SERIE 5
Corrigé

Exercice 1

a) $f(x) = \ln(\ln x)$ est une fonction composée.
Ainsi $f'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}$.

b) $g(x) = (\ln x)^x$: on va réécrire g différemment : avec $y = a^x$, on a
$x = \log_a y = \frac{\ln y}{\ln a} \Rightarrow \ln y = x \ln a \Rightarrow y = e^{x \ln a}$;
ici $a = \ln x$ et on peut donc écrire $g(x) = e^{x \ln(\ln x)}$.
On a alors $g'(x) = e^{x \ln(\ln x)} (x \ln(\ln x))'$.
On a $x \ln(\ln x) = u \cdot v$ avec $u = x$ et $v = \ln(\ln x)$; ainsi $u' = 1$ et $v' = \frac{1}{x \ln x}$
(voir a)) et on a $(x \ln(\ln x))' = u'v + uv' = 1 \cdot \ln(\ln x) + x \cdot \frac{1}{x \ln x} =$
$= \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}$.
Par conséquent, $g'(x) = e^{x \ln(\ln x)} \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right)$.
Comme $e^{x \ln(\ln x)} = g(x) = (\ln x)^x$, on obtient $g'(x) = (\ln x)^x \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right)$.

c) $h(x) = x^{\ln x}$: similairement à b), on peut écrire $h(x) = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{(\ln x)^2}$.
Ainsi $h'(x) = e^{(\ln x)^2} \cdot ((\ln x)^2)' = e^{(\ln x)^2} \cdot 2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x} = h(x) \cdot \frac{2 \ln(x)}{x} =$
$= x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x} = 2 \ln x \cdot x^{\ln x - 1}$.

Exercice 2

a) $f(x)=x^x$: on va réécrire f différemment : avec $y=a^x$, on a
$x=\log_a y=\frac{\ln y}{\ln a} \Rightarrow \ln y = x\ln a \Rightarrow y=e^{x\ln a}$;
ici $a=x$ et on peut écrire $f(x)=e^{x\ln x}$.

On a alors $f'(x)=e^{x\ln x}(x\ln x)'$.
On a $x\ln x = u\cdot v$ avec $u=x$ et $v=\ln x$; ainsi $u'=1$ et $v'=\frac{1}{x}$ et on a
$(x\ln x)'=u'v+uv'=1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$.

Par conséquent, $f'(x)=e^{x\ln x}(\ln x+1)$.
Comme $e^{x\ln x}=f(x)=x^x$, on obtient $f'(x)=x^x(\ln x+1)$.

b) $g(x)=x^{(x^x)}$: similairement à a), on peut écrire $g(x)=e^{x^x\ln x}$.
Ainsi $g'(x)=e^{x^x\ln x}\cdot(x^x\ln x)'$.

On a $x^x\ln x = u\cdot v$ avec $u=x^x$ et $v=\ln x$; ainsi $u'=x^x(\ln x+1)$ (voir a)) et $v'=\frac{1}{x}$ et on a $(x^x\ln x)'=u'v+uv'=x^x(\ln x+1)\ln x + x^x\cdot\frac{1}{x}=$
$=x^x(\ln x+1)\ln x + x^{x-1} = x^{x-1}\left(x(\ln x+1)\ln x+1\right)$.

Exercice 3

Le polynôme de Taylor de degré 2 de la fonction f autour de x_0 est donné par

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$ (voir Formulaires et Tables, p. 89).

On a $f(x) = 1 + \ln(1-2x)$.

Ainsi $f'(x) = \frac{1}{1-2x} \cdot (-2) = -\frac{2}{1-2x} = -2(1-2x)^{-1}$ et

$$f''(x) = -2 \cdot (-1)(1-2x)^{-2} \cdot (-2) = -4(1-2x)^{-2} = -\frac{4}{(1-2x)^2}.$$

En $x_0 = 0$, on a $f(x_0) = 1 + \ln(1-2\cdot 0) = 1 + \ln 1 = 1 + 0 = 1$,

$$f'(x_0) = -\frac{2}{1-2\cdot 0} = -\frac{2}{1} = -2 \quad \text{et}$$

$$f''(x_0) = -\frac{4}{(1-2\cdot 0)^2} = -\frac{4}{1^2} = -4.$$

Ainsi le polynôme de Taylor de degré 2 est

$$p(x) = 1 + (-2)(x-0) + \frac{-4}{2}(x-0)^2 = 1 - 2x - 2x^2.$$

Exercice 4

D'après Formulaires et Tables p. 80, le théorème fondamental du calcul intégral nous dit que, si F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ainsi, on a $\int_a^x f(t)\, dt = F(x) - F(a)$.

En dérivant cette égalité de chaque côté, on obtient :

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = F'(x).$$

Or, par définition, $F'(x) = f(x)$ (la dérivée de la primitive d'une fonction est cette fonction).

On en conclut donc que $\left(\int_a^x f(t)\, dt\right)' = f(x)$.

a) $f(x) = \int_{-1}^x \arcsin t\, dt \implies f'(x) = \left(\int_{-1}^x \arcsin t\, dt\right)' = \arcsin x.$

b) $g(x) = \int_1^x (t^2+1)\, dt \implies g'(x) = \left(\int_1^x (t^2+1)\, dt\right)' = x^2+1.$

Exercice 5

On a $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ et $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Ainsi $(\cosh x)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}\cdot(-1)) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$ et

$$(\sinh x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}\cdot(-1)) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x.$$

En autre $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$

$$= \frac{(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} =$$

$$= \frac{2+2}{4} = 1.$$

Exercice 6

a) $f(x) = e^{3\ln(2x)} + \ln(3e^{2x}) + \ln(\sqrt[3]{x-1})$:
on va commencer par simplifier cette fonction en utilisant les propriétés des logarithmes ($\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$ et $\ln(a^n) = n\ln a$):

on a: $e^{3\ln(2x)} = \left(e^{\ln(2x)}\right)^3 = (2x)^3 = 8x^3$;

$\ln(3e^{2x}) = \ln 3 + \ln(e^{2x}) = \ln 3 + 2x$;

$\ln(\sqrt[3]{x-1}) = \ln\left((x-1)^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\ln(x-1)$.

Ainsi, on peut écrire $f(x) = 8x^3 + \ln 3 + 2x + \frac{1}{3}\ln(x-1)$.

Par conséquent, $f'(x) = 8\cdot 3x^2 + 0 + 2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} = 24x^2 + 2 + \frac{1}{3(x-1)}$.

b) $g(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}}\right)$: on va aussi commencer par simplifier cette fonction:

on a $g(x) = \ln\left(\left(\frac{\tan x+1}{\tan x-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\tan x+1}{\tan x-1}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\ln(\tan x+1) - \ln(\tan x-1)\right)$.

Ainsi, $g'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan x+1}\cdot(\tan x+1)' - \frac{1}{\tan x-1}\cdot(\tan x-1)'\right)$.

Comme $(\tan x)' = \tan^2 x + 1$ (voir formulaires et tables p. 75), on obtient

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan x+1}(\tan^2 x+1) - \frac{1}{\tan x-1}(\tan^2 x+1)\right) =$$

$$= \frac{\tan^2 x+1}{2}\left(\frac{1}{\tan x+1} - \frac{1}{\tan x-1}\right) = \frac{\tan^2 x+1}{2}\cdot\frac{\tan x-1-(\tan x+1)}{(\tan x+1)(\tan x-1)} =$$

$$= \frac{\tan^2 x+1}{2}\cdot\frac{\tan x-1-\tan x-1}{\tan^2 x-1} = \frac{\tan^2 x+1}{2}\cdot\frac{-2}{\tan^2 x-1} =$$

$$= -\frac{\tan^2 x+1}{\tan^2 x-1} = \frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x}.$$

c) $h(x) = (\cos x)^x$: on va réécrire h différemment : avec $y = a^x$, on a
$x = \log_a y = \frac{\ln y}{\ln a} \Rightarrow \ln y = x\ln a \Rightarrow y = e^{x\ln a}$;
ici $a = \cos x$ et on peut écrire $h(x) = e^{x\ln(\cos x)}$.

On a alors $h'(x) = e^{x\ln(\cos x)}\left(x\ln(\cos x)\right)'$.

On a $x\ln(\cos x) = u\cdot v$ avec $u = x$ et $v = \ln(\cos x)$; ainsi $u' = 1$ et $v' =$
$= \frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$ et on a $(x\ln(\cos x))' = u'v + uv' =$
$= 1\cdot\ln(\cos x) + x\cdot(-\tan x) = \ln(\cos x) - x\tan x$.

Par conséquent $h'(x) = e^{x\ln(\cos x)}(\ln(\cos x) - x\tan x) = (\cos x)^x(\ln(\cos x) - x\tan x)$.

Exercice 7

L'approximation linéaire de f autour de x_0 est le polynôme de Taylor de degré 1 de f autour de x_0. Il est, d'après Formulaires et Tables p. 89,

$$L_{f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ici $f(x) = \ln x$.

On a $f'(x) = \frac{1}{x}$.

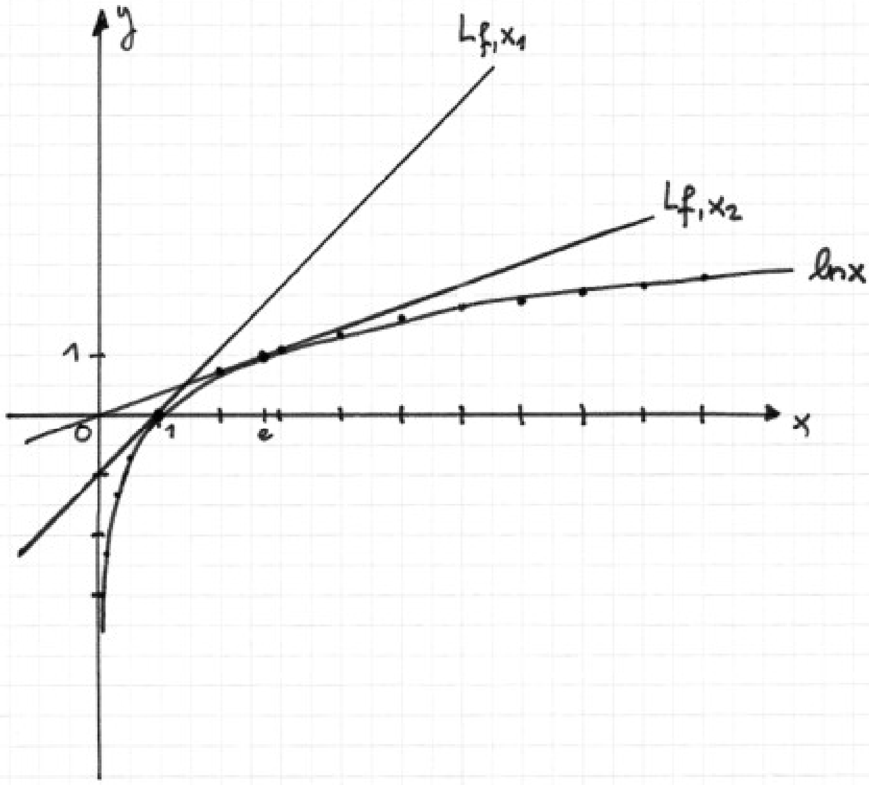
En $x_0 = x_1 = 1$, on a $f(x_0) = \ln 1 = 0$, $f'(x_0) = \frac{1}{1} = 1$.

On a ainsi $L_{f,x_1}(x) = 0 + 1(x-1) = x - 1$.

En $x_0 = x_2 = e$, on a $f(x_0) = \ln e = 1$, $f'(x_0) = \frac{1}{e}$.

On a ainsi $L_{f,x_2}(x) = 1 + \frac{1}{e}(x - e) = 1 + \frac{x}{e} - 1 = \frac{x}{e}$.

Graphiquement :



Exercice 8

D'après Formulaires et Tables p. 80, le théorème fondamental du calcul intégral nous dit que, si F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ainsi, on a $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$.

En dérivant cette égalité de chaque côté, on obtient :

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = F'(x).$$

Or, par définition, $F'(x) = f(x)$ (la dérivée de la primitive d'une fonction est cette fonction).

On en conclut donc que $\displaystyle\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$.

a) $\displaystyle f(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{t^3+1}}{t^2+4}\,dt \Longrightarrow f'(x) = \left(\int_0^x \frac{\sqrt{t^3+1}}{t^2+4}\,dt\right)' = \frac{\sqrt{x^3+1}}{x^2+4}$.

b) $\displaystyle g(x) = \int_1^x \frac{\cos u}{u}\,du \Longrightarrow g'(x) = \left(\int_1^x \frac{\cos u}{u}\,du\right)' = \frac{\cos x}{x}$.

Exercice 9

a) D'après Formulaires et Tables p. 89, le polynôme de Taylor de degré 5 de la fonction f autour de x_0 est:

$$p_5(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{IV}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 + \frac{f^{V}(x_0)}{5!}(x-x_0)^5.$$

Ici $f(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,dt$.

D'après le théorème fondamental du calcul intégral, on sait que $f'(x) = \cos(x^2)$.

De plus: $f''(x) = -\sin(x^2)\cdot 2x = -2x\sin(x^2) = u\cdot v$ avec $u = -2x$ et $v = \sin(x^2)$

$\Rightarrow u' = -2$ et $v' = 2x\cos(x^2) = 2x f'(x)$

$\Rightarrow f'''(x) = u'v + uv' = -2\sin(x^2) - 2x\cdot 2x f'(x) = -2\sin(x^2) - 4x^2 f'(x)$;

comme $(x^2 f'(x))' = 2x f'(x) + x^2 f''(x)$, on obtient

$$f^{IV}(x) = -2\cdot 2x\cos(x^2) - 4\left(2x f'(x) + x^2 f''(x)\right) = -4x f'(x) - 8x f'(x) - 4x^2 f''(x) = -12x f'(x) - 4x^2 f''(x);$$

comme $(x f'(x))' = f'(x) + x f''(x)$ et $(x^2 f''(x)) = 2x f''(x) + x^2 f'''(x)$,

on a $f^{V}(x) = -12\left(f'(x) + x f''(x)\right) - 4\left(2x f''(x) + x^2 f'''(x)\right) =$

$= -12 f'(x) - 12x f''(x) - 8x f''(x) - 4x^2 f'''(x) =$

$= -12 f'(x) - 20x f''(x) - 4x^2 f'''(x)$.

En résumé: $f(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,dt$, $f'(x) = \cos(x^2)$, $f''(x) = -2x\sin(x^2)$,

$f'''(x) = -2\sin(x^2) - 4x^2 f'(x)$, $f^{IV}(x) = -12x f'(x) - 4x^2 f''(x)$ et

$f^{V}(x) = -12 f'(x) - 20x f''(x) - 4x^2 f'''(x)$.

Ici, on a $x_0 = 0$. Ainsi $f(x_0) = \int_0^0 \cos(t^2)\,dt = 0$, $f'(x_0) = \cos(0^2) = 1$, $f''(x_0) = -2\cdot 0\sin(0^2) =$

$= 0$, $f'''(x_0) = -2\sin(0^2) - 4\cdot 0^2 f'(x_0) = 0$, $f^{IV}(x_0) = -12\cdot 0\cdot f'(x_0) - 4\cdot 0^2 f''(x_0) = 0$

et $f^{V}(x) = -12 f'(x_0) - 20\cdot 0\cdot f''(x_0) - 4\cdot 0^2\cdot f'''(x_0) = -12\cdot 1 = -12$.

Par conséquent, le polynôme de Taylor de degré 5 de f autour de $x_0 = 0$ est

$$p_5(x) = 0 + 1(x-0) + \frac{0}{2}(x-0)^2 + \frac{0}{3!}(x-0)^3 + \frac{0}{4!}(x-0)^4 + \frac{-12}{5!}(x-0)^5 =$$

$$= x - \frac{12}{120}x^5 = x - \frac{1}{10}x^5.$$

b) On a $p_5(1) = 1 - \frac{1}{10}1^5 = 1 - \frac{1}{10} = 0{,}9$. Ainsi on a $\int_0^1 \cos(t^2)\,dt \cong 0{,}9$.

L'erreur par rapport à la valeur exacte $0{,}90452424$ est : $\frac{0{,}90452424 - 0{,}9}{0{,}90452424} \cong 0{,}005 = 0{,}5\,\%$.