 4, par exemple, $\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}$.

Par conséquent, une base de l'image de B est, par exemple, $(1;2;2;0)$ et $(1;3;2;1)$.

$$\text{On a } C = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \\ \leftarrow L_4 \end{array}.$$

On effectue $L_2 - 2L_1$ et $L_3 - 3L_1$. On obtient $C' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & -11 & -11 & 6 & -22 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1' \\ \leftarrow L_2' \\ \leftarrow L_3' \\ \leftarrow L_4' \end{array}$.

On effectue $5L_3' - 11L_2'$ et $L_4' - L_1'$. On obtient $C'' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1'' \\ \leftarrow L_2'' \\ \leftarrow L_3'' \\ \leftarrow L_4'' \end{array}$.

On effectue $5L_4'' - 4L_2''$. On obtient $C''' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1''' \\ \leftarrow L_2''' \\ \leftarrow L_3''' \\ \leftarrow L_4''' \end{array}$.

On effectue $19 \cdot L_4''' + 4L_3'''$. On obtient $C^{IV} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La dimension de l'application linéaire, c'est-à-dire la dimension de C, C', C'', C''' et C^{IV}, est donc 3.

Le noyau d'une application linéaire f est $Ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$, où E est l'ensemble de départ de f.
Avec la matrice C de l'application linéaire, on peut dire que $Ker(C) =$
$= \{x \in \mathbb{R}^5 \mid CX = 0\}$.
Comme $CX = 0$ équivaut à $C^{IV}X = 0$, on obtient, avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 9x_5 = 0 \\ -5x_2 - 5x_3 + x_4 - 10x_5 = 0 \\ 19x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 9x_5 = 0 \\ -5x_2 - 5x_3 - 10x_5 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 9x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 \qquad + 9x_5 = 0 \\ \qquad\quad - x_3 \qquad - x_5 = 0 \\ \qquad\qquad\quad x_4 \qquad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 \qquad + 9x_5 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 \qquad = -x_5 \\ \qquad\qquad\quad x_4 \qquad = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_5 = 0 \\ x_3 = -x_5 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_2 - 4x_5 \\ x_3 = -x_5 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

En faisant varier x_2 et x_5, on obtient des valeurs déterminées pour x_1, x_3 et x_4.
On en conclut donc que la dimension du noyau de C est 2.
En posant $x_2 = 1$ et $x_5 = 0$, on obtient $x_1 = -4$, $x_3 = 0$ et $x_4 = 0$.
En posant $x_2 = 0$ et $x_5 = 1$, on obtient $x_1 = -4$, $x_3 = -1$ et $x_4 = 0$.
Par conséquent, une base du noyau de C est, par exemple, $(-4; 1; 0; 0; 0)$ et $(-4; 0; -1; 0; 1)$.

L'image d'une application linéaire f est $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\} = f(E)$, où E est l'ensemble de départ de f.
Avec la matrice C de l'application linéaire, on peut dire que $\mathrm{Im}(C) =$
$= \{Cx \mid x \in \mathbb{R}^5\}$.
D'après le théorème du rang, si E est de dimension finie (ici $E = \mathbb{R}^5$, qui est de dimension 5, finie), on a : $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$.
Comme $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^5) = 5$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(C)) = 2$, on a
$\dim(\mathrm{Im}(C)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 5 - 2 = 3$.
Ainsi la dimension de l'image de C est 3.

Les images des vecteurs unités de $\mathbb{R}^5$ sont $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\5\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\6\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}9\\8\\5\\1\end{pmatrix}$.
Comme la dimension de l'image de C est 3, on choisit 3 vecteurs linéairement indépendants parmi ces 5, par exemple $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\4\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\6\\0\end{pmatrix}$.

Par conséquent, une base de l'image de C est, par exemple, $(1; 2; 3; 1)$, $(4; 4; 2; 1)$ et $(0; 1; 6; 0)$.

Exercice 7.

On a $f(x;y;z) = (2x-2y+4z\,;\,5x-4y+7z\,;\,3x-2y+3z\,;\,x-y+2z)$.

a) Les colonnes de la matrice A_f associée à f sont les composantes des images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (voir Formulaires et Tables, p.25).

La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $(1;0;0)$, $(0;1;0)$ et $(0;0;1)$.
On a $f(1;0;0) = (2;5;3;1)$, $f(0;1;0) = (-2;-4;-2;-1)$ et $f(0;0;1) = (4;7;3;2)$.
Ainsi on a $A_f = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 5 & -4 & 7 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) On a $A_f = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 5 & -4 & 7 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \\ \leftarrow L_4 \end{matrix}$.

En effectuant $2L_2-5L_1$, $2L_3-3L_1$ et $2L_4-L_1$, on obtient $A_f' = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1' \\ \leftarrow L_2' \\ \leftarrow L_3' \\ \leftarrow L_4' \end{matrix}$.

En effectuant $L_3'-L_2'$, on obtient $A_f'' = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La dimension de l'application linéaire, c'est-à-dire la dimension de A_f, A_f' et A_f'', est donc 2.

Le noyau de l'application linéaire f est $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$, où E est l'ensemble de départ de f. Ici $E = \mathbb{R}^3$.
Avec la matrice A_f de l'application linéaire, on peut dire que $\mathrm{Ker}(A_f) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid A_f X = 0\}$.

Comme $A_f X = 0$ équivaut à $A_f' X = 0$, on obtient, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} 2x-2y+4z=0 \\ 2y-6z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=0 \\ y=2z \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2z. \end{cases}$$

En fixant z, on obtient des valeurs déterminées pour x et y.
On en conclut que la dimension du noyau de f est 1.
En posant $z=1$, on a $x=0$ et $y=2$.
Par conséquent, une base du noyau de f est, par exemple, $(0;2;1)$.

L'image d'une application linéaire f est $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\} = f(E)$, avec $E = \mathbb{R}^3$.

Avec la matrice A_f de l'application linéaire, on peut dire que $\mathrm{Im}(A_f) =$
$= \{ A_f x \mid x \in \mathbb{R}^3 \}$.

D'après le théorème de rang, comme $E = \mathbb{R}^3$ est de dimension finie), on a :
$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$.

Comme $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^3)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(A_f)) = 1$, on a
$\dim(\mathrm{Im}(A_f)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2$.

Ainsi la dimension de l'image de f est 2.

Les images des vecteurs unités de $\mathbb{R}^3$ sont $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Comme la dimension de l'image de f est 2, on choisit 2 vecteurs linéairement indépendants parmi ces 3, par exemple, $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, une base de l'image de f est, par exemple, $(2; 5; 3; 1)$ et $(2; 4; 2; 1)$.

Exercice 8

Le polynôme de Taylor de degré 2 de f autour de $x=a$ est

$$p_2(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$ (voir Formulaires et Tables, p. 89).

Ici $f(x) = \sqrt{1+\tan x}$ et $a=0$.

On a $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+\tan x}}(1+\tan x)' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+\tan x}}(1+\tan^2(x)) = \dfrac{1+\tan^2(x)}{2\sqrt{1+\tan x}}$ et

$f''(x) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, où $u = 1+\tan^2(x)$, $v = 2\sqrt{1+\tan x}$, $u' = 2\tan x\,(1+\tan^2(x))$ et

$v' = \dfrac{2}{2\sqrt{1+\tan x}}(1+\tan x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}}(1+\tan^2(x)) = \dfrac{1+\tan^2(x)}{\sqrt{1+\tan x}}$.

Ainsi
$$f''(x) = \frac{2\tan x(1+\tan^2(x))\cdot 2\sqrt{1+\tan x} - (1+\tan^2(x))\cdot\dfrac{1+\tan^2(x)}{\sqrt{1+\tan x}}}{(2\sqrt{1+\tan x})^2} =$$

$$= \frac{(1+\tan^2(x))}{\sqrt{1+\tan x}}\cdot\frac{4\tan x\,(1+\tan x) - (1+\tan^2(x))}{4(1+\tan(x))} =$$

$$= \frac{(1+\tan^2 x))(4\tan x + 4\tan^2 x - 1 - \tan^2 x))}{4\sqrt{1+\tan x}\,(1+\tan x)} =$$

$$= \frac{(1+\tan^2 x)(3\tan^2 x + 4\tan x - 1)}{4\sqrt{1+\tan x}\,(1+\tan x)}.$$

En $x = a = 0$, on a $\tan x = 0$.

Ainsi $f(0) = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$, $f'(0) = \dfrac{1+0^2}{2\sqrt{1+0}} = \dfrac{1}{2}$ et

$$f''(0) = \frac{(1+0^2)(3\cdot 0^2 + 4.0 - 1)}{4\sqrt{1+0}\,(1+0)} = \frac{1\cdot(-1)}{4.1.1} = -\frac{1}{4}.$$

Par conséquent, on a $p_2(x) = 1 + \dfrac{1/2}{1}(x-0) + \dfrac{-1/4}{2}(x-0)^2 =$
$= 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$.

Le polynôme de Taylor de degré 2 de f autour de l'origine est donc

$$1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$