Série 12
CORRIGÉ

Exercice 1

Les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ sont les solution de l'équation caractéristique $\det(A-\lambda I)=0$, où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice unité.

On a $A-\lambda I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$.

Ainsi $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda) - 2\cdot(-1) = -3\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 =$
$= (\lambda-1)(\lambda-2)$.

On obtient $\det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i de A est donné par $E_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(A-\lambda_i I)$, où $\operatorname{Ker}(M) = \{X \mid MX = 0\}$.

$\lambda_1 = 1$: on a $A-\lambda_1 I = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $(A-\lambda_1 I)X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donne

$\begin{cases} -x-y=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow y = -x$; ainsi $\operatorname{Ker}(A-\lambda_1 I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| y = -x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \right\}$;

par conséquent, $E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \right\}$ = sous-espace engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 2$: on a $A-\lambda_2 I = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $(A-\lambda_2 I)X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donne

$\begin{cases} -2x-y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \Rightarrow y = -2x$; ainsi $\operatorname{Ker}(A-\lambda_2 I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| y = -2x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} \right\}$;

par conséquent, $E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} \right\}$ = sous-espace engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Les valeurs propres de $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(B-\lambda I)=0$, où $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice unité.

On a $B-\lambda I=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$.

Ainsi $\det(B-\lambda I)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4-\lambda & 1 \end{vmatrix}=$

$=(3-\lambda)\cdot\big((4-\lambda)(3-\lambda)-2\big)-\big(2(3-\lambda)-2\big)+2-(4-\lambda)=$

$=(3-\lambda)^2\cdot(4-\lambda)-2(3-\lambda)-2(3-\lambda)+2+2-4+\lambda=$

$=(3-\lambda)^2\cdot(4-\lambda)-4(3-\lambda)+\lambda=(9-6\lambda+\lambda^2)(4-\lambda)-12+4\lambda+\lambda=$

$=36-9\lambda-24\lambda+6\lambda^2+4\lambda^2-\lambda^3-12+5\lambda=-\lambda^3+10\lambda^2-28\lambda+24.$

Par conséquent, $\det(B-\lambda I)=0$ nous donne l'équation du 3e degré $-\lambda^3+10\lambda^2-28\lambda+28=0$, que l'on peut écrire $\lambda^3-10\lambda^2+28\lambda-24=0$.

On remarque que $\lambda=2$ est solution de cette équation (on a $2^3-10\cdot2^2+28\cdot2-24=$ $=8-40+56-24=0$).

On divise alors $\lambda^3-10\lambda^2+28\lambda-24$ par $\lambda-2$

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3-10\lambda^2+28\lambda-24 & \lambda-2 \\ \cline{2-2} -(\lambda^3-2\lambda^2) \qquad\qquad & \lambda^2-8\lambda+12 \\ \cline{1-1} -8\lambda^2+28\lambda-24 & \\ -(-8\lambda^2+16\lambda) \qquad & \\ \cline{1-1} 12\lambda-24 & \\ -(12\lambda-24) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

On obtient ainsi $\lambda^3-10\lambda^2+28\lambda-24=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+12)$.

Comme $\lambda^2-8\lambda+12=(\lambda-2)(\lambda-6)$, on a donc $\lambda^3-10\lambda^2+28\lambda-24=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$.

Les solutions de $\lambda^3-10\lambda^2+28\lambda-24=0$ sont par conséquent $\lambda_1=2$ et $\lambda_2=6$.

Ainsi les valeurs propres de B sont $\lambda_1=2$ et $\lambda_2=6$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i de B est donné par $E_{\lambda_i}=\mathrm{Ker}(B-\lambda_i I)$, où $\mathrm{Ker}(M)=\{X \mid MX=0\}$.

$\lambda_1=2$: on a $B-\lambda_1 I=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $(B-\lambda_1 I)X=0$ avec $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donne

$x+2y+z=0 \Rightarrow z=-x-2y$; ainsi $\mathrm{Ker}(B-\lambda_1 I)=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, z=-x-2y\right\}=$

$=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-2y \end{pmatrix}\right\}$; par conséquent, $E_{\lambda_1}=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-2y \end{pmatrix}\right\}$ = sous-espace engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ par exemple.

$\lambda_2 = 6$: on a $B-\lambda_2 I = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; $(B-\lambda_2 I)X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donne

$\begin{cases} -3x+2y+z=0 & ① \\ x-2y+z=0 & ② \\ x+2y-3z=0 & ③ \end{cases}$; en effectuant ①+② et ②+③, on obtient

$$\begin{cases} -3x+2y+z=0 \\ -2x \quad +2z=0 \\ 2x \quad -2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+2y+z=0 \\ x=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+2y+x=0 \\ x=z \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} -2x+2y=0 \\ x=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ z=x \end{cases}$; ainsi $\mathrm{Ker}(B-\lambda_2 I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, y=x \text{ et } z=x \right\} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \right\}$; par conséquent, $E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \right\}$ = sous-espace engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une matrice est diagonalisable uniquement si la dimension de chaque sous-espace propre E_{λ_i} est égale à la multiplicité de la valeur propre λ_i.

Pour $\lambda_1 = 2$: multiplicité $= 2$ (puisque $\lambda = 2$ est une racine double de $(\lambda-2)^2(\lambda-6)=0$) ;
dimension de $E_{\lambda_1} = 2$ (engendré par 2 vecteurs).

Pour $\lambda_2 = 6$: multiplicité $= 1$;
dimension de $E_{\lambda_2} = 1$ (engendré par 1 vecteur).

On en conclut que B est diagonalisable.

Exercice 3

Les valeurs propres de $C=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&0&1\\2&4&-2\end{pmatrix}$ sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(C-\lambda I)=0$, où $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ est la matrice unité.

On a $C-\lambda I=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&0&1\\2&4&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\lambda&2&-1\\1&-\lambda&1\\2&4&-2-\lambda\end{pmatrix}$.

Ainsi $\det(C-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&-1\\1&-\lambda&1\\2&4&-2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}-\lambda&1\\4&-2-\lambda\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\4&-2-\lambda\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\-\lambda&1\end{vmatrix}=$

$$=(1-\lambda)\cdot\left(-\lambda(-2-\lambda)-4\right)-\left(2(-2-\lambda)+4\right)+2\cdot(2-\lambda)=$$
$$=-\lambda(1-\lambda)(-2-\lambda)-4(1-\lambda)-2(-2-\lambda)-4+2(2-\lambda)=$$
$$=\lambda(1-\lambda)(2+\lambda)-4(1-\lambda)+2(2+\lambda)-4+2(2-\lambda)=$$
$$=(\lambda-\lambda^2)(2+\lambda)-4+4\lambda+4+2\lambda-4+4-2\lambda=2\lambda+\lambda^2-2\lambda^2-\lambda^3+4\lambda=$$
$$=-\lambda^3-\lambda^2+6\lambda=-\lambda(\lambda^2+\lambda-6)=-\lambda(\lambda+3)(\lambda-2).$$

Par conséquent $\det(C-\lambda I)=0 \Rightarrow -\lambda(\lambda+3)(\lambda-2)=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=-3$ et $\lambda_3=2$.

Ainsi les valeurs propres de C sont $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-3$ et $\lambda_3=2$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i de C est donné par $E_{\lambda_i}=\mathrm{Ker}(C-\lambda_i I)$, où $\mathrm{Ker}(M)=\{X \mid MX=0\}$.

$\lambda_1=0$: on a $C-\lambda_1 I=C=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&0&1\\2&4&-2\end{pmatrix}$; $(C-\lambda_1 I)X=0$ avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ donne

$$\begin{cases}x+2y-z=0\\x+z=0\\2x+4y-2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2y-z=0\\z=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2y+x=0\\z=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+2y=0\\z=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-x\\z=-x\end{cases};$$

ainsi $\mathrm{Ker}(C-\lambda_1 I)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle| y=-x \text{ et } z=-x\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\-x\\-x\end{pmatrix}\right\}$; par conséquent,

$E_{\lambda_1}=\left\{\begin{pmatrix}x\\-x\\-x\end{pmatrix}\right\}$ = sous-espace engendré par le vecteur $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

$\lambda_2=-3$: on a $C-\lambda_2 I=\begin{pmatrix}4&2&-1\\1&3&1\\2&4&1\end{pmatrix}$; $(C-\lambda_2 I)X=0$ avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ donne

$$\begin{cases}4x+2y-z=0 & (1)\\x+3y+z=0 & (2)\\2x+4y+z=0 & (3)\end{cases}$$; en effectuant (1)+(2) et (1)+(3), on obtient

$$\begin{cases}4x+2y-z=0\\5x+5y=0\\6x+6y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x+2y-z=0\\x+y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x+2y-z=0\\y=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x-2x-z=0\\y=-x\end{cases}$$

$\Rightarrow\begin{cases}2x-z=0\\y=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=2x\\y=-x\end{cases}$; ainsi $\mathrm{Ker}(C-\lambda_2 I)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle| y=-x \text{ et } z=2x\right\}=$

$=\left\{\begin{pmatrix}x\\-x\\2x\end{pmatrix}\right\}$; par conséquent, $E_{\lambda_2}=\left\{\begin{pmatrix}x\\-x\\2x\end{pmatrix}\right\}$ = sous-espace engendré par le vecteur $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

$\lambda_3 = 2$: on a $C - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$; $(C - \lambda_3 I)X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donne

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x + 4y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 & (1) \\ 2x + 4y - 4z = 0 & (2) \end{cases}$$; en effectuant $2 \cdot (1) + (2)$, on obtient

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 4x - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ z = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 2x = 0 \\ z = 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ z = 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ z = 2x \end{cases}$$; ainsi $\text{Ker}(C - \lambda_1 I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, y = \frac{3}{2}x \text{ et } z = 2x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{2}x \\ 2x \end{pmatrix} \right\} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} 2x \\ 3x \\ 4x \end{pmatrix} \right\} =$ sous-espace engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Une matrice est diagonalisable uniquement si la dimension de chaque sous-espace propre E_{λ_i} est égale à la multiplicité de la valeur propre λ_i.

Pour $\lambda_1 = 0$: multiplicité $= 1$;
dimension de $E_{\lambda_1} = 1$ (engendré par un vecteur).

Pour $\lambda_2 = -3$: multiplicité $= 1$;
dimension de $E_{\lambda_2} = 1$ (engendré par un vecteur).

Pour $\lambda_3 = 2$: multiplicité $= 1$;
dimension de $E_{\lambda_3} = 1$ (engendré par un vecteur).

On en conclut que C est diagonalisable.

Exercice 4

Les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 6 \\ 3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(A - \lambda I) = 0$, où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice unité.

On a $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 6 \\ 3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-\lambda & -6 & 6 \\ 3 & -4-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$.

Ainsi $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & 6 \\ 3 & -4-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -4-\lambda & 6 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ -4-\lambda & 6 \end{vmatrix} =$

$= (5-\lambda) \cdot (-4-\lambda) \cdot (2-\lambda) - 3 \cdot (-6)(2-\lambda) = (2-\lambda)\big((5-\lambda)(-4-\lambda) + 18\big) =$

$= (2-\lambda)(-20 - 5\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 18) = (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2) =$

$= -(\lambda+1)(\lambda-2)^2$

Par conséquent, $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow -(\lambda+1)(\lambda-2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$ (multiplicité 1) et $\lambda_2 = 2$ (multiplicité 2).

Ainsi les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i de A est donné par $E_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)$, où $\operatorname{Ker}(M) = \{X \mid MX = 0\}$.

$\lambda_1 = -1$: on a $A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 6 \\ 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $(A - \lambda_1 I)X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donne

$$\begin{cases} 6x - 6y + 6z = 0 \\ 3x - 3y + 6z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 6y + 6z = 0 \\ 3x - 3y + 6z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 6y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases};$$

ainsi $\operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, y = x \text{ et } z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$; par conséquent,

$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$ sous-espace engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 2$: on a $A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $(A - \lambda_2 I)X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donne

$$\begin{cases} 3x - 6y + 6z = 0 \\ 3x - 6y + 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow x - 2y + 2z = 0 \Rightarrow x = 2y - 2z \text{ ; ainsi}$$

$\operatorname{Ker}(A - \lambda_2 I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x = 2y - 2z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$; par conséquent,

$E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 2y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} =$ sous-espace engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par exemple.

Une matrice est diagonalisable uniquement si la dimension de chaque sous-espace propre E_{λ_i} est égale à la multiplicité de la valeur propre λ_i.

Pour $\lambda_1 = -1$: multiplicité $= 1$;
dimension de $E_{\lambda_1} = 1$ (engendré par 1 vecteur).

Pour $\lambda_2 = 2$: multiplicité $= 2$;
dimension de $E_{\lambda_2} = 2$ (engendré par 2 vecteurs).

On en conclut que A est diagonalisable.

Exercice 5

On a $f(x) = (1+x^2)\arctan x = u \cdot v$ avec $u = 1+x^2$ et $v = \arctan x$.
Ainsi $u' = 2x$, $v' = \frac{1}{1+x^2}$ (voir Formulaires et Tables p.75) et

$$f'(x) = u'v + uv' = 2x \cdot \arctan x + (1+x^2)\frac{1}{1+x^2} = 2x \cdot \arctan x + 1.$$

Similairement, on a $f''(x) = 2 \cdot \arctan x + 2x \cdot \frac{1}{1+x^2} = 2\arctan x + \frac{2x}{1+x^2}$.

La seconde dérivée est donc $f''(x) = 2\arctan x + \frac{2x}{1+x^2}$.

Exercice 6

A calculer: $\displaystyle\int \frac{\ln(\tan x)}{\sin x \cos x}\, dx$.

On fait le changement de variables $u = \tan x$.
On a alors $u' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)$ (voir Formulaires et Tables, p. 75).
Ainsi $u' = 1+u^2$, d'où $du = (1+u^2)\,dx$ et $dx = \frac{1}{1+u^2}\,du$.
En outre, comme $u = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, on a $u\cos^2 x = \sin x \cos x$ et $\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{u\cos^2 x}$.
Comme $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x) = 1+u^2$, on obtient $\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{u}(1+u^2) = \frac{1+u^2}{u}$.
Ainsi $\displaystyle\int \frac{\ln(\tan x)}{\sin x \cos x}\,dx = \int \ln(u) \cdot \frac{1+u^2}{u} \cdot \frac{1}{1+u^2}\,du = \int \ln(u) \cdot \frac{1}{u}\,du$.

On va calculer cette dernière intégrale par parties: on pose $f = \ln(u)$ et $g' = \frac{1}{u}$.
On a alors $f' = \frac{1}{u}$ et $g = \ln(u)$.
Ainsi $\displaystyle\int \ln(u) \cdot \frac{1}{u}\,du = \int f g'\,du = fg - \int f' g\,du = \ln^2(u) - \int \ln(u) \cdot \frac{1}{u}\,du$.

Par addition de $\displaystyle\int \ln(u) \cdot \frac{1}{u}\,du$ de part et d'autre, on trouve $2\displaystyle\int \ln(u) \cdot \frac{1}{u} = \ln^2(u)$ et,
donc, $\displaystyle\int \ln(u) \cdot \frac{1}{u}\,du = \frac{\ln^2(u)}{2} + c$ $(c \in \mathbb{R})$.
Ainsi $\displaystyle\int \frac{\ln(\tan x)}{\sin x \cos x}\,dx = \int \ln(u) \cdot \frac{1}{u}\,du = \frac{\ln^2(u)}{2} + c = \frac{\ln^2(\tan x)}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 7

On doit calculer $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

On a $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

On pose $u = \arcsin x$ et $v' = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. On a alors $u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (Formulaires et Tables, p. 75) et $v = 2\sqrt{1+x}$.

Ainsi $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx = \arcsin x \cdot 2\sqrt{1+x} - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 2\sqrt{1+x}\,dx =$

$= 2\sqrt{1+x} \cdot \arcsin x - 2\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\sqrt{1+x} \cdot \arcsin x - 2\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x^2}}\,dx =$

$= 2\sqrt{1+x} \cdot \arcsin x - 2\int \sqrt{\frac{1+x}{(1+x)(1-x)}}\,dx = 2\sqrt{1+x} \cdot \arcsin x - 2\int \sqrt{\frac{1}{1-x}}\,dx =$

$= 2\sqrt{1+x} \cdot \arcsin x - 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = 2\sqrt{1+x} \cdot \arcsin x - 2\left(-2\sqrt{1-x}\right) + C$

$= 2\sqrt{1+x} \cdot \arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C.$