SERIE 7

Corrigé

---

①

<u>Exercice 1</u>

Pour échelonner et réduire la matrice A, on va utiliser la méthode d'échelonnement de Gauss.

$$\text{On a } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array}$$

En effectuant $L_2 - 2L_1$, la deuxième ligne devient : 0 -1 1 2.

On obtient alors la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1' \\ \leftarrow L_2' \\ \leftarrow L_3' \end{array}$$

En effectuant $L_3' - L_1'$, la troisième ligne devient : 0 -2 2 4.

On obtient alors la matrice

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1'' \\ \leftarrow L_2'' \\ \leftarrow L_3'' \end{array}$$

En effectuant $L_3'' - 2L_2''$, la troisième ligne devient : 0 0 0 0.

On obtient alors la matrice

$$A''' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est échelonnée. Pour la réduire (obtenir que des 1 comme premiers nombres non nuls dans chaque ligne), il suffit de multiplier la 2^e ligne par -1.
La matrice échelonnée et réduite équivalente à A est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

On doit résoudre le système
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + y + u = -5 \\ x + 2y - u = 2 \\ \phantom{x+{}} y + z + u = 1. \end{cases}$$

On va le résoudre en utilisant la méthode d'échelonnement de Gauss.

Le système peut s'écrire $A \cdot X = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

coefficients de x — coefficients de y — coefficients de z — coefficients de u — deuxièmes membres.

On écrit la matrice augmentée du système :

$$\hat{A} = (A|b) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \\ \leftarrow L_4 \end{array}$$

On effectue $L_2 - 2L_1$. On obtient :

$$\hat{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(1)} \\ \leftarrow L_2^{(1)} \\ \leftarrow L_3^{(1)} \\ \leftarrow L_4^{(1)} \end{array}$$

On effectue $L_3^{(1)} - L_1^{(1)}$. On obtient :

$$\hat{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(2)} \\ \leftarrow L_2^{(2)} \\ \leftarrow L_3^{(2)} \\ \leftarrow L_4^{(2)} \end{array}$$

On effectue $L_3^{(2)} - 2L_2^{(2)}$. On obtient :

$$\hat{A}^{(3)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(3)} \\ \leftarrow L_2^{(3)} \\ \leftarrow L_3^{(3)} \\ \leftarrow L_4^{(3)} \end{array}$$

On effectue $L_4^{(3)} - L_2^{(3)}$. On obtient :

$$\hat{A}^{(4)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(4)} \\ \leftarrow L_2^{(4)} \\ \leftarrow L_3^{(4)} \\ \leftarrow L_4^{(4)} \end{array}$$

On effectue $L_4^{(4)} - L_3^{(4)}$. On obtient : $\hat{A}^{(5)} = \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(5)} \\ \leftarrow L_2^{(5)} \\ \leftarrow L_3^{(5)} \\ \leftarrow L_4^{(5)} \end{array} \end{array}$

On effectue $\begin{cases} L_3^{(5)} : 3 \\ L_4^{(5)} : 3 \end{cases}$. On obtient : $\hat{A}^{(6)} = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A'} & \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ -5 \\ 4 \\ -2 \end{matrix}}_{b'} \end{array}\right)$

Le système $A \cdot X = b$ est alors équivalent au système $A' \cdot X = b'$, autrement dit à :

$$\begin{cases} x \quad + z = 0 & (1) \\ y - 2z + u = -5 & (2) \\ z - u = 4 & (3) \\ u = -2 & (4). \end{cases}$$

En substituant (4) dans (3), on obtient $z + 2 = 4 \Rightarrow z = 2$.

Par substitution dans (2), on obtient $y = 2z - u - 5 = 4 + 2 - 5 = 1$.

Par substitution dans (1), on obtient $x = -z = -2$

La solution du système est donc : $x = -2$, $y = 1$, $z = 2$ et $z = -2$.

Vérification :

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 \\ -4+1-2 \\ -2+2+2 \\ 1+2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = b.$$

Exercice 3

Pour calculer le produit de 2 matrices X et Y, il faut que le nombre de colonnes de X soit égal au nombre de lignes de Y.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & -3 \\ -3 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$A\cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$C\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$ est impossible car C a 3 colonnes et A 4 lignes.

$$B\cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ est impossible car B à 4 colonnes et C 3 lignes.

$$C\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La transposée de C est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi $$C + C^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La transposée de A est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 & -5 & 13 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \\ -5 & 3 & 14 & -14 \\ 13 & -5 & -14 & 26 \end{pmatrix}$.

On a $A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 8 & 39 & 8 \\ 1 & 8 & 11 \end{pmatrix}$.

Ainsi $A^t A + C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 8 & 39 & 8 \\ 1 & 8 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 0 \\ 8 & 39 & 9 \\ 1 & 8 & 11 \end{pmatrix}$.

A^2 est impossible car A a 3 colonnes et 4 lignes.

$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$C^3 = C^2 \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $C + C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi $A \cdot (C + C^2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Pour échelonner et réduire les matrices B et C, on va utiliser la méthode d'échelonnement de Gauss.

On a $B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \\ \leftarrow L_4 \end{array}$

On effectue $2L_2 - L_1$. On obtient $B^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(1)} \\ \leftarrow L_2^{(1)} \\ \leftarrow L_3^{(1)} \\ \leftarrow L_4^{(1)} \end{array}$

On effectue $2L_3^{(1)} - 3L_1^{(1)}$. On obtient $B^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & -3 & -10 & -4 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(2)} \\ \leftarrow L_2^{(2)} \\ \leftarrow L_3^{(2)} \\ \leftarrow L_4^{(2)} \end{array}$

On effectue $L_3^{(2)} + L_2^{(2)}$. On obtient $B^{(3)} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(3)} \\ \leftarrow L_2^{(3)} \\ \leftarrow L_3^{(3)} \\ \leftarrow L_4^{(3)} \end{array}$

On effectue $L_4^{(3)} + 2L_2^{(3)}$. On obtient $B^{(4)} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(4)} \\ \leftarrow L_2^{(4)} \\ \leftarrow L_3^{(4)} \\ \leftarrow L_4^{(4)} \end{array}$

On effectue $L_4^{(4)} - L_2^{(4)}$. On obtient $B^{(5)} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(5)} \\ \leftarrow L_2^{(5)} \\ \leftarrow L_3^{(5)} \\ \leftarrow L_4^{(5)} \end{array}$

On effectue $\begin{cases} L_1^{(5)} : (-2) \\ L_2^{(5)} : 3 \end{cases}$. On obtient $B^{(6)} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{10}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, matrice

échelonnée et réduite de B.

On a $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \\ \leftarrow L_4 \end{array}$

On effectue $L_2 - L_1$. On obtient $C^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(1)} \\ \leftarrow L_2^{(1)} \\ \leftarrow L_3^{(1)} \\ \leftarrow L_4^{(1)} \end{array}$

On effectue $L_3^{(1)} - 3L_1^{(1)}$. On obtient $C^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(2)} \\ \leftarrow L_2^{(2)} \\ \leftarrow L_3^{(2)} \\ \leftarrow L_4^{(2)} \end{array}$

On effectue $L_3^{(2)} - 2L_2^{(2)}$. On obtient $C^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(3)} \\ \leftarrow L_2^{(3)} \\ \leftarrow L_3^{(3)} \\ \leftarrow L_4^{(3)} \end{array}$

On effectue $L_4^{(3)} - 2L_1^{(3)}$. On obtient $C^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(4)} \\ \leftarrow L_2^{(4)} \\ \leftarrow L_3^{(4)} \\ \leftarrow L_4^{(4)} \end{array}$

On effectue $L_4^{(4)} - L_2^{(4)}$. On obtient $C^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(5)} \\ \leftarrow L_2^{(5)} \\ \leftarrow L_3^{(5)} \\ \leftarrow L_4^{(5)} \end{array}$

On effectue $2L_4^{(5)} + L_3^{(5)}$. On obtient $C^{(6)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(6)} \\ \leftarrow L_2^{(6)} \\ \leftarrow L_3^{(6)} \\ \leftarrow L_4^{(6)} \end{array}$

On effectue $L_3^{(6)} : (-2)$. On obtient $C^{(7)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, matrice échelonnée et réduite de C.

Exercice 5

On doit résoudre le système
$$\begin{cases} 3x + y - 2z + 4u = 3 \\ x + 2y - z + 7u = 4 \\ 2x + 2y + z + 3u = 4 \\ x - y - z + u = 1. \end{cases}$$

On va la résoudre en utilisant la méthode d'échelonnement de Gauss.

Le système peut s'écrire $A \cdot X = b$, où
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On écrit la matrice augmentée du système :
$$\hat{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \\ \leftarrow L_4 \end{array}$$

On effectue $3L_2 - L_1$. On obtient
$$\hat{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 17 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(1)} \\ \leftarrow L_2^{(1)} \\ \leftarrow L_3^{(1)} \\ \leftarrow L_4^{(1)} \end{array}$$

On effectue $3L_3^{(1)} - 2L_1^{(1)}$. On obtient
$$\hat{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 17 & 9 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(2)} \\ \leftarrow L_2^{(2)} \\ \leftarrow L_3^{(2)} \\ \leftarrow L_4^{(2)} \end{array}$$

On effectue $5L_3^{(2)} - 4L_2^{(2)}$. On obtient
$$\hat{A}^{(3)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 17 & 9 \\ 0 & 0 & 39 & -63 & -6 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(3)} \\ \leftarrow L_2^{(3)} \\ \leftarrow L_3^{(3)} \\ \leftarrow L_4^{(3)} \end{array}$$

On effectue $3L_4^{(3)} - L_1^{(3)}$. On obtient
$$\hat{A}^{(4)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 17 & 9 \\ 0 & 0 & 39 & -63 & -6 \\ 0 & -4 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(4)} \\ \leftarrow L_2^{(4)} \\ \leftarrow L_3^{(4)} \\ \leftarrow L_4^{(4)} \end{array}$$

On effectue $5L_4^{(4)} + 4L_3^{(4)}$. On obtient $\hat{A}^{(5)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 17 & 9 \\ 0 & 0 & 39 & -63 & -6 \\ 0 & 0 & -13 & 11 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(5)} \\ \leftarrow L_2^{(5)} \\ \leftarrow L_3^{(5)} \\ \leftarrow L_4^{(5)} \end{array}$

On effectue $3L_4^{(5)} + L_3^{(5)}$. On obtient $\hat{A}^{(6)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 17 & 9 \\ 0 & 0 & 39 & -63 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -30 & 30 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(6)} \\ \leftarrow L_2^{(6)} \\ \leftarrow L_3^{(6)} \\ \leftarrow L_4^{(6)} \end{array}$

On effectue $\begin{cases} L_1^{(6)} : 3 \\ L_2^{(6)} : 5 \\ L_3^{(6)} : 39 \\ L_4^{(6)} : (-30) \end{cases}$. On obtient $\hat{A}^{(7)} = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A'} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ \frac{9}{5} \\ -\frac{2}{13} \\ -1 \end{matrix}}_{b'} \right)$

Le système $A \cdot X = b$ est alors équivalent au système $A' \cdot X = b'$, autrement dit à :

$$\begin{cases} x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{4}{3}u = 1 & (1) \\ y - \frac{1}{5}z + \frac{17}{5}u = \frac{9}{5} & (2) \\ z - \frac{21}{13}u = -\frac{2}{13} & (3) \\ u = -1 & (4) \end{cases}$$

En substituant (4) dans (3), on obtient $z = \frac{21}{13}(-1) - \frac{2}{13} = -\frac{23}{13}$.

Par substitution dans (2), on obtient $y = \frac{1}{5}\left(-\frac{23}{13}\right) - \frac{17}{5}(-1) + \frac{9}{5} = \frac{63}{13}$.

Par substitution dans (1), on obtient $x = -\frac{1}{3} \cdot \frac{63}{13} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{23}{13}\right) - \frac{4}{3} \cdot (-1) + 1 = -\frac{6}{13}$.

La solution du système est donc $x = -\frac{6}{13}$, $y = \frac{63}{13}$, $z = -\frac{23}{13}$ et $u = -1$.

Vérification :

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{6}{13} \\ \frac{63}{13} \\ -\frac{23}{13} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

On doit résoudre le système $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - 2y - z - u = 3 \\ x + 3y + 2z + u = 5 \\ 3x + 4y + 3z + 3u = 7. \end{cases}$

On va essayer de le résoudre en utilisant la méthode d'échelonnage de Gauss.
Le système peut s'écrire $A \cdot X = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

On écrit la matrice augmentée du système:

$$\hat{A} = (A|b) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 7 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \\ \leftarrow L_4 \end{array} \end{array}$$

On effectue $2L_2 - L_1$. On obtient $$\hat{A}^{(1)} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 7 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(1)} \\ \leftarrow L_2^{(1)} \\ \leftarrow L_3^{(1)} \\ \leftarrow L_4^{(1)} \end{array} \end{array}$$

On effectue $2L_3^{(1)} - L_1^{(1)}$. On obtient $$\hat{A}^{(2)} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 7 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(3)} \\ \leftarrow L_2^{(3)} \\ \leftarrow L_3^{(3)} \\ \leftarrow L_4^{(4)} \end{array} \end{array}$$

On effectue $L_3^{(3)} + L_2^{(3)}$. On obtient $$\hat{A}^{(3)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 7 \end{array}\right).$$

La troisième ligne nous donnera une relation de la forme $0 = 14$, ce qui est impossible.
Ainsi le système n'a aucune solution.

Exercice 7

On doit résoudre le système
$$\begin{cases} 4x+4y-3z+3u=0 \\ 3x+2y+z+2u=0 \\ 2x \quad\quad +5z+u=0 \\ x+2y-4z+u=0. \end{cases}$$

Il est clair que $x=y=z=u=0$ est solution de ce système.
Il faut voir s'il n'en a pas d'autres, auquel cas il aurait une infinité de solution.
On va essayer de résoudre ce système avec la méthode d'échelonnement de Gauss.
Le système peut s'écrire $A.X=b$, où

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On écrit la matrice augmentée du système:
$$\hat{A}=(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \\ \leftarrow L_4 \end{array}$$

On effectue $4L_2-3L_1$. On obtient $\hat{A}^{(1)}=\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 13 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(1)} \\ \leftarrow L_2^{(1)} \\ \leftarrow L_3^{(1)} \\ \leftarrow L_4^{(1)} \end{array}$

On effectue $2L_3^{(1)}-L_1^{(1)}$. On obtient $\hat{A}^{(2)}=\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 13 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 13 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(2)} \\ \leftarrow L_2^{(2)} \\ \leftarrow L_3^{(2)} \\ \leftarrow L_4^{(2)} \end{array}$

On effectue $L_3^{(2)}-L_3^{(1)}$. On obtient $\hat{A}^{(3)}=\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 13 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(3)} \\ \leftarrow L_2^{(3)} \\ \leftarrow L_3^{(3)} \\ \leftarrow L_4^{(3)} \end{array}$

On effectue $4L_4^{(3)}-L_1^{(3)}$. On obtient $\hat{A}^{(4)}=\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 13 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -13 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(4)} \\ \leftarrow L_2^{(4)} \\ \leftarrow L_3^{(4)} \\ \leftarrow L_4^{(4)} \end{array}$

On effectue $L_4^{(4)} + L_2^{(4)}$. On obtient $\hat{A}^{(5)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 13 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, avec A' la matrice des quatre premières colonnes et b' la dernière colonne.

Le système $A \cdot X = b$ est alors équivalent au système $A' \cdot X = b'$, autrement dit à :

$$\begin{cases} 4x + 4y - 3z + 3u = 0 \\ \quad -4y + 13z - u = 0 \end{cases}.$$

Ainsi le système a une infinité de solutions dont les inconnues doivent satisfaire : $\begin{cases} 4x + 4y - 3z + 3u = 0 \\ \quad -4y + 13z - u = 0. \end{cases}$