SERIE 8

Corrigé

Exercice 1

On veut que le système $\begin{cases} x-2y+3z+u=a \\ x+3y-2z+u=b \\ x-7y+8z+u=c \end{cases}$ ait des solutions.

On va utiliser la méthode d'échelonnement de Gauss.

Le système peut s'écrire $A\cdot X=b$, où

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -7 & 8 & 1 \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \text{ et } b=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On écrit la matrice augmentée du système:

$$\hat{A}=(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & a \\ 1 & 3 & -2 & 1 & b \\ 1 & -7 & 8 & 1 & c \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array}$$

On effectue L_2-L_1. On obtient $\hat{A}^{(1)}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & a \\ 0 & 5 & -5 & 0 & b-a \\ 1 & -7 & 8 & 1 & c \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(1)} \\ \leftarrow L_2^{(1)} \\ \leftarrow L_3^{(1)} \end{array}$

On effectue $L_3^{(1)}-L_1^{(1)}$. On obtient $\hat{A}^{(2)}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & a \\ 0 & 5 & -5 & 0 & b-a \\ 0 & -5 & 5 & 0 & c-a \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(2)} \\ \leftarrow L_2^{(2)} \\ \leftarrow L_3^{(2)} \end{array}$

On effectue $L_3^{(2)}+L_2^{(2)}$. On obtient $\hat{A}^{(3)}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & a \\ 0 & 5 & -5 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+c-2a \end{array}\right).$

Ainsi, pour que le système ait des solutions, il faut que $b+c-2a=0$, c'est-à-dire $b+c=2a$.

Si $b+c=2a$, on obtient alors

$$\hat{A}^{(3)}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & a \\ 0 & 5 & -5 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Le système $A\cdot X=b$ peut alors s'écrire $\hat{A}'\cdot X=b'$ où $b'=\begin{pmatrix} a \\ b-a \\ 0 \end{pmatrix}$,

autrement dit: $\begin{cases} x-2y+3z+u=a \\ \quad 5y-5z \quad =b-a \end{cases}$

Les solutions du système sont alors les x,y,z et u tels que $5y-5z=b-a$ et $x+u=a+2y-3z$.

Exercice 2.

3 vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ sont linéairement indépendants si $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=0$ implique forcément $x=y=z=0$.
Autrement dit, 3 vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont linéairement indépendants si l'unique solution de $A \cdot X = 0$ est $X=0$, où $A(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (matrice formée des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$), $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a. Ici, la matrice A est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et on doit montrer que l'unique solution de $AX=0$ est 0 pour que les vecteurs soient linéairement indépendants.
On va utiliser la méthode d'échelonnement de Gauss.
La matrice augmentée du système est

$$\hat{A} = (A|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array}$$

On échange L_2 et L_3. On obtient $\hat{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(1)} \\ \leftarrow L_2^{(1)} \\ \leftarrow L_3^{(1)} \end{array}$.

On effectue $L_3^{(1)} - 4L_1^{(1)}$. On obtient $\hat{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(2)} \\ \leftarrow L_2^{(2)} \\ \leftarrow L_3^{(2)} \end{array}$.

On effectue $L_3^{(2)} - L_2^{(2)}$. On obtient $\hat{A}^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, ce qui correspond au système $\hat{A}^{(3)} X = 0$: $\begin{cases} x \quad\ + 2z = 0 \\ \quad y - 3z = 0 \end{cases}$.

Or ce système a une infinité de solutions (par exemple : $x=-2$, $y=3$ et $z=1$) qui sont non nulles.
Ainsi $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ ne sont pas linéairement indépendants.

b. Ici, la matrice A est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on doit montrer que l'unique solution de $AX=0$ est 0 pour que les vecteurs soient linéairement indépendants.
On va utiliser la méthode d'échelonnement de Gauss.
La matrice augmentée du système est

$$\hat{A} = (A|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array}$$

On échange L_2 et L_3. On obtient $\hat{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(1)} \\ \leftarrow L_2^{(1)} \\ \leftarrow L_3^{(1)} \end{array}$

On effectue $L_3^{(1)} - 4L_1^{(1)}$. On obtient $\hat{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(2)} \\ \leftarrow L_2^{(2)} \\ \leftarrow L_3^{(2)} \end{array}$

On effectue $L_3^{(2)} - L_2^{(2)}$. On obtient $\hat{A}^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \end{array}\right)$, ce qui correspond au systême $\hat{A}^{(3)}X = 0$: $\begin{cases} x \quad\quad +3z = 0 \\ \quad y \quad\quad = 0 \\ \quad\quad -10z = 0 \end{cases}$, dont l'unique solution est

clairement $x = y = z = 0$.

Ainsi $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont linéairement indépendants.

Exercice 3

Le système à résoudre peut s'écrire $A\cdot X = O$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \text{ et } O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On va utiliser la méthode d'échelonnement de Gauss.

On écrit la matrice augmentée du système :

$$\hat{A} = (A|O) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \\ \leftarrow L_4 \end{array}$$

On effectue $L_2 - 4L_1$. On obtient $\hat{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -11 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(1)} \\ \leftarrow L_2^{(1)} \\ \leftarrow L_3^{(1)} \\ \leftarrow L_4^{(1)} \end{array}$

On effectue $L_3^{(1)} - 4L_1^{(1)}$. On obtient $\hat{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -11 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -18 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(2)} \\ \leftarrow L_2^{(2)} \\ \leftarrow L_3^{(2)} \\ \leftarrow L_4^{(2)} \end{array}$

On effectue $L_3^{(2)} - 2L_2^{(2)}$. On obtient $\hat{A}^{(3)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(3)} \\ \leftarrow L_2^{(3)} \\ \leftarrow L_3^{(3)} \\ \leftarrow L_4^{(3)} \end{array}$

On intervertit $L_4^{(3)}$ et $L_3^{(3)}$. On obtient $\hat{A}^{(4)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -11 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(4)} \\ \leftarrow L_2^{(4)} \\ \leftarrow L_3^{(4)} \\ \leftarrow L_4^{(4)} \end{array}$

On effectue $L_3^{(4)} - L_1^{(4)}$. On obtient $\hat{A}^{(5)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -11 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(5)} \\ \leftarrow L_2^{(5)} \\ \leftarrow L_3^{(5)} \\ \leftarrow L_4^{(5)} \end{array}$

On effectue $L_3^{(5)} - L_2^{(5)}$. On obtient $\hat{A}^{(6)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(6)} \\ \leftarrow L_2^{(6)} \\ \leftarrow L_3^{(6)} \\ \leftarrow L_4^{(6)} \end{array}$

On effectue $L_4^{(6)} - 2L_3^{(6)}$. On obtient $\hat{A}^{(7)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, ce qui équivaut

au système $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4u = 0 \\ -3y - 6z - 11u = 0 \\ 2u = 0 \end{cases}$. On en déduit $u = 0$ et le système s'écrit

$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -3y - 6z = 0 \end{cases}$. On en déduit $y = -2z$ et il reste la relation $x - z = 0$.

Ainsi la solution générale du système est $\begin{cases} x = z \\ y = -2z \\ u = 0 \end{cases}$.

Exercice 4

On a le système $\begin{cases} 5x+8y+7z=a \\ -2x+y-7z=-2 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$, que l'on peut écrire $A\cdot X=b$, où

$A=\begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ -2 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b=\begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On va utiliser la méthode d'échelonnement de Gauss.

On écrit la matrice augmentée du système :

$$\hat{A}=(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 8 & 7 & a \\ -2 & 1 & -7 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array}.$$

On effectue $5L_2+2L_1$. On obtient $\hat{A}^{(1)}=\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 8 & 7 & a \\ 0 & 21 & -21 & 2a-10 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(1)} \\ \leftarrow L_2^{(1)} \\ \leftarrow L_3^{(1)} \end{array}$

On effectue $5L_3^{(1)}-L_1^{(1)}$. On obtient $\hat{A}^{(2)}=\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 8 & 7 & a \\ 0 & 21 & -21 & 2a-10 \\ 0 & -3 & 3 & 5-a \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow L_1^{(2)} \\ \leftarrow L_2^{(2)} \\ \leftarrow L_2^{(2)} \end{array}$

On effectue $7L_3^{(2)}+L_2^{(2)}$. On obtient $\hat{A}^{(3)}=\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 8 & 7 & a \\ 0 & 21 & -21 & 2a-10 \\ 0 & 0 & 0 & 7(5-a)+2a-10 \end{array}\right)$.

Pour que le système ait au moins une solution, on doit avoir

$7(5-a)+2a-10=0 \Rightarrow 35-7a+2a-10=0 \Rightarrow -5a+25=0 \Rightarrow 5a=25$
$\Rightarrow a=5$.

Ainsi, si $a=5$, le système a au moins une solution.

Avec $a=5$, on a $\hat{A}^{(3)}=\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 8 & 7 & 5 \\ 0 & 21 & -21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, ce qui équivaut au système

$\begin{cases} 5x+8y+7z=3 \\ 21y-21z=0 \end{cases}$. On en déduit $y=z$ et le système devient $5x+15y=5$

Ainsi la solution générale du système est $x+3y=1$ et $z=y$.

Exercice 5

Les matrices A, B, C et D seront indépendantes si $x\cdot A + y\cdot B + z\cdot C + u\cdot D = 0$ implique forcément que $x=y=z=u=0$.

On a
$$xA+yB+zC+uD = x\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0&1\\4&0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}0&3\\1&2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}x&2x\\x&2x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&y\\4y&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z&2z\\z&z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&3u\\u&2u\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}x+z & 2x+y+2z+3u\\ x+4y+z+u & 2x+z+2u\end{pmatrix}.$$

Ainsi $xA+yB+zC+uD=0 \implies \begin{cases} x + z = 0\\ 2x+y+2z+3u=0\\ x+4y+z+u=0\\ 2x+z+2u=0\end{cases}$, système d'équations que l'on peut écrire $A\cdot X=b$, où

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\2&1&2&3\\1&4&1&1\\2&0&1&2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\u\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

On va utiliser la méthode d'échelonnement de Gauss.

On écrit la matrice augmentée du système:
$$\hat{A}=(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&0\\2&1&2&3&0\\1&4&1&1&0\\2&0&1&2&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\leftarrow L_1\\\leftarrow L_2\\\leftarrow L_3\\\leftarrow L_4\end{array}$$

On effectue L_2-2L_1. On obtient $\hat{A}^{(1)}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&0\\0&1&0&3&0\\1&4&1&1&0\\2&0&1&2&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\leftarrow L_1^{(1)}\\\leftarrow L_2^{(1)}\\\leftarrow L_3^{(1)}\\\leftarrow L_4^{(1)}\end{array}$

On effectue $L_3^{(1)}-L_1^{(1)}$. On obtient $\hat{A}^{(2)}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&0\\0&1&0&3&0\\0&4&0&1&0\\2&0&1&2&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\leftarrow L_1^{(2)}\\\leftarrow L_2^{(2)}\\\leftarrow L_3^{(2)}\\\leftarrow L_4^{(2)}\end{array}$

On effectue $L_3^{(2)}-4L_2^{(2)}$. On obtient $\hat{A}^{(3)}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&0\\0&1&0&3&0\\0&0&0&-11&0\\2&0&1&2&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\leftarrow L_1^{(3)}\\\leftarrow L_2^{(3)}\\\leftarrow L_3^{(3)}\\\leftarrow L_4^{(3)}\end{array}$

On échange $L_4^{(3)}$ et $L_3^{(3)}$. On obtient $\hat{A}^{(4)}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&0\\0&1&0&3&0\\2&0&1&2&0\\0&0&0&-11&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\leftarrow L_1^{(4)}\\\leftarrow L_2^{(4)}\\\leftarrow L_3^{(4)}\\\leftarrow L_4^{(4)}\end{array}$

On effectue $L_3^{(4)}-2L_1^{(4)}$. On obtient $\hat{A}^{(5)}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&0\\0&1&0&3&0\\0&0&-1&2&0\\0&0&0&-11&0\end{array}\right).$

Le système $A\cdot X=b$ est alors équivalent au système $\hat{A}'\cdot X=b'$, où

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}, \quad b' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$ autrement dit au système

$$\begin{cases} x + z = 0 & (1) \\ y + 3u = 0 & (2) \\ -z + 2u = 0 & (3) \\ -11u = 0 & (4) \end{cases}$$

De (4), on tire $u=0$.

Par substitution dans (2) et (3), on tire $y=0$ et $z=0$.

Par substitution dans (1), on tire $x=0$.

On a ainsi $x=y=z=u=0$ et les matrices A, B, C et D sont linéairement indépendantes.

Exercice 6

Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est une partie non vide W de $\mathbb{R}^n$ qui satisfait aux deux conditions suivantes:

1) Si u_1 et $u_2 \in W$, alors $u_1 + u_2 \in W$;

2) si $u \in W$, alors $k.u \in W$, pour tout $k \in W$.

a) Soit $u_1 = (x_1; y_1; z_1)$ et $u_2 = (x_2; y_2; z_2)$ des éléments de $W_1 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$.
On a alors $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$.
De plus $u_1 + u_2 = (x_1 + x_2 ; y_1 + y_2 ; z_1 + z_2)$.
On a $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$. Ainsi $u_1 + u_2 \in W_1$.
La condition 1) est bien remplie.
Soit $u = (x;y;z) \in W_1$ et $k \in \mathbb{R}$. On a $x = y$.
On a $ku = (kx; ky; kz)$. De plus $kx = ky$. Ainsi $ku \in W_1$.
La condition 2) est aussi remplie.
W_1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soit $u_1 = (x_1; y_1; z_1)$ et $u_2 = (x_2; y_2; z_2)$ des éléments de $W_2 = \{(x;y;2x-y) \in \mathbb{R}^3 :$
$x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x;y;z) \in \mathbb{R} : z = 2x - y\}$.
On a alors $z_1 = 2x_1 - y_1$ et $z_2 = 2x_2 - y_2$.
De plus $u_1 + u_2 = (x_1 + x_2 ; y_1 + y_2 ; z_1 + z_2)$.
On a $z_1 + z_2 = 2x_1 - y_1 + 2x_2 - y_2 = 2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)$. Ainsi $u_1 + u_2 \in W_2$.
La condition 1) est bien remplie.
Soit $u = (x;y;z) \in W_2$ et $k \in \mathbb{R}$. On a $z = 2x - y$.
On a $ku = (kx; ky; kz)$. De plus $kz = k(2x-y) = 2kx - ky$. Ainsi $ku \in W_2$.
La condition 2) est aussi remplie.
W_2 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b) Soit $u_1 = (x_1; y_1)$ et $u_2 = (x_2; y_2)$ des éléments de $W_3 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3\}$.
On a alors $y_1 = x_1^3$ et $y_2 = x_2^3$.
De plus $u_1 + u_2 = (x_1 + x_2 ; y_1 + y_2)$.
On a $y_1 + y_2 = x_1^3 + x_2^3 \neq (x_1 + x_2)^3$.
La condition 1) n'est pas remplie et W_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Soit $u_1 = (x_1; y_1)$ et $u_2 = (x_2; y_2)$ des élément de $W_4 = \{(x; x-1) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\} =$
$= \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : y = x - 1$.

On a alors $y_1 = x_1 - 1$ et $y_2 = x_2 - 2$.

De plus $u_1 + u_2 = (x_1 + x_2 ; y_1 + y_2)$.

On a $y_1 + y_2 = x_1 - 1 + x_2 - 1 = x_1 + x_2 - 2 \neq (x_1 + x_2) - 1$.

La condition 1) n'est pas remplie et W_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7

On doit calculer $\int_0^{\sqrt{\pi}} \cos(t^2)\, t\, dt$.

On va procéder par changement de variables.
Posons $u = t^2$. On a alors $u' = \frac{du}{dt} = 2t \Rightarrow du = 2t\, dt \Rightarrow t\, dt = \frac{1}{2} du$.

Ainsi $\int \cos(t^2)\, t\, dt = \int \cos(u) \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int \cos(u)\, du = \frac{1}{2} \sin(u) = \frac{1}{2} \sin(t^2)$.

Par conséquent $\int_0^{\sqrt{\pi}} \cos(t^2)\, t\, dt = \frac{1}{2} \sin(t^2) \Big|_0^{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2} \sin((\sqrt{\pi})^2) - \frac{1}{2} \sin(0^2) =$

$= \frac{1}{2} \sin(\pi) - \frac{1}{2} \sin(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$