Série 13

CORRIGE

Exerice 1

On a $y(x) = x + \frac{1}{x}$.

Ainsi $y'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ et $y''(x) = (-x^{-2})' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$.

On a alors $y''(x) + \frac{y'(x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2} = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x^2}\left(x + \frac{1}{x}\right) =$

$= \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} = 0.$

Ainsi $y(x) = x + \frac{1}{x}$ est bien solution de $y''(x) + \frac{y'(x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2} = 0$.

Exercice 2

On doit résoudre $(1+x^2)y'(x) = \sqrt{y(x)}$.

On peut écrire cette équation $\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}} = \frac{1}{1+x^2}$.

Une primitive de $\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}}$ est $2\sqrt{y(x)}$ (puisque $\left(2\sqrt{y(x)}\right)' = 2\frac{1}{2\sqrt{y(x)}}y'(x) = \frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}}$).

Une primitive de $\frac{1}{1+x^2}$ est $\arctan(x)$ (voir Formulaires et Tables, p. 78).

Ainsi $\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + c,\ c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 2\sqrt{y(x)} = \arctan(x) + c,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow y(x) = \left(\frac{\arctan(x)+c}{2}\right)^2,\ c \in \mathbb{R}.$

Par conséquent, la solution générale de $(1+x^2)y'(x) = \sqrt{y(x)}$ est $y(x) = \left(\frac{\arctan(x)+c}{2}\right)^2,\ c \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

On doit résoudre $y'(x)\sin^2 x + y(x) = 0$ avec $x \in]0;\pi[$ (si $x \in]0;\pi[$, on a $\sin x > 0$).
Cette équation peut s'écrire $\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Une primitive de $\frac{y'(x)}{y(x)}$ est $\ln|y(x)|$ (puisque $(\ln|y(x)|)' = \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x)$).

Une primitive de $-\frac{1}{\sin^2 x}$ est $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ (voir Formulaires et Tables, p. 78).

Ainsi $\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = -\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx + c,\ c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \ln|y(x)| = \cot x + c \Rightarrow |y(x)| = e^{\cot x + c},\ c \in \mathbb{R}$.

Comme $e^x > 0$ pour toute valeur de x, on en conclut que la solution générale de $y'(x)\sin^2 x + y(x) = 0$ est $y(x) = \pm e^{\cot x + c},\ c \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

On a $y(x) = e^{-2x} + x^2 + 1$.
Ainsi $y'(x) = -2e^{-2x} + 2x$, $y''(x) = 4e^{-2x} + 2$ et $y'''(x) = -8e^{-2x}$.

On a alors $y'''(x) + \frac{3}{2}y''(x) - xy'(x) + 2y(x) =$

$= -8e^{-2x} + \frac{3}{2}(4e^{-2x} + 2) - x(-2e^{-2x} + 2x) + 2(e^{-2x} + x^2 + 1) =$

$= -8e^{-2x} + 6e^{-2x} + 3 + 2xe^{-2x} - 2x^2 + 2e^{-2x} + 2x^2 + 2 =$

$= 2xe^{-2x} + 5$.

Ainsi $y(x) = e^{-2x} + x^2 + 1$ est bien solution de $y'''(x) + \frac{3}{2}y''(x) - xy'(x) + 2y(x) = 2xe^{-2x} + 5$.

Exercice 5

On doit résoudre $3y'(x) = \dfrac{4x^3}{y^2(x) - 2y(x) + 1}$.

On remarque tout d'abord que cette équation peut s'écrire $3y'(x) = \dfrac{4x^3}{(y(x)-1)^2}$ et, donc, $3y'(x)(y(x)-1)^2 = 4x^3$.

Une primitive de $3y'(x)(y(x)-1)^2$ est $(y(x)-1)^3$.

Une primitive de $4x^3$ est x^4.

Ainsi $3y'(x)(y(x)-1)^2 = 4x^3 \Rightarrow \int 3y'(x)(y(x)-1)^2\,dx = \int 4x^3\,dx + c,\ c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (y(x)-1)^3 = x^4 + c \Rightarrow y(x) - 1 = \sqrt[3]{x^4+c},\ c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y(x) = 1 + \sqrt[3]{x^4+c},\ c \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, la solution générale de $3y'(x) = \dfrac{4x^3}{y^2(x) - 2y(x) + 1}$ est $y(x) = 1 + \sqrt[3]{x^4+c},\ c \in \mathbb{R}$.

Exercice 6

On doit résoudre $\dfrac{y'(x)}{6x^2} = \sqrt{1+y(x)}$ avec $x > 0$.

On peut écrire cette équation $\dfrac{y'(x)}{2\sqrt{1+y(x)}} = 3x^2$.

Une primitive de $\dfrac{y'(x)}{2\sqrt{1+y(x)}}$ est $\sqrt{1+y(x)}$.

Une primitive de $3x^2$ est x^3.

Ainsi $\dfrac{y'(x)}{2\sqrt{1+y(x)}} = 3x^2 \Rightarrow \int \dfrac{y'(x)}{2\sqrt{1+y(x)}}\,dx = \int 3x^2\,dx + c,\ c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \sqrt{1+y(x)} = x^3 + c \Rightarrow 1 + y(x) = (x^3+c)^2 \Rightarrow y(x) = (x^3+c)^2 + 1,\ c \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, la solution générale de $\dfrac{y'(x)}{6x^2} = \sqrt{1+y(x)}$ est $y(x) = (x^3+c)^2 + 1,\ c \in \mathbb{R}$.

Exercice 7

On doit résoudre $y'(x) + 2xy(x) = 0$.

On peut écrire cette équation $\dfrac{y'(x)}{y(x)} = -2x$.

Une primitive de $\dfrac{y'(x)}{y(x)}$ est $\ln|y(x)|$.

Une primitive de $-2x$ est $-\frac{2}{3}x^3$.

Ainsi $\dfrac{y'(x)}{y(x)} = -2x \Rightarrow \displaystyle\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int (-2x)\,dx + c,\ c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \ln|y(x)| = -\frac{2}{3}x^3 + c \Rightarrow |y(x)| = e^{-\frac{2}{3}x^3+c},\ c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y(x) = \pm e^{-\frac{2}{3}x^3+c},\ c \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, la solution générale de $y'(x) + 2xy(x) = 0$ est $y(x) = \pm e^{-\frac{2}{3}x^3+c},\ c \in \mathbb{R}$.

Exercice 8

On doit résoudre $xy'(x) + y(x) = 0$, avec $x > 0$.

On peut écrire cette équation $\dfrac{y'(x)}{y(x)} = -\dfrac{1}{x}$.

Une primitive de $\dfrac{y'(x)}{y(x)}$ est $\ln|y(x)|$.

Une primitive de $-\frac{1}{x}$ est $-\ln|x| = -\ln(x)$ puisque $x > 0$.

Ainsi $\dfrac{y'(x)}{y(x)} = -\dfrac{1}{x} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x}\right)dx + c,\ c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \ln|y(x)| = -\ln(x) + c = -\ln(x) + \ln(e^c) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(e^c) = \ln\left(\frac{e^c}{x}\right),\ c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |y(x)| = \dfrac{e^c}{x},\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow y(x) = \pm \dfrac{e^c}{x}$.

Par conséquent, la solution générale de $xy'(x) + y(x) = 0$ avec $x > 0$ est $y(x) = \pm \dfrac{e^c}{x},\ c \in \mathbb{R}$.

Exercice 9

On doit résoudre $y'(x)=2x(y(x))^2$.

Cette équation peut s'écrire $\frac{y'(x)}{(y(x))^2}=2x$.

Une primitive de $\frac{y'(x)}{(y(x))^2}$ est $-\frac{1}{y(x)}$.

Une primitive de $2x$ est x^2.

Ainsi $\frac{y'(x)}{(y(x))^2}=2x \Rightarrow \int\frac{y'(x)}{(y(x))^2}\,dx=\int 2x\,dx+c,\ c\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow -\frac{1}{y(x)}=x^2+c \Rightarrow y(x)=-\frac{1}{x^2+c}$, $c\in\mathbb{R}$.

On doit avoir $y(1)=-1$.

On a $y(1)=-\frac{1}{1^2+c}=-\frac{1}{1+c}$.

Ainsi $y(1)=-1 \Rightarrow -\frac{1}{1+c}=-1 \Rightarrow \frac{1}{1+c}=1 \Rightarrow 1=1+c \Rightarrow c=0$.

La solution cherchée est donc $y(x)=-\frac{1}{x^2}$.

Exercice 10

Les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(A-\lambda I) = 0$, où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice unité.

On a $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$.

Ainsi $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda) - 2\cdot 4 = -(1+\lambda)(1-\lambda) - 8 =$
$= -(1-\lambda^2) - 8 = -1 + \lambda^2 - 8 = \lambda^2 - 9.$

On obtient $\det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 9 \Rightarrow \lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -3$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i de A est donné par $E_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)$, où $\operatorname{Ker}(M) = \{ X \mid MX = 0 \}$.

$\lambda_1 = 3$: on a $A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; $(A-\lambda_1 I)X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donne

$\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ 2y - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$; ainsi $\operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x = y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \right\}$;

par conséquent $E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \right\}$ = sous-espace engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = -3$: on a $A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $(A-\lambda_2 I)X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donne

$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2y$; ainsi $\operatorname{Ker}(A - \lambda_2 I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x = -2y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} \right\}$;

par conséquent $E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} \right\}$ = sous-espace engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.