CORRIGES DES EXERCICES

Exercice 1

a) $f(x) = x\tan x$ est de la forme $f(x) = u\cdot v$ avec $u = x$ et $v = \tan x$.
On a alors $f'(x) = u'\cdot v + u\cdot v'$ avec $u' = 1$ et $v' = 1+\tan^2(x)$.
Ainsi $f'(x) = 1\cdot\tan(x) + x\cdot(1+\tan^2(x)) = \tan(x) + x + x\tan^2(x)$.

b) $g(x) = \tan x - \cotan(x)$: on a $g'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\sin^2(x)} =$
$= \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)\sin^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)\sin^2(x)}$ (car $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$).

c) $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ est de la forme $f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = x^3$ et $v = 1+x^2$.
On a alors $f'(x) = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$ avec $u' = 3x^2$ et $v' = 2x$.
Ainsi $f'(x) = \frac{3x^2\cdot(1+x^2) - x^3\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{3x^2+3x^4-2x^4}{(1+x^2)^2} = \frac{3x^2+x^4}{(1+x^2)^2}$.

d) $g(x) = \sin\left(\frac{x^3}{1+x^2}\right)$ est une fonction composée de la forme $g(x) = u(v(x))$ avec
$u(y) = \sin(y)$ et $v(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$. On a alors $g'(x) = u'(v(x))\cdot v'(x)$ avec $u'(y) = \cos(y)$
et $v'(x) = \frac{3x^2+x^4}{(1+x^2)^2}$ (voir c)).
Ainsi $g'(x) = \cos\left(\frac{x^3}{1+x^2}\right)\cdot\frac{3x^2+x^4}{(1+x^2)^2} = \frac{3x^2+x^4}{(1+x^2)^2}\cos\left(\frac{x^3}{1+x^2}\right)$.

e) $f(x) = \sin(x^2) + \sin^2 x$: $g(x) = \sin(x^2)$ est une fonction composée de la forme
$g(x) = u(v(x))$ avec $u(y) = \sin(y)$ et $v(x) = x^2$; on a alors $g'(x) = u'(v(x))\cdot v'(x)$
avec $u'(y) = \cos(y)$ et $v'(x) = 2x$; ainsi $g'(x) = \cos(x^2)\cdot 2x = 2x\cos(x^2)$;
$h(x) = \sin^2 x$ est aussi une fonction composée de la forme $h(x) = u(v(x))$ avec ici
$u(y) = y^2$ et $v(x) = \sin(x)$; on a alors $h'(x) = u'(v(x))\cdot v'(x)$ avec $u'(y) = 2y$
et $v'(x) = \cos(x)$; ainsi $h'(x) = 2\sin(x)\cdot\cos(x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
Par conséquent, $f'(x) = g'(x) + h'(x) = 2x\cos(x^2) + 2\sin(x)\cos(x)$.

f) $g(x) = \cos(\sin x)$ est une fonction composée de la forme $g(x) = u(v(x))$ avec
$u(y) = \cos(y)$ et $v(x) = \sin(x)$. On a alors $g'(x) = u'(v(x))\cdot v'(x)$ avec
$u'(y) = -\cos(y)$ et $v'(x) = \cos(x)$.
Ainsi $g'(x) = -\cos(\sin(x))\cdot\cos(x)$.

Exercice 2

L'équation de la tangente au graphe de $f(x) = \sqrt{x-5}$ au point $(9;2)$ est de la forme $y = mx + h$, où $m = f'(9)$ et h sera déterminé grâce au point $(9;2)$ (point de tangence).

On a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-5}}$. Ainsi $f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9-5}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$.

Ainsi $m = \frac{1}{4}$ et l'équation de la tangente s'écrit $y = \frac{1}{4}x + h$.

Avec le point $(9;2)$, en substituant x par 9 et y par 2 dans $y = \frac{1}{4}x + h$, on obtient $2 = \frac{1}{4} \cdot 9 + h \Rightarrow 2 = \frac{9}{4} + h \Rightarrow h = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$.

L'équation de la tangente est donc $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$.

Exercice 3

a) $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \dfrac{u}{v}$ avec $u = \sin x + \cos x$ et $v = \sin x - \cos x$.

On a $u' = \cos x - \sin x$ et $v' = \cos x + \sin x$.

Ainsi $f'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \dfrac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} =$

$= \dfrac{\cos x \sin x - \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x \cos x - (\sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x + \cos x \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} =$

$= \dfrac{2\cos x \sin x - (\cos^2 x + \sin^2 x) - 2\cos x \sin x - (\cos^2 x + \sin^2 x)}{(\sin x - \cos x)^2} =$

$= \dfrac{-2(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \dfrac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$ (car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$).

b) $f(x) = \dfrac{(x^3 - 5)^4}{(x^3 + 5)^3} = \dfrac{u}{v}$ avec $u = (x^3 - 5)^4$ et $v = (x^3 + 5)^3$.

On a $u' = 4(x^3 - 5)^3 \cdot 3x^2 = 12x^2(x^3 - 5)^3$ et $v' = 3(x^3 + 5)^2 \cdot 3x^2 = 9x^2(x^3 + 5)^2$.

Ainsi $f'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \dfrac{12x^2(x^3 - 5)^3(x^3 + 5)^3 - (x^3 - 5)^4 9x^2 (x^3 + 5)^2}{((x^3 + 5)^3)^2} =$

$= \dfrac{3x^2(x^3 - 5)^3(x^3 + 5)^2\left(4(x^3 + 5) - 3(x^3 - 5)\right)}{(x^3 + 5)^6} =$

$= \dfrac{3x^2(x^3 - 5)^3(4x^3 + 20 - 3x^3 + 15)}{(x^3 + 5)^4} = \dfrac{3x^2(x^3 - 5)^3(x^3 + 35)}{(x^3 + 5)^4}$.

c) $f(x) = \dfrac{x^8}{8(1 - x^2)^4} = \dfrac{u}{v}$ avec $u = x^8$ et $v = 8(1 - x^2)^4$.

On a $u' = 8x^7$ et $v' = 8 \cdot 4(1 - x^2)^3 \cdot (-2x) = -64x(1 - x^2)^3$.

Ainsi $f'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \dfrac{8x^7 \cdot 8(1 - x^2)^4 - x^8 \cdot (-64x(1 - x^2)^3)}{(8(1 - x^2)^4)^2} =$

$= \dfrac{64x^7(1 - x^2)^4 + 64x^9(1 - x^2)^3}{64(1 - x^2)^8} =$

$= \dfrac{64x^7(1 - x^2)^3(1 - x^2 + x^2)}{64(1 - x^2)^8} = \dfrac{x^7}{(1 - x^2)^5}$.

d) $f(x) = \sin^2(x^3) + \cos^2(x^3)$ est une somme de fonctions composées.

On a $f'(x) = 2\sin(x^3) \cdot \cos(x^3) \cdot 3x^2 + 2\cos(x^3) \cdot (-\sin(x^3)) \cdot 3x^2 =$

$= 6x^2 \sin(x^3)\cos(x^3) - 6x^2 \sin(x^3)\cos(x^3) = 0$.

Le résultat est logique, puisque, comme $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, on a $f(x) = \sin^2(x^3) + \cos^2(x^3) = 1$ et $f'(x) = 0$.

e) $f(x)=(1+3x-5x^2)^{30}$ est une fonction composée.

On a $f'(x)=30(1+3x-5x^2)^{29}\cdot(3-10x)$.

f) $f(x)=\cos^3x\,(3\cos^2x-5)=3\cos^5x-5\cos^3x$ est une soustraction de fonctions composées.

On a $f'(x)=3\cdot5\cos^4x\cdot(-\sin x)-5\cdot3\cos^2x\cdot(-\sin x)=$

$=-15\cos^4x\sin x+15\cos^2x\sin x=15\cos^2x\sin x\,(1-\cos^2x)$.

Or, comme $\sin^2x+\cos^2x=1$, on a $1-\cos^2x=\sin^2x$ et on obtient :

$f'(x)=15\cos^2x\sin x\cdot\sin^2x=15\cos^2x\sin^3x$.

Exercice 4.

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{7x+3}}{\sqrt{6x-11}}=\dfrac{u}{v}$ avec $u=\sqrt{7x+3}$ et $v=\sqrt{6x-11}$.

On a $u'=\dfrac{1}{2\sqrt{7x+3}}\cdot 7=\dfrac{7}{2\sqrt{7x+3}}$ et $v'=\dfrac{1}{2\sqrt{6x-11}}\cdot 6=\dfrac{3}{\sqrt{6x-11}}$.

Ainsi $f'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=\dfrac{\frac{7}{2\sqrt{7x+3}}\cdot\sqrt{6x-11}-\sqrt{7x+3}\cdot\frac{3}{\sqrt{6x-11}}}{(\sqrt{6x-11})^2}=$

$=\dfrac{\frac{7\sqrt{6x-11}}{2\sqrt{7x+3}}-\frac{3\sqrt{7x+3}}{\sqrt{6x-11}}}{6x-11}=\dfrac{1}{6x-11}\left(\dfrac{7(\sqrt{6x-11})^2-6(\sqrt{7x+3})^2}{2\sqrt{7x+3}\sqrt{6x-11}}\right)=$

$=\dfrac{1}{6x-11}\cdot\dfrac{7(6x-11)-6(7x+3)}{2\sqrt{7x+3}\sqrt{6x-11}}=\dfrac{42x-77-42x-18}{2\sqrt{7x+3}\sqrt{6x-11}(6x-11)}=$

$=\dfrac{-95}{2\sqrt{7x+3}\sqrt{6x-11}(6x-11)}$.

b) $f(x)=\sqrt{\arccos(x)}-\arccos(\sqrt{x})$ est la différence de 2 fonctions composées.

On a $(\arccos(x))'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ainsi $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\arccos(x)}}\cdot(\arccos(x))'-\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\right)\cdot(\sqrt{x})'=$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{\arccos(x)}}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=$

$=\dfrac{-1}{2\sqrt{\arccos(x)}\cdot\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$.

c) $f(x)=\cos(\sin^2(x^5))$ est une fonction composée.

On a $f'(x)=-\sin(\sin^2(x^5))\cdot 2\sin(x^5)\cdot\cos(x^5)\cdot 5x^4=$

$=-10x^4\sin(\sin^2(x^5))\cdot\sin(x^5)\cdot\cos(x^5)$.

Exercice 5

a) $f(x) = 5x^2 - 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 10x - 3 \Rightarrow f''(x) = 10.$

b) $f(x) = (1+x^2)\arctan x = u \cdot v$ avec $u = 1+x^2$ et $v = \arctan x$.

On a $u' = 2x$ et $v' = \frac{1}{1+x^2}$.

Ainsi $f'(x) = u'v + uv' = 2x\arctan(x) + (1+x^2)\frac{1}{1+x^2} = 2x\arctan(x) + 1.$

On a aussi $f'(x) = 2x\arctan(x) + 1 = u \cdot v + 1$ avec $u = 2x$ et $v = \arctan x$.

On a $u' = 2$ et $v' = \frac{1}{1+x^2}$.

Ainsi $f''(x) = u'v + uv' = 2\arctan x + 2x\frac{1}{1+x^2} = 2\arctan x + \frac{2x}{1+x^2}.$

c) $f(x) = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$

On a $f'(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = x$ et $v = \sqrt{x^2+1}$.

De plus, $u' = 1$ et $v' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (comme pour f').

Ainsi $f''(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} =$

$= \frac{1}{x^2+1}\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} =$

$= (x^2+1)^{-3/2}.$

On a alors $f''(x) = -\frac{3}{2}(x^2+1)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x = -3x(x^2+1)^{-\frac{5}{2}} = \frac{-3x}{(x^2+1)^{5/2}} =$

$= \frac{-3x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}.$

d) $f(x) = \frac{1+x}{1-x} = \frac{u}{v}$ avec $u = 1+x$ et $v = 1-x$.

On a $u' = 1$ et $v' = -1$.

Ainsi $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1(1-x) - (1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} = 2(1-x)^{-2}.$

On a alors $f''(x) = 2\cdot(-2)(1-x)^{-3}\cdot(-1) = 4(1-x)^{-3} = \frac{4}{(1-x)^3}.$

Exercice 6.

Commençons par chercher l'équation de la tangente à la courbe $f(x) = x - x^2$ au point d'abscisse $x = a$.
L'équation de la tangente est de la forme $y = mx + h$, où $m = f'(a)$ et h est calculé grâce au point $(a; f(a))$ (point de tangence).
On a $f'(x) = 1 - 2x$ et $f'(a) = 1 - 2a$.
Ainsi $m = 1 - 2a$ et l'équation de la tangente s'écrit $y = (1-2a)x + h$.
De plus, $f(a) = a - a^2$. Ainsi le point de tangence a pour coordonnées $(a; a - a^2)$.
En substituant x par a et y par $a - a^2$ dans l'équation de la tangente, on obtient
$a - a^2 = (1-2a)a + h \Longrightarrow a - a^2 = a - 2a^2 + h \Longrightarrow h = a^2$.
L'équation de la tangente en $x = a$ s'écrit donc $y = (1-2a)x + a^2$.

Avec $a = 0$, on obtient $y = x$.
Avec $a = \frac{1}{2}$, on obtient $y = \frac{1}{4}$.
Avec $a = 1$, on obtient $y = -x + 1$.