CORRIGES DES EXERCICES

Exercice 1

a) $\int(6x^2-3\cos x)\,dx = \int 6x^2\,dx - \int 3\cos x\,dx = 6\int x^2\,dx - 3\int \cos x\,dx = 6\frac{x^3}{3} - 3\sin x + c^{\underline{te}} =$
$= 2x^3 - 3\sin x + c^{\underline{te}}$

b) $\int \frac{t^2-1}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t^2+1-2}{t^2+1}\,dt = \int\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt = \int 1\,d - \int \frac{2}{t^2+1}\,dt =$

$= t - 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$. D'après Formulaires et Tables (F+T) p. 78,

$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ $(\arctan(x) = \tan^{-1}(x))$. Ainsi $\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan(t)$.

Par conséquent $\int \frac{t^2-1}{t^2+1}\,dt = t - \arctan t + c^{\underline{te}}$.

c) $\int \frac{u^2+3u-1}{u^4}\,du = \int\left(\frac{u^2}{u^4}+\frac{3u}{u^4}-\frac{1}{u^4}\right)du = \int\left(\frac{1}{u^2}+\frac{3}{u^3}-\frac{1}{u^4}\right)du =$

$= \int \frac{1}{u^2}\,du + 3\int \frac{1}{u^3}\,du - \int \frac{1}{u^4}\,du = \int u^{-2}\,du + 3\int u^{-3}\,du - \int u^{-4}\,du =$

$= \frac{u^{-1}}{-1} + 3\frac{u^{-2}}{-2} - \frac{u^{-3}}{-3} + c^{\underline{te}} = -\frac{1}{u} - \frac{3}{2u^3} + \frac{1}{3u^3} + c^{\underline{te}}$

d) $\int \tan^2 x\,dx = \int(1+\tan^2(x)-1)\,dx = \int(1+\tan^2 x) - \int 1\,dx = \int(1+\tan^2 x)\,dx - x$.

D'après F+T p. 75, la dérivée de $\tan x$ est $1+\tan^2 x$. Ainsi la primitive de $1+\tan^2 x$ est $\tan x$ et on a $\int(1+\tan^2 x)\,dx = \tan x$.

Ainsi $\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + c^{\underline{te}}$

Remarque: le terme "primitive" et le terme "intégrale indéfinie" sont synonymes.

Exercice 2

a) On a $|1-x^2| = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } 1-x^2 \geqslant 0 \\ -(1-x^2) & \text{si } 1-x^2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x^2 \leqslant 1 \\ -1+x^2 & \text{si } x^2 > 1 \end{cases} =$

$$= \begin{cases} -1+x^2 & \text{si } x < -1 \\ 1-x^2 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1+x^2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^2 |1-x^2|\,dx = \int_0^1 |1-x^2|\,dx + \int_1^2 |1-x^2|\,dx = \int_0^1 (1-x^2)\,dx + \int_1^2 (-1+x^2)\,dx.$

Une primitive de $(1-x^2)$ est $F(x) = x - \frac{x^3}{3}$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)\,dx = F(1) - F(0) = 1 - \frac{1^3}{3} - \left(0 - \frac{0^3}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$

Une primitive de $(-1+x^2)$ est $G(x) = -x + \frac{x^3}{3}$.

Ainsi $\displaystyle\int_1^2 (-1+x^2)\,dx = G(2) - G(1) = -2 + \frac{2^3}{3} - \left(-1 + \frac{1^3}{3}\right) = -2 + \frac{8}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) =$

$= \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$

Par conséquent $\displaystyle\int_0^2 |1-x^2|\,dx = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2.$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2-1}{t^2+1}\,dt = \int_0^1 \frac{t^2+1-2}{t^2+1}\,dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{t^2+1}\right)dt = \int_0^1 1\,dt - 2\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt \overset{\text{F+T p. 78}}{=}$

$= \left[t\right]_0^1 - 2\left[\arctan t\right]_0^1 = (1-0) - 2(\arctan 1 - \arctan 0) =$

$= 1 - 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = 1 - \frac{\pi}{2}.$

c) $\displaystyle\int_4^9 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + t\right)dt = \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt + \int_4^9 t\,dt = \int_4^9 t^{-\frac{1}{2}}\,dt + \int_4^9 t\,dt =$

$= \left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_4^9 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_4^9 = \left[2\sqrt{t}\right]_4^9 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_4^9 =$

$= \left(2\sqrt{9} - 2\sqrt{4}\right) + \left(\frac{9^2}{2} - \frac{4^2}{2}\right) = 2\cdot 3 - 2\cdot 2 + \frac{81}{2} - \frac{16}{2} =$

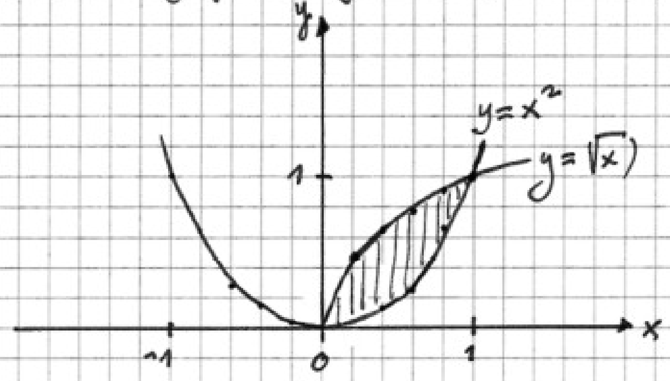
$= 6 - 4 + \frac{81}{2} - 8 = \frac{81}{2} - 6 = \frac{69}{2}.$

d) $\displaystyle\int_0^1 (7u^8 + \sqrt{\pi})\,du = \int_0^1 7u^8\,du + \int_0^1 \sqrt{\pi}\,du = 7\int_0^1 u^8\,du + \sqrt{\pi}\int_0^1 du =$

$= 7\left[\frac{u^9}{9}\right]_0^1 + \sqrt{\pi}\left[u\right]_0^1 = 7\left(\frac{1^9}{9} - \frac{0^9}{9}\right) + \sqrt{\pi}(1-0) = \frac{7}{9} + \sqrt{\pi}.$

Exercice 3

On commence par dessiner les graphes de $y=x^2$ et $y=\sqrt{x}$:



On a : $x^2=\sqrt{x} \Rightarrow x^4=x \Rightarrow x^4-x=0 \Rightarrow x(x^3-1)=0$

$\Rightarrow$ soit $x=0$, soit $x^3-1=0 \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow x=1$.

Ainsi les 2 courbes se coupent en $x=0$ et $x=1$.

L'aire de la figure délimitée par $y=x^2$ et $y=\sqrt{x}$ est alors donnée par $\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx$ (fonction du haut − fonction du bas).

On a $\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx - \int_0^1 x^2 dx =$

$= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot 0^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) =$

$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Ainsi l'aire cherchée vaut $\frac{1}{3}$.

Exercice 4

a) $\int \frac{\sqrt{1-t^2}-1}{\sqrt{1-t^2}} = \int \left(1-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt = \int 1dt - \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$

D'après F+T p. 79, une primitive de $\frac{1}{\sqrt{a-x^2}}$ est $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$. Ici, $a=1$,

et on a $\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arcsin t$.

Par conséquent $\int \frac{\sqrt{1-t^2}-1}{\sqrt{1-t^2}} = t - \arcsin t + c^{te}$.

b) $\int (2x^2+5)^2dx = \int (4x^4+20x^2+25)dx = 4\int x^4dx + 20\int x^2dx + 25\int dx =$

$= 4\frac{x^5}{5} + 20\frac{x^3}{3} + 25x = \frac{4x^5}{5} + \frac{20x^3}{3} + 25x + c^{te}.$

c) $\int \frac{3u^2}{u^2+1}du = \int \frac{3u^2+3-3}{u^2+1}du = \int \frac{3(u^2+1)-3}{u^2+1} = \int \left(3-\frac{3}{u^2+1}\right)du =$

$= 3\int du - 3\int \frac{1}{u^2+1}du.$ D'après F+T p. 78, une primitive de $\frac{1}{x^2+a^2}$ est

$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$. Ici, $a=1$, et on a $\int \frac{1}{u^2+1}du = \arctan u$.

Par conséquent $\int \frac{3u^2}{u^2+1}du = 3u - 3\arctan u + c^{te}$.

d) $\int t(t+\sqrt{t})dt = \int (t^2+t\sqrt{t})dt = \int (t^2+t^{\frac{3}{2}})dt = \int t^2dt + \int t^{\frac{3}{2}}dt =$

$= \frac{t^3}{3} + \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c^{te} = \frac{t^3}{3} + \frac{2}{5}t^2\sqrt{t} = t^2\left(\frac{t}{3}+\frac{2}{5}\sqrt{t}\right) + c^{te}.$

Exercice 5

a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x^2+x-1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 \frac{x^2+x-1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int_1^4 \left(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^4 =$

$\displaystyle= \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4 = \left[\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}\right]_1^4 =$

$\displaystyle= \left(\frac{2}{5}4^2\sqrt{4}+\frac{2}{3}4\sqrt{4}-2\sqrt{4}\right)-\left(\frac{2}{5}1^2\sqrt{1}+\frac{2}{3}1\sqrt{1}-2\sqrt{1}\right) =$

$\displaystyle= \frac{2}{5}\cdot 16\cdot 2+\frac{2}{3}\cdot 4\cdot 2-2\cdot 2-\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}-2\right) = \frac{64}{5}+\frac{16}{3}-4-\left(-\frac{14}{15}\right) =$

$\displaystyle= \frac{212}{15}+\frac{14}{15} = \frac{226}{15}.$

b) $\displaystyle\int_{-1}^2 (u+|u|)\,du = \int_{-1}^2 u\,du + \int_{-1}^2 |u|\,du = \int_{-1}^2 u\,du + \int_{-1}^0 |u|\,du + \int_0^2 |u|\,du =$

$\displaystyle= \int_{-1}^2 u\,du + \int_{-1}^0 (-u)\,du + \int_0^2 u\,du = \int_{-1}^2 u\,du - \int_{-1}^0 u\,du + \int_0^2 u\,du =$

$\displaystyle= \left[\frac{u^2}{2}\right]_{-1}^2 - \left[\frac{u^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^2 = \left(\frac{2^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}\right)-\left(\frac{0^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}\right)+\left(\frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right) =$

$\displaystyle= 2-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)+2 = 2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2 = 4.$

c) Comme $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$ pour toutes les valeurs de x, on a:

$\displaystyle\int_{-2}^3 (\sin^2 x+\cos^2 x)\,dx = \int_{-2}^3 1\,dx = \left[x\right]_{-2}^3 = 3-(-2) = 3+2 = 5.$

d) $\displaystyle\int_0^4 t(t+\sqrt{t})\,dt = \int_0^4 (t^2+t\sqrt{t})\,dt = \int_0^4 t^2\,dt + \int_0^4 t^{\frac{3}{2}}\,dt =$

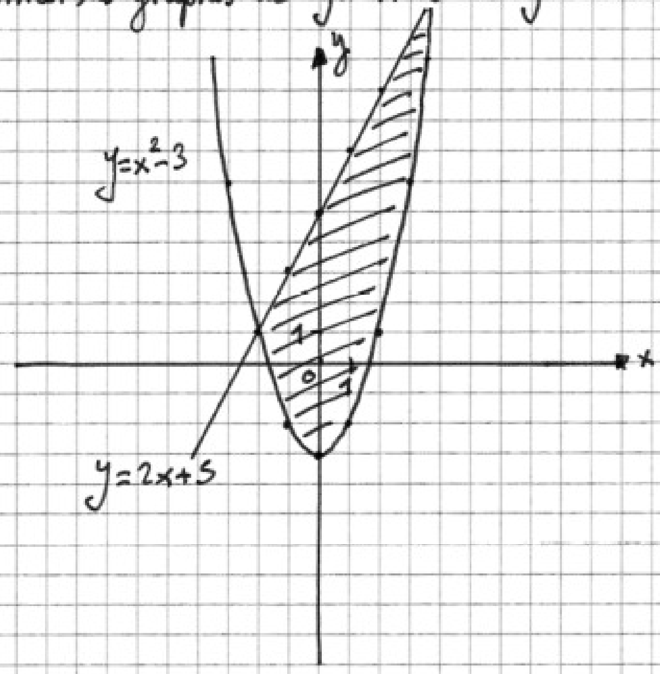
$\displaystyle= \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^4 - \left[\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^4 - \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^4 - \left[\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}\right]_0^4$

$\displaystyle= \frac{4^3}{3}-\frac{0^3}{3}-\left(\frac{2}{5}4^2\sqrt{4}-\frac{2}{3}0^2\sqrt{0}\right) = \frac{64}{3}-\frac{2}{5}\cdot 16\cdot 2 = \frac{64}{3}-\frac{64}{5} = \frac{128}{15}.$

Exercice 6

⑥

On commence par dessiner les graphes de $y = x^2-3$ et $y = 2x+5$:



On a $x^2-3 = 2x+5 \Rightarrow x^2-2x-8=0 \Rightarrow (x+2)(x-4)=0$
$\Rightarrow x=-2$ ou $x=4$.
Ainsi les 2 courbes se coupent en $x=-2$ et $x=4$.

L'aire de la figure délimitée par $y=x^2-3$ et $y=2x+5$ est alors donnée par
$\int_{-2}^{4} \left(2x+5-(x^2-3)\right) dx$ (fonction du haut - moins fonction du bas).

On a $\int_{-2}^{4}\left(2x+5-(x^2-3)\right)dx = \int_{-2}^{4}\left(2x+5-x^2+3\right)dx = \int_{-2}^{4}\left(-x^2+2x+8\right)dx =$

$= \left[-\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}+8x\right]_{-2}^{4} = \left[-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right]_{-2}^{4} =$

$= \left(-\frac{4^3}{3}+4^2+8\cdot 4\right)-\left(-\frac{(-2)^3}{3}+(-2)^2+8(-2)\right) =$

$= \left(-\frac{64}{3}+16+32\right)-\left(\frac{8}{3}+4-16\right) = \frac{80}{3}-\left(-\frac{28}{3}\right) = \frac{80}{3}+\frac{28}{3} = \frac{108}{3} = 36.$

Ainsi l'aire cherchée vaut 36.

Exercice 7

a) $f(x) = x\sin x + \cos x$: on a $x\sin x = u\cdot v$ avec $u = x$ et $v = \sin x$; ainsi $u' = 1$ et $v' = \cos x$ et $(x\sin x)' = u'v + uv' = 1\cdot\sin x + x\cos x = \sin x + x\cos x$;
par conséquent $f'(x) = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$.

b) $g(x) = \sin(x^3+3)$: c'est une fonction composée : $g(x) = u(v(x))$ avec $u(y) = \sin(y)$ et $v(x) = x^3+3$; on a $u'(y) = \cos(y)$ et $v'(x) = 3x^2$;
par conséquent $g'(x) = u'(v(x))\cdot v'(x) = \cos(x^3+3)\cdot 3x^2 = 3x^2\cos(x^3+3)$.

c) $h(x) = \sin^2(x^4) + \cos^2(x^4)$: on sait que $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ pour toute valeur de t ;
ainsi $h(x) = 1$ pour toute valeur de x et, par conséquent, $h'(x) = 0$.

Exercice 8

a) $f(x) = \frac{1}{\cos^3 x} = \frac{u}{v}$ avec $u=1$ et $v=\cos^3 x$; on a $u'=0$ et $v' = 3\cos^2 x \cdot (-\sin x) =$

$= -3\cos^2 x \sin x$; ainsi $f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{0\cdot\cos^3 x - 1\cdot(-3\cos^2 x\sin x)}{(\cos^3 x)^2} =$

$= \frac{3\cos^2 x \sin x}{\cos^6 x} = \frac{3\sin x}{\cos^4 x}$.

b) $g(x) = \tan^2\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = u(v(w(x)))$ avec $u(z) = z^2$, $v(y) = \tan y$ et $w(x) = \frac{1}{x^2+1}$;

on a $u'(z) = 2z$, $v'(z) = 1+\tan^2 y$ et $w'(x) = \frac{0\cdot(x^2+1) - 1\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$;

ainsi $g'(x) = u'(v(w(x))) \cdot v'(w(x)) \cdot w'(x) =$

$= 2\tan\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\left(1+\tan^2\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right)\cdot\frac{-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}\tan\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\left(1+\tan^2\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right)$.

c) $h(x) = \frac{\cos^2(x^3)-3}{x^2} = \frac{u}{v}$ avec $u = \cos^2(x^3)-3$ et $v = x^2$; on a

$u' = 2\cos(x^3)\cdot(-\sin(x^3))\cdot 3x^2 = -6x^2\cos(x^3)\sin(x^3)$ et $v' = 2x$; ainsi

$h'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{-6x^2\cos(x^3)\sin(x^3)\cdot x^2 - (\cos^2(x^3)-3)\cdot 2x}{(x^2)^2} =$

$= \frac{x(-6x^3\cos(x^3)\sin(x^3) - 2(\cos^2(x^3)-3))}{x^4} = \frac{-6x^3\cos(x^3)\sin(x^3) - 2(\cos^2(x^3)-3)}{x^3}$

Exercice 9

Le polynôme de Taylor de degré 3 de $f(x)$ autour de $x=a$ est donné par

$$p(x)= f(a)+ f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3.$$

Ici $a=0$ et on a $p(x)= f(0)+f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3.$

On a: $f(x)=\frac{1}{\cos x}$;

$$f'(x)=\frac{0.\cos x - 1.(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x};$$

$$f''(x)=\frac{\cos x.\cos^2 x - \sin x.2\cos x.(-\sin x)}{(\cos^2 x)^2}=\frac{\cos^3 x+2\cos x\sin^2 x}{\cos^4 x}=$$

$$=\frac{\cos x\,(\cos^2 x+2\sin^2 x)}{\cos^4 x}=\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{\cos^3 x}=\frac{2\cos^2 x+2\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos^3 x}=$$

$$=\frac{2(\cos^2 x+2\sin^2 x)-\cos^2 x}{\cos^3 x}=\frac{2.1-\cos^2 x}{\cos^3 x}=\frac{2}{\cos^3 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^3 x}=\frac{2}{\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x};$$

$$f'''(x)=\frac{0.\cos^3 x - 2\cdot 3\cos^2 x(-\sin x)}{(\cos^3 x)^2}-\frac{0\cdot\cos x - 1\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{6\cos^2 x\sin x}{\cos^6 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{6\sin x}{\cos^4 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

Ainsi: $f(0)=\frac{1}{\cos(0)}=\frac{1}{1}=1$;

$$f'(0)=\frac{\sin(0)}{\cos^2(0)}=\frac{0}{1^2}=0;$$

$$f''(0)=\frac{2}{\cos^3(0)}-\frac{1}{\cos(0)}=\frac{2}{1^3}-\frac{1}{1}=2-1=1;$$

$$f'''(0)=\frac{6\sin(0)}{\cos^4(0)}-\frac{\sin(0)}{\cos^2(0)}=\frac{6.0}{1^4}-\frac{0}{1^2}=0.$$

Le polynôme de degré ≤ 3 est donc $p(x)=1+\frac{1}{2}x^2.$

Avec $x=0,1$, on a $p(x)=1+\frac{1}{2}\cdot 0,1^2=1,005.$

Ainsi une valeur approchée de $f(0,1)$ est $1,005$.