Série 14
CORRIGE

Exercice 1

Par résoudre $y'(x) + 2xy(x) = x$, on utilise la technique décrite à la page 84 de Formulaires et Tables (il existe d'autres techniques).
La solution générale de l'équation est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre. Une solution particulière est donnée par $p(x) = c(x)e^{-F(x)}$, où F est une primitive du coefficient f de y et $c(x)$ est à déterminer en remplaçant y par p dans l'équation différentielle donnée.

Ici $f(x) = 2x$, et, donc $F(x) = x^2$ est une primitive de $f(x)$.
On pose ainsi $p(x) = c(x)e^{-x^2}$.
On a $p'(x) = c'(x)e^{-x^2} - 2xc(x)e^{-x^2}$.
Par substitution dans $y'(x) + 2xy(x) = x$, on obtient :

$$c'(x)e^{-x^2} - 2xc(x)e^{-x^2} + 2xc(x)e^{-x^2} = x \Rightarrow c'(x)e^{-x^2} = x$$

$$\Rightarrow c'(x) = xe^{x^2} \rightarrow c(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$$ (on ne met pas de constante additive, puisqu'on cherche une solution particulière).
Ainsi, une solution particulière est $p(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} \cdot e^{-x^2} = \frac{1}{2}$.

Cherchons maintenant la solution générale de l'équation sans second membre :
$y'(x) + 2xy(x) = 0$.
Cette équation peut s'écrire : $y'(x) = 2xy(x) \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = 2x \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = \int 2x\,dx + c$, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln|y(x)| = x^2 + c \Rightarrow |y(x)| = e^{x^2+c} \Rightarrow |y(x)| = e^c \cdot e^{x^2}$, $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |y(x)| = ke^{x^2}$, $k \in \mathbb{R}_+ \rightarrow y(x) = \pm ke^{x^2}$, $k \in \mathbb{R}_+ \rightarrow y(x) = \ell e^{x^2}$, $\ell \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, la solution générale de $y'(x) + 2xy(x) = x$ est

$$y(x) = \frac{1}{2} + \ell e^{x^2}, \quad \ell \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2

On doit résoudre $y'(x) = \frac{y(x)}{2x} + x^2$, avec $x > 0$, et trouver la solution qui correspond à la condition initiale $y(1) = -1$.

L'équation peut s'écrire $y'(x) - \frac{1}{2x} y(x) = x^2$, $x > 0$.

Pour la résoudre, on utilise la technique décrite à la page 84 de Formulaires et Tables (il existe d'autres techniques).

La solution générale de l'équation (sans tenir compte de la condition initiale) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre. Une solution particulière est donnée par $p(x) = c(x) e^{-F(x)}$, où F est une primitive du coefficient f de y et $c(x)$ est à déterminer en remplaçant y par p dans l'équation différentielle donnée.

Ici $f(x) = -\frac{1}{2x}$, et, donc, $F(x) = -\frac{1}{2} \ln|x|$. Comme $x > 0$, on peut écrire $F(x) = -\frac{1}{2} \ln(x) = -\ln(x^{1/2}) = -\ln(\sqrt{x})$.

On pose ainsi $p(x) = c(x) e^{-(-\ln(\sqrt{x}))} = c(x) e^{\ln(\sqrt{x})} = c(x) \cdot \sqrt{x}$.

On a $p'(x) = c'(x) \cdot \sqrt{x} + c(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Par substitution dans $y'(x) - \frac{1}{2x} y(x) = x^2$, on obtient :

$$c'(x) \cdot \sqrt{x} + c(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} c(x) \cdot \sqrt{x} = x^2$$

$$\Rightarrow c'(x) \cdot \sqrt{x} + c(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - c(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = x^2 \Rightarrow c'(x)\sqrt{x} = x^2$$

$$\Rightarrow c'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}} \Rightarrow c'(x) = x^{3/2} \Rightarrow c(x) = \frac{x^{5/2}}{5/2}$$

$\Rightarrow c(x) = \frac{2}{5} x^{5/2} = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x}$ $(x > 0)$ (on ne met pas de constante additive, puisqu'on cherche une solution particulière).

Ainsi, une solution particulière est $p(x) = c(x) \cdot \sqrt{x} = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = \frac{2}{5} x^2 \cdot x = \frac{2}{5} x^3$.

Cherchons maintenant la solution générale de l'équation sans second membre :

$$y'(x) - \frac{1}{2x} y(x) = 0.$$

Cette équation peut s'écrire : $y'(x) = \frac{1}{2x} y(x) \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{2x} \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int \frac{1}{2x} dx + c$,

$c \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln|y(x)| = \frac{1}{2} \ln|x| + c$, avec $x > 0 \Rightarrow \ln|y(x)| = \frac{1}{2} \ln(x) + c$

$\Rightarrow \ln|y(x)| = \ln(\sqrt{x}) + c \Rightarrow |y(x)| = e^{\ln(\sqrt{x}) + c} \Rightarrow |y(x)| = e^c e^{\ln(\sqrt{x})}$, $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |y(x)| = k\sqrt{x}$, $k \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow y(x) = \pm k\sqrt{x}$, $k \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow y(x) = \ell\sqrt{x}$, $\ell \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, la solution générale de $y'(x) = \frac{y(x)}{2x} + x^2$ est $y(x) = \frac{2}{5} x^3 + \ell\sqrt{x}$, $\ell \in \mathbb{R}$.

Pour trouver la solution qui correspond à $y(1) = -1$, on détermine le ℓ tel que $y(1) = -1$.

On a $y(1) = \frac{2}{5} \cdot 1^3 + \ell\sqrt{1} = \frac{2}{5} + \ell$. Ainsi $y(1) = -1 \Rightarrow \frac{2}{5} + \ell = -1 \Rightarrow \ell = -1 - \frac{2}{5} = -\frac{7}{5}$.

Ainsi la solution de $y'(x) = \frac{y(x)}{2x} + x^2$, avec $x > 0$ et $y(1) = 1$, est

$$y(x) = \frac{2}{5} x^3 - \frac{7}{5} \sqrt{x}.$$

Exercice 3

a) On doit résoudre $y'(x)+y(x)\cos x=0$.

On peut écrire cette équation : $y'(x)=-y(x)\cos x \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)}=-\cos x$.

On a alors $\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx=\int(-\cos x)dx+c,\ c\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \ln|y(x)|=-\sin x+c,\ c\in\mathbb{R} \Rightarrow |y(x)|=e^{-\sin x+c},\ c\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow |y(x)|=e^{c}e^{-\sin x},\ c\in\mathbb{R} \Rightarrow |y(x)|=ke^{-\sin x},\ k\in\mathbb{R}_+$

$\Rightarrow y(x)=\pm ke^{-\sin x},\ k\in\mathbb{R}_+ \Rightarrow y(x)=le^{-\sin x},\ l\in\mathbb{R}.$

Ainsi la solution générale de $y'(x)+y(x)\cos(x)=0$ est $y(x)=le^{-\sin x},\ l\in\mathbb{R}$.

b) Pour résoudre $y'(x)+y(x)\cos x=\sin 2x+\cos x$, on utilise la technique décrite à la page 84 de Formulaires et Tables (il existe d'autres techniques).

La solution générale de l'équation est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre (voir a)). Une solution particulière est donnée par $p(x)=c(x)e^{-F(x)}$, où F est une primitive du coefficient f de y et $c(x)$ est à déterminer en remplaçant y par p dans l'équation différentielle donnée.

Ici $f(x)=\cos x$, et, donc $F(x)=\sin x$ est primitive de $f(x)$.

On pose ainsi $p(x)=c(x)e^{-\sin x}$.

On a $p'(x)=c'(x)e^{-\sin x}+c(x)e^{-\sin x}(-\cos x)=c'(x)e^{-\sin x}-\cos x\cdot c(x)e^{-\sin x}$.

Par substitution dans $y'(x)+y(x)\cos x=\sin 2x+\cos x$, on obtient :

$c'(x)e^{-\sin x}-\cos x\cdot c(x)e^{-\sin x}+c(x)e^{-\sin x}\cos x=\sin 2x+\cos x$

$\Rightarrow c'(x)e^{-\sin x}=\sin 2x+\cos x \Rightarrow c'(x)=(\sin 2x+\cos x)e^{\sin x}$

$\Rightarrow c(x)=\int(\sin 2x+\cos x)e^{\sin x}dx$ (on ne met pas de constante additive, puisqu'on cherche une solution particulière).

Ainsi, on a $c(x)=\int \sin 2x\, e^{\sin x}dx+\int \cos x\, e^{\sin x}dx$.

On a clairement $\int \cos x\, e^{\sin x}dx=e^{\sin x}$ (puisque $(e^{\sin x})'=e^{\sin x}\cdot\cos x$).

En outre, comme $\sin 2x=2\sin x\cos x$ (Formulaires et Tables, p. 29), on a $\int \sin 2x\, e^{\sin x}dx=2\int \sin x\cos x\, e^{\sin x}dx$.

On va procéder par la méthode d'intégration par parties : en posant $u=\sin x$ et $v'=\cos x\, e^{\sin x}$, on a $u'=\cos x$ et $v=e^{\sin x}$.

Ainsi $\int \sin 2x\, e^{\sin x}dx=2\int uv'dx=2\left(uv-\int u'v\,dx\right)=$

$=2\left(\sin x\, e^{\sin x}-\int \cos x\, e^{\sin x}dx\right)=2\left(\sin x\, e^{\sin x}-e^{\sin x}\right).$

Par conséquent, on obtient $c(x) = \int \sin 2x\, e^{\sin x} dx + \int \cos x\, e^{\sin x} dx =$
$= e^{\sin x} + 2(\sin x\, e^{\sin x} - e^{\sin x}) = e^{\sin x} + 2\sin x\, e^{\sin x} - 2e^{\sin x} =$
$= 2\sin x\, e^{\sin x} - e^{\sin x}$.

Ainsi, une solution particulière est $p(x) = (2\sin x\, e^{\sin x} - e^{\sin x}) \cdot e^{-\sin x} =$
$= 2\sin x - 1$.

D'après a), la solution générale de l'équation sans second membre $y'(x) + y(x)\cos x = 0$ est $y(x) = \ell e^{-\sin x}$, $\ell \in \mathbb{R}$.

On en conclut que la solution générale de $y'(x) + y(x)\cos x = \sin 2x + \cos x$ est
$$y(x) = 2\sin x - 1 + \ell e^{-\sin x}, \ \ell \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4

On doit résoudre $xy'(x)+2y(x)=\sin x$, avec $x>0$.
L'équation peut s'écrire $y'(x)+\frac{2}{x}y(x)=\frac{\sin x}{x}$, $x>0$.
La solution générale de cette équation est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre. Une solution particulière est donnée par $p(x)=c(x)e^{-F(x)}$, où F est une primitive du coefficient f de y et $c(x)$ est à déterminer en remplaçant y par p dans l'équation différentielle donnée.
Ici $f(x)=\frac{2}{x}$, et, donc, $F(x)=2\ln|x|$ est une primitive de $f(x)$.
Comme $x>0$, on a $F(x)=2\ln x=\ln x^2$.
On pose ainsi $p(x)=c(x)e^{-\ln x^2}=c(x)e^{\ln\frac{1}{x^2}}=c(x)\cdot\frac{1}{x^2}$.
On a $p'(x)=c'(x)\cdot\frac{1}{x^2}+c(x)\left(-2\cdot\frac{1}{x^3}\right)=c'(x)\cdot\frac{1}{x^2}-c(x)\cdot\frac{2}{x^3}$.
Par substitution dans $y'(x)+\frac{2}{x}y(x)=\frac{\sin x}{x}$, on obtient

$$c'(x)\cdot\frac{1}{x^2}-c(x)\cdot\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x}\cdot c(x)\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{\sin x}{x}$$

$$\Rightarrow c'(x)\cdot\frac{1}{x^2}-c(x)\cdot\frac{2}{x^3}+c(x)\cdot\frac{2}{x^3}=\frac{\sin x}{x}\Rightarrow c'(x)\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{\sin x}{x}$$

$\Rightarrow c'(x)=x\sin x\Rightarrow c(x)=\int x\sin x\,dx$ (on ne met pas de constante additive, puisqu'on cherche une solution particulière).
On va calculer $c(x)=\int x\sin x\,dx$ par intégrations par parties: on pose $u=x$ et $v'=\sin x$; on a alors $u'=1$ et $v=-\cos x$; ainsi:

$$c(x)=\int x\sin x\,dx=\int uv'\,dx=uv-\int u'v\,dx=-x\cos x-\int 1\cdot(-\cos x)\,dx=$$

$$=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x.$$

Ainsi, une solution particulière est $p(x)=c(x)\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{-x\cos x+\sin x}{x^2}$.
Cherchons maintenant la solution générale de l'équation sans second membre:

$$y'(x)+\frac{2}{x}y(x)=0,\ x>0.$$

Cette équation peut s'écrire: $y'(x)=-\frac{2}{x}y(x)\Rightarrow\frac{y'(x)}{y(x)}=-\frac{2}{x}$

$$\Rightarrow\int\frac{y'(x)}{y(x)}dx=-\int\frac{2}{x}dx+c,\ c\in\mathbb{R}\Rightarrow\ln|y(x)|=-2\ln|x|+c,\ c\in\mathbb{R},\ x>0$$

$$\Rightarrow\ln|y(x)|=-2\ln x+c\Rightarrow\ln|y(x)|=\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)+c\Rightarrow|y(x)|=e^{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)+c}$$

$$\Rightarrow|y(x)|=e^ce^{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}\Rightarrow|y(x)|=e^c\cdot\frac{1}{x^2},\ c\in\mathbb{R}\Rightarrow|y(x)|=k\cdot\frac{1}{x^2},\ k\in\mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow y(x)=\pm k\cdot\frac{1}{x^2},\ k\in\mathbb{R}_+\Rightarrow y(x)=\ell\cdot\frac{1}{x^2},\ \ell\in\mathbb{R}.$$

Par conséquent, la solution générale de $xy'(x)+2y(x)=\sin x$, $x>0$, est

$$y(x)=\frac{-x\cos x+\sin x}{x^2}+\ell\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{-x\cos x+\sin x+\ell}{x^2},\ \ell\in\mathbb{R}.$$

Exercice 5

On a la relation $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$, $k > 0$.

En $t=0$, on a $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-k.0} = T_a + (T_0 - T_a).1 = T_a + T_0 - T_a = T_0$.

Ainsi T_0 représente la température initiale de la pizza.

Comme la chambre reste à une température constante de $20°$, si on attend suffisamment longtemps, la température de la pizza atteindra $20°$. Ainsi, on peut écrire $\lim_{t \to +\infty} T(t) = 20°$.

On a $\lim_{t \to +\infty} T(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}\right) = T_a + (T_0 - T_a).0 = T_a$ (puisque $k > 0$).

Par conséquent $T_a = 20°$.

La relation peut donc s'écrire $T(t) = 20 + (T_0 - 20)e^{-kt}$.

Si $t = 10\,min$, on a $T(t) = 0°$. Ainsi $20 + (T_0 - 20)e^{-10k} = 0$.

Si $t = 20\,min$, on a $T(t) = 10°$. Ainsi $20 + (T_0 - 20)e^{-20k} = 10$.

On doit donc résoudre le système : $\begin{cases} 20 + (T_0 - 20)e^{-10k} = 0 & (1) \\ 20 + (T_0 - 20)e^{-20k} = 10 & (2) \end{cases}$.

De (1), on tire $(T_0 - 20)e^{-10k} = -20 \Rightarrow e^{-10k} = \frac{-20}{T_0 - 20} \Rightarrow e^{-10k} = \frac{20}{20 - T_0}$

$\Rightarrow -10k = \ln\left(\frac{20}{20 - T_0}\right) \Rightarrow k = -\frac{1}{10}\ln\left(\frac{20}{20 - T_0}\right)$.

Par substitution dans (2), on obtient $20 + (T_0 - 20)e^{-20\cdot\left(-\frac{1}{10}\ln\left(\frac{20}{20 - T_0}\right)\right)} = 10$

$$\Rightarrow 20 + (T_0 - 20)e^{2\ln\left(\frac{20}{20 - T_0}\right)} = 10 \Rightarrow 20 + (T_0 - 20)e^{\ln\left(\left(\frac{20}{20 - T_0}\right)^2\right)} = 10$$

$$\Rightarrow 20 + (T_0 - 20)\cdot\left(\frac{20}{20 - T_0}\right)^2 = 10 \Rightarrow 20 - (20 - T_0)\cdot\frac{400}{(20 - T_0)^2} = 10$$

$$\Rightarrow 20 - \frac{400}{20 - T_0} = 10 \Rightarrow 10 = \frac{400}{20 - T_0} \Rightarrow 10(20 - T_0) = 400$$

$$\Rightarrow 20 - T_0 = 40 \Rightarrow -T_0 = 20 \Rightarrow T_0 = -20.$$

Ainsi la température initiale de la pizza est de $-20°C$.

Exercice 6

On doit résoudre (en fonction de a) $A'(t) = ae^{-t} - A(t)$, et trouver la solution qui correspond à la condition initiale $A(0) = 0$ (comme t représente le temps, on va considérer $t > 0$).

L'équation peut s'écrire $A'(t) + A(t) = ae^{-t}$, $t > 0$.

Pour la résoudre, on utilise la technique décrite à la page 84 de Formulaires et Tables (il existe d'autres techniques).

La solution générale de l'équation (sans tenir compte de la condition initiale) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre. Une solution particulière est donnée par $p(t) = c(t)e^{-F(t)}$, où F est une primitive du coefficient f de $A(t)$ et $c(t)$ est à déterminer en remplaçant $A(t)$ par $p(t)$ dans l'équation différentielle donnée.

Ici: $f(t) = 1$ et, donc, $F(t) = t$.

On pose ainsi $p(t) = c(t)e^{-t}$.

On a $p'(t) = c'(t)e^{t} - c(t)e^{t}$.

Par substitution dans $A'(t) + A(t) = ae^{-t}$, on obtient:

$$c'(t)e^{-t} - c(t)e^{-t} + c(t)e^{-t} = ae^{-t} \Rightarrow c'(t)e^{-t} = ae^{-t} \Rightarrow c'(t) = a$$

$\Rightarrow c(t) = at$ (on ne met pas de constante additive, puisqu'on cherche une solution particulière).

Ainsi, une solution particulière est $p(t) = ate^{-t}$.

Cherchons maintenant la solution générale de l'équation sans second membre:

$$A'(t) + A(t) = 0.$$

Cette équation peut s'écrire: $A'(t) = -A(t) \Rightarrow \frac{A'(t)}{A(t)} = -1 \Rightarrow \int \frac{A'(t)}{A(t)} dt = \int -1 dt + c$,

$$c \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln|A(t)| = -t + c \Rightarrow |A(t)| = e^{-t+c} \Rightarrow |A(t)| = e^{c}e^{-t},\ c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |A(t)| = ke^{-t},\ k \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow A(t) = \pm ke^{-t},\ k \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow A(t) = \ell e^{-t},\ \ell \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, la solution générale de $A'(t) = ae^{-t} - A(t)$ est

$$A(t) = ate^{-t} + \ell e^{-t},\ \ell \in \mathbb{R}.$$

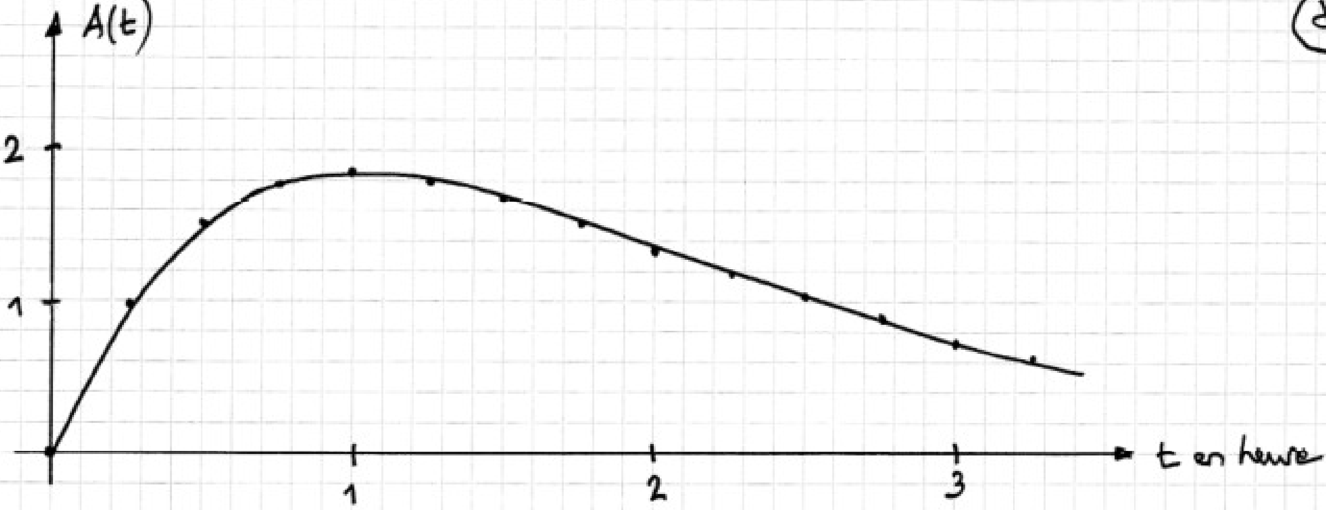
Pour trouver la solution qui correspond à $A(0) = 0$, on détermine le ℓ tel que $A(0) = 0$. On a $A(0) = a \cdot 0 \cdot e^{-0} + \ell \cdot e^{-0} = \ell$. Ainsi $A(0) = 0 \Rightarrow \ell = 0$.

Ainsi la solution de $A'(t) = ae^{-t} - A(t)$ avec $A(0) = 0$ est

$$A(t) = ate^{-t}.$$

Avec $a = 5$, on a $A(t) = 5te^{-t}$.

Le graphique de cette fonction pour $t = 0$ est:



Le taux d'alcoolémie maximal correspond au maximum de $A(t)$.
On cherche les points à tangente horizontale de $A(t)$, autrement dit les t tels que $A'(t)=0$.
On a $A'(t) = 5e^{-t} - 5te^{-t} = 5e^{-t}(1-t)$.
Comme $5e^{-t} > 0$ pour tout t, on a $A'(t)=0 \Rightarrow 1-t=0 \Rightarrow t=1$ heure.
Avec $t=1$, on a $A(t) = 5.1.e^{-1} = 5.e^{-1} \cong 1,84$.

Ainsi le taux d'alcoolémie maximal est 1,84 et il est atteint au bout d'une heure.