Série 9
CORRIGE

Exercice 1

1. a) Le rang d'une matrice est le nombre de lignes (ou de colonnes) non nulles de la matrice échelonnée correspondante.

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{matrix}$

On effectue $L_2 - 2L_1$ et $L_3 - L_1$. On obtient $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1' \\ \leftarrow L_2' \\ \leftarrow L_3' \end{matrix}$

On effectue $L_3' - 2L_2'$. On obtient $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi le rang de la matrice A est 2.

b) Une base du sous-espace des lignes de la matrice A (il en existe une infinité) correspond à une base du sous-espace de la matrice A''. Les lignes de A'' sont $(1; 2; 0; 1; -1)$ et $(0; -1; 1; 2; -1)$ (la 3^e est nulle).

Ainsi une base du sous-espace des lignes de la matrice A est $(1; 2; 0; 1; -1)$ et $(0; -1; 1; 2; -1)$.

c) On a $AX = \vec{0}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ w \end{pmatrix}$ et $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le système $AX = \vec{0}$ correspondra au système $A''X = \vec{0}$ où $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le système s'écrit donc $\begin{cases} x + 2y + u - w = 0 & (1) \\ -y + z + 2u - w = 0 & (2) \end{cases}$.

On effectue $(2) + 2\cdot(1)$. On obtient le système $\begin{cases} x + 2y + u - w = 0 \\ z + 4u - 3w = 0 \end{cases}$, que l'on peut écrire $\begin{cases} x = -2y - u + w \\ z = -4u + 3w \end{cases}$.

Ainsi, si on choisit des valeurs pour y, u et w, alors x et z sont fixés par les relations ci-dessus. Il y a donc 3 "paramètres" : y, u et w.

Par conséquent, la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par les solutions de $AX = \vec{0}$ est 3 (qui correspond aux 3 "paramètres").

Si $y = 1$, $u = 0$ et $w = 0$, on a $x = -2$ et $z = 0$. Cela nous donne le vecteur $(-2; 1; 0; 0; 0)$.

Si $y = 0$, $u = 1$ et $w = 0$, on a $x = -1$ et $z = -4$. Cela nous donne le vecteur $(-1; 0; -4; 1; 0)$.

Si $y = 0$, $u = 0$ et $w = 1$, on a $x = 1$ et $z = 3$. Cela nous donne le vecteur $(1; 0; 3; 0; 1)$.

②

Toutes les solutions du système $AX = \vec{0}$ seront donnés par une combinaison linéaire des vecteurs $(-2; 1; 0; 0; 0)$, $(-1; 0; -4; 1; 0)$ et $(1; 0; 3; 0; 1)$.

Par conséquent, $(-2; 1; 0; 0; 0)$, $(-1; 0; -4; 1; 0)$ et $(1; 0; 3; 0; 1)$ constituent une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par les solutions du système d'équations linéaires homogènes $AX = \vec{0}$.

Exercice 2

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, on a $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$

$$= 1 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(3 \cdot 3 - 8 \cdot 1) + 1(4 \cdot 3 - 2 \cdot 8) - 1(4 \cdot 1 - 2 \cdot 3) =$$

$$= 9 - 8 + 12 - 16 - 4 + 6 = -1 \neq 0.$$

Ainsi A est inversible.

Pour trouver A^{-1}, la matrice inverse de A, on va diagonaliser A et, en parallèle, effectuer sur la matrice identité I les mêmes opérations que sur les lignes de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{matrix}$$

$$L_2 - 4L_1 : \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 12 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad I^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{matrix}$$

$$L_3 - 2L_1 : \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 12 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad I^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{matrix}$$

$$L_3 - L_2 : \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \quad I^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{matrix}$$

$$L_1 + L_2 : \quad A^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 \\ 0 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \quad I^{(4)} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{matrix}$$

$$7L_1 + 11L_3 : \quad A^{(5)} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \quad I^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 11 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{matrix}$$

$$7L_2 + 12L_3 : \quad A^{(6)} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \quad I^{(6)} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 11 \\ -4 & -5 & 12 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 : 7 \\ L_2 : -7 \\ L_3 : -7 \end{matrix} : \quad A^{(7)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I^{(7)} = \begin{pmatrix} 1/7 & -4/7 & 11/7 \\ -4/7 & -5/7 & 12/7 \\ 2/7 & -1/7 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & -4/7 & 11/7 \\ -4/7 & -5/7 & 12/7 \\ 2/7 & -1/7 & 1/7 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes (ou de colonnes) non nulles de la matrice échelonnée correspondante.

On a $A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \\ \leftarrow L_4 \end{array}$

On effectue $L_4 - L_1$. On obtient : $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1' \\ \leftarrow L_2' \\ \leftarrow L_3' \\ \leftarrow L_4' \end{array}$

On effectue $L_4' - L_2'$. On obtient : $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1'' \\ \leftarrow L_2'' \\ \leftarrow L_3'' \\ \leftarrow L_4'' \end{array}$

On effectue $L_4'' - L_3''$. On obtient : $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi le rang de la matrice A est 4.

On a $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 7 & 7 & 11 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \\ \leftarrow L_4 \end{array}$

On effectue $2L_2 - 3L_1$. On obtient : $B' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 7 & 7 & 11 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1' \\ \leftarrow L_2' \\ \leftarrow L_3' \\ \leftarrow L_4' \end{array}$

On effectue $2L_3' - L_1'$. On obtient : $B'' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & -5 \\ 0 & 7 & -2 & -5 \\ 7 & 7 & 11 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1'' \\ \leftarrow L_2'' \\ \leftarrow L_3'' \\ \leftarrow L_4'' \end{array}$

On effectue $L_3'' - L_2'$. On obtient : $B''' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & 11 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1''' \\ \leftarrow L_2''' \\ \leftarrow L_3''' \\ \leftarrow L_4''' \end{array}$

On effectue $2L_4''' - 7L_1'''$. On obtient : $B^{IV} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & -6 & -15 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1^{IV} \\ \leftarrow L_2^{IV} \\ \leftarrow L_3^{IV} \\ \leftarrow L_4^{IV} \end{array}$

On effectue $L_4^{IV} - 3L_3^{IV}$. On obtient : $B^{V} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi le rang de la matrice B est 2.

Exercice 4

a) Le rang d'une matrice est le nombre de lignes (ou de colonnes) non nulles de la matrice échelonnée correspondante.

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array}$

On effectue $L_2 - 2L_1$ et $L_3 - 3L_1$. On obtient $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & -6 & -7 \\ 0 & -6 & -6 & -7 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1' \\ \leftarrow L_2' \\ \leftarrow L_3' \end{array}$

On effectue $5L_3' - 6L_2'$. On obtient $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi le rang de la matrice A est 3.

b) Une base du sous-espace des lignes de la matrice A (il en existe une infinité) correspond à une base du sous-espace des lignes de la matrice A''. Les lignes de A'' sont $(1;2;1;3;5)$, $(0;-5;-5;-6;-7)$ et $(0;0;0;1;2)$.

Ainsi une base du sous-espace des lignes de la matrice A est $(1;2;1;3;5)$, $(0;-5;-5;-6;-7)$ et $(0;0;0;1;2)$.

c) On a $AX = \vec{0}$, ce qui correspond à $A''X = \vec{0}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix}$ et $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le système s'écrit donc : $\begin{cases} x + 2y + z + 3u + 5v = 0 & (1) \\ -5y - 5z - 6u - 7v = 0 & (2) \\ u + 2v = 0 & (3) \end{cases}$

On effectue $(2) + 5\cdot(1)$. On obtient le système : $\begin{cases} x + 5y + 9u + 18v = 0 & (4) \\ -5y - 5z - 6u - 7v = 0 & (5) \\ u + 2v = 0 & (6). \end{cases}$

De (6), on tire $u = -2v$. Par substitution dans (4) et (5), on obtient le système

$$\begin{cases} x + 5y - 18v + 18v = 0 \\ -5y - 5z + 12v - 7v = 0 \\ u + 2v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 5y = 0 \\ -5y - 5z + 5v = 0 \\ u + 2v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5y \\ z = -y + v \\ u = -2v. \end{cases}$$

Ainsi, si on choisit des valeurs pour y et v, alors x, z et u sont fixés par les relations ci-dessus. Il y a donc 2 "paramètres" : y et v.

Par conséquent, la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par les solutions de $AX = \vec{0}$ est 2 (qui correspond aux 2 "paramètres").

Si $y = 1$ et $v = 0$, on a $x = -5$, $z = -1$ et $u = 0$.

Si $y = 0$ et $v = 1$, on a $x = 0$, $z = 1$ et $u = -2$.

Toutes les solutions du système $AX = \vec{0}$ seront données par une combinaison linéaire des vecteurs $(-5;1;-1;0;0)$ et $(0;0;1;-2;1)$. Par conséquent, ces 2 vecteurs constituent une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par les solutions du système d'équations linéaire homogène $AX = \vec{0}$.

Exercice 5

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Avec $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\det B = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$

$= 3(1\cdot1-3\cdot0) - 2(2\cdot1-4\cdot0) + 1(2\cdot3-4\cdot1) = 3\cdot1 - 2\cdot2 + 6-4 = 3-4+6-4 = 1.$

Avec $C = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, on a $\det C = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} =$

$= 4(8-3) + 5(-12+2) + 6(9-4) = 4\cdot5 + 5\cdot(-10) + 6\cdot5 = 20-50+30 = 0.$

Ainsi B est inversible alors que C ne l'est pas.

Pour trouver B^{-1}, la matrice inverse de B, on va diagonaliser B et, en parallèle, effectuer sur la matrice identité I les mêmes opérations que sur les lignes de B.

$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array}$

$3L_2 - 2L_1$: $B^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $I^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array}$

$3L_3 - 4L_1$: $B^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $I^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array}$

$L_3 + L_2$: $B^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $I^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array}$

$2L_2 + L_1$: $B^{(4)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $I^{(4)} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array}$

$L_3 + L_1$: $B^{(5)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $I^{(5)} = \begin{pmatrix} -9 & 9 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array}$

$2L_3 + 3L_2$: $B^{(6)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $I^{(6)} = \begin{pmatrix} -9 & 9 & 3 \\ -24 & 15 & 6 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array}$

$L_1 : 3$
$L_2 : (-3)$
$L_3 : 3$: $B^{(7)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I^{(7)} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 8 & -5 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 8 & -5 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.