# CORRIGE DES EXERCICES



## Exercice 1

L'approximation linéaire (ou affine) d'une fonction $f$ autour d'un point $x_0$ est donnée par $f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Ici $x_0 = 0$.

a) $f(x) = \arccos x$ : $f(0) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ (par définition $0 \leq \arccos x \leq \pi$) ;

$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = -\frac{1}{1} = -1$ ;

ainsi $f(x) \cong \frac{\pi}{2} - x$.

b) $f(x) = \tan x$ : $f(0) = \tan 0 = 0$ ; $f'(x) = 1 + \tan^2(x) \Rightarrow f'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$ ;

ainsi $f(x) \cong x$.

## Exercice 2

Pour trouver une valeur approchée de $(2{,}01)^3\sqrt{16{,}01}$, on va chercher l'approximation linéaire de $f(x) = x^3\sqrt{x+14}$ autour de $x_0 = 2$.

Une approximation linéaire de $f$ autour de $x_0$ est $f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

On a $f(x_0) = f(2) = 2^3\sqrt{2+14} = 8 \cdot \sqrt{16} = 8 \cdot 4 = 32$.

En outre $f(x) = x^3\sqrt{x+14} = u \cdot v$ avec $u = x^3$ et $v = \sqrt{x+14}$.

On a $u' = 3x^2$ et $v' = \frac{1}{2\sqrt{x+14}}$. Ainsi $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{3x^2\sqrt{x+14} - x^3\frac{1}{2\sqrt{x+14}}}{(\sqrt{x+14})^2} =$

$$= \frac{3x^2\sqrt{x+14} - \frac{x^3}{2\sqrt{x+14}}}{x+14} = \frac{1}{x+14} \cdot \frac{3x^2\sqrt{x+14} \cdot 2\sqrt{x+14} - x^3}{2\sqrt{x+14}} = \frac{6x^2(x+14) - x^3}{2\sqrt{x+14}(x+14)} =$$

$$= \frac{6x^3 + 84x^2 - x^3}{2\sqrt{x+14}(x+14)} = \frac{5x^3 + 84x^2}{2\sqrt{x+14}(x+14)}.$$

Par conséquent, $f'(2) = \frac{5 \cdot 2^3 + 84 \cdot 2^2}{2\sqrt{2+14}(2+14)} = \frac{40 + 336}{2 \cdot 4 \cdot 16} = \frac{376}{128} = 2{,}9375$.

On obtient ainsi $f(x) \cong 32 + 2{,}9375\,(x - 2)$.

Avec $x = 2{,}01$, on trouve $f(x) \cong 32 + 2{,}9375\,(2{,}01 - 2) = 32 + 2{,}9375 \cdot 0{,}01 =$

$= 32 + 0{,}029375 = 32{,}029375$.

Par rapport à la valeur numérique qui est $32{,}49255317$, on a une erreur de

$\frac{32{,}49255317 - 32{,}029375}{32{,}49255317} \cong 0{,}01425 = 1{,}425\,\%$.

## Exercice 3

Le polynôme de Taylor de degré 4 de la fonction $f$ autour du point $x = a$ est donné par :

$$f(x) \cong f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{IV}(a)}{4!}(x-a)^4.$$

On a $f(x) = \cos(x)$, $f'(x) = -\sin(x)$, $f''(x) = -\cos(x)$, $f'''(x) = \sin(x)$, $f^{IV}(x) = \cos(x)$.
Avec $a = 0$ (origine), on a $f(a) = 1$, $f'(a) = 0$, $f''(a) = -1$, $f'''(a) = 0$, $f^{IV}(a) = 1$.

On a ainsi $f(x) \cong 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 =$
$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$

## Exercice 4

Le polynôme de Taylor de degré $n$ de la fonction $f$ autour du point $x = a$ est donné par :

$$f(x) \cong f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

On a : $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 6x + 7$, $f'(x) = 12x^2 - 10x - 6$, $f''(x) = 24x - 10$,
$f'''(x) = 24$, $f^{IV}(x) = f^{V}(x) = f^{VI}(x) = f^{VII}(x) = f^{VIII}(x) = f^{IX}(x) = 0$.

Avec $a = 0$ (origine), on a $f(a) = 7$, $f'(a) = -6$, $f''(a) = -10$, $f'''(a) = 24$,
$f^{IV}(a) = f^{V}(a) = f^{VI}(a) = f^{VII}(a) = f^{VIII}(a) = f^{IX}(a) = 0$.

Degré 1 ($n=1$) : $f(x) \cong 7 + \frac{-6}{1!}x = 7 - 6x$.
Degré 2 ($n=2$) : $f(x) \cong 7 + \frac{-6}{1!}x + \frac{-10}{2!}x^2 = 7 - 6x - 5x^2$.
Degré 3 ($n=3$) : $f(x) = 7 + \frac{-6}{1!}x + \frac{-10}{2!}x^2 + \frac{24}{3!}x^3 = 7 - 6x - 5x^2 + 4x^3$.
Degré 4 ($n=4$) : $f(x) = 7 + \frac{-6}{1!}x + \frac{-10}{2!}x^2 + \frac{24}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 = 7 - 6x - 5x^2 + 4x^3$.
Degré 5 ($n=5$) à degré 9 ($n=9$) : $f(x) = 7 - 6x - 5x^2 + 4x^3$.

On remarque que, dès le degré 3, le polynôme de Taylor correspond exactement à la fonction (qui est un polynôme de degré 3).

## Exercice 5

Pour trouver une valeur approchée de $\sqrt[3]{2(6{,}01)^3-5(9{,}01)^2}$, on va utiliser l'approximation linéaire de $f(x)=\sqrt[3]{2x^3-5(x+3)^2}$ autour de $x_0=6$.
L'approximation linéaire de $f$ autour de $x_0=6$ est donnée par
$f(x)\cong f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.
On a $f(x_0)=f(6)=\sqrt[3]{2\cdot 6^3-5\cdot 9^2}=\sqrt[3]{2\cdot 216-5\cdot 81}=\sqrt[3]{432-405}=\sqrt[3]{27}=3.$
En outre, comme $f(x)=\left(2x^3-5(x+3)^2\right)^{1/3}$, on a :

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(2x^3-5(x+3)^2\right)^{-2/3}\left(6x^2-10(x+3)\right)=\frac{6x^2-10x-30}{3\left(2x^3-5(x+3)^2\right)^{2/3}}=$$

$$=\frac{6x^2-10x-30}{3\left(\sqrt[3]{2x^3-5(x+3)^2}\right)^2}.$$

Avec $x_0=6$, on obtient $f'(x_0)=f'(6)=\dfrac{6\cdot 6^2-10\cdot 6-30}{3\left(\sqrt[3]{2\cdot 6^3-5\cdot 9^2}\right)^2}=$

$$=\frac{216-60-30}{3\cdot 3^2}=\frac{126}{27}=\frac{14}{3}.$$

On obtient ainsi $f(x)\cong 3+\frac{14}{3}(x-6)$.

Avec $x=6{,}01$, cela donne $f(6{,}01)\cong 3+\frac{14}{3}(6{,}01-6)=3+\frac{14}{3}\cdot 0{,}01=$

$$=3+\frac{14}{3}\cdot\frac{1}{100}=3+\frac{14}{300}=3+\frac{7}{150}=3{,}04\overline{6}.$$

Par rapport à la valeur numérique qui est $3{,}046070439$, on a une erreur de

$$\frac{3{,}04\overline{6}-3{,}046070439}{3{,}046070439}=0{,}000196=0{,}0196\ \%.$$

# Exercice 6

On a $f(x) = \sqrt{x+1}$.

a) L'approximation linéaire $P_1$ de $f$ autour de $x_0 = 0$ est donnée par
$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
On a $f(x_0) = f(0) = \sqrt{0+1} = 1$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ et $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{0+1}} = \frac{1}{2}$.

Ainsi $P_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x$.

b) L'approximation quadratique $P_2$ de $f$ autour de $x_0 = 0$ est donnée par
$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$.
On a $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(x) =$
$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(x+1)^{-3/2} = -\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2} = -\frac{1}{4(x+1)^{3/2}}$ et $f''(x_0) = f''(0) =$
$= -\frac{1}{4(0+1)^{3/2}} = -\frac{1}{4}$.
Ainsi $P_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$.

c)

| $x$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 0,707 | 0,866 | 1 | 1,056 | 1,225 | 1,414 |
| $P_1(x)$ | 0,5 | 0,75 | 0,875 | 1 | 1,125 | 1,25 | 1,5 |
| $P_2(x)$ | 0,375 | 0,71875 | 0,8672 | 1 | 1,1172 | 1,21875 | 1,375 |

## Exercice 7

Le polynôme de Taylor de degré 5 de $f(x)=\frac{1}{1-x}$ autour de $x_0=0$ est donné par

$$f(x)\cong f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{IV}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4+$$
$$+\frac{f^{V}(x_0)}{5!}(x-x_0)^5.$$

On a : $f(x)=\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}$ ;

$$f'(x)=-1(1-x)^{-2}\cdot(-1)=(1-x)^{-2}=\frac{1}{(1-x)^2};$$
$$f''(x)=-2(1-x)^{-3}\cdot(-1)=2(1-x)^{-3}=\frac{2}{(1-x)^3};$$
$$f'''(x)=2\cdot(-3)(1-x)^{-4}\cdot(-1)=6(1-x)^{-4}=\frac{6}{(1-x)^4};$$
$$f^{IV}(x)=6\cdot(-4)(1-x)^{-5}(-1)=24(1-x)^{-5}=\frac{24}{(1-x)^5};$$
$$f^{V}(x)=24\cdot(-5)(1-x)^{-6}(-1)=120(1-x)^{-6}=\frac{120}{(1-x)^6}.$$

Ainsi, avec $x_0=0$, on a : $f(x_0)=\frac{1}{1}=1$ ;

$$f'(x_0)=\frac{1}{1}=1;$$
$$f''(x_0)=\frac{2}{1}=2;$$
$$f'''(x_0)=\frac{6}{1}=6;$$
$$f^{IV}(x_0)=\frac{24}{1}=24;$$
$$f^{V}(x_0)=\frac{120}{1}=120.$$

On obtient ainsi $f(x)\cong 1+1\cdot x+\frac{2}{2}\cdot x^2+\frac{6}{3!}x^3+\frac{24}{4!}x^4+\frac{120}{5!}x^5=$

$$=1+x+x^2+\frac{6}{6}x^3+\frac{24}{24}x^4+\frac{120}{120}x^5=$$
$$=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5.$$

## Exercice 8

Le polynôme de Taylor de degré 3 de $f(x) = \arcsin x$ autour de $x_0 = 0$ est donné par

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3.$$

On a: $f(x) = \arcsin x$;

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2};$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}(-2x) = x(1-x^2)^{-3/2} = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{u}{v} \text{ avec}$$

$u = x$ et $v = (1-x^2)^{3/2}$; on a $u' = 1$ et $v' = \frac{3}{2}(1-x^2)^{1/2}\cdot(-2x) =$
$= -3x(1-x^2)^{1/2} = -3x\sqrt{1-x^2}$; ainsi:

$$f'''(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1\cdot(1-x^2)^{3/2} - x(-3x\sqrt{1-x^2})}{((1-x^2)^{3/2})^2} =$$

$$= \frac{(1-x^2)^{3/2} + 3x^2\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^3} = \frac{(1-x^2)\sqrt{1-x^2} + 3x^2\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^3} =$$

$$= \frac{(1-x^2+3x^2)\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^3} = \frac{(1+2x^2)\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^3}.$$

Ainsi, avec $x_0 = 0$, on a: $f(x_0) = \arcsin 0 = 0$;

$$f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$f''(x_0) = \frac{0}{(1-0^2)^{3/2}} = 0;$$

$$f'''(x_0) = \frac{(1+2\cdot 0^2)\sqrt{1-0^2}}{(1-0^2)^3} = \frac{1\cdot 1}{1} = 1.$$

On obtient ainsi $f(x) \cong x + \frac{1}{3!}x^3 = x + \frac{x^3}{6}$.