Exercice 1

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ (on ne peut pas diviser par 0 et $x^2+y^2 \geqslant 0$ pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$).
Comme les fonctions xy, x^2+y^2 et $\sqrt{x^2+y^2}$ sont clairement continue sur $\mathbb{R}^2$, on en déduit que f est continue sur son domaine de définition.
Ainsi <u>f est continue en dehors de $(x;y)=(0;0)$.</u>

Montrons maintenant que f est aussi continue en $(0;0)$, autrement dit que $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = 0$ (valeur donnée de f si $(x;y)=(0;0)$).
On doit donc montrer que $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

En utilisant l'identité remarquable $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ et, comme $(x+y)^2 \geqslant 0$, on obtient $x^2+2xy+y^2 \geqslant 0$, d'où $2xy \geqslant -(x^2+y^2)$ et $xy \geqslant -\frac{1}{2}(x^2+y^2)$.
En utilisant l'identité remarquable $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$ et, comme $(x-y)^2 \geqslant 0$, on obtient $x^2-2xy+y^2 \geqslant 0$, d'où $2xy \leqslant x^2+y^2$ et $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.
Pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors les inégalités suivantes :

$$-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leqslant xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

En divisant chaque membre de ces inégalités par $\sqrt{x^2+y^2}$ avec $(x;y) \neq (0;0)$ (on a $\sqrt{x^2+y^2} > 0$ si $(x;y) \neq (0;0)$), on obtient

$$-\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\text{d'où } -\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \leqslant \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Or $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$.
On a donc la situation suivante : $g(x;y) \leqslant f(x;y) \leqslant h(x;y)$ avec

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} g(x;y) = 0 \text{ et } \lim_{(x;y)\to(0;0)} h(x;y) = 0.$$

On en déduit alors que $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = 0$.

Ainsi <u>f est aussi continue en $(0;0)$.</u>

Exercice 2

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^2 - \{(0;0)\}$ (on ne peut pas diviser par 0 et $x^2+y^2=0$ uniquement si $(x;y)=(0;0)$).
Comme les fonctions x^2-y^2 et x^2+y^2 sont clairement continue sur $\mathbb{R}^2$, on en déduit que f est continue sur son domaine de définition.
Ainsi <u>f est continue en dehors de $(x;y)=(0;0)$.</u>

On va montrer maintenant que $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ n'existe pas, ce qui dira que f n'est pas continue en $(0;0)$.
Commençons par chercher $\lim\limits_{\substack{(x;y)\to(a;0)\\ a\neq 0}} f(x;y)$:

On a $\lim\limits_{\substack{(x;y)\to(a;0)\\ a\neq 0}} f(x;y) = \lim\limits_{\substack{(x;y)\to(a;0)\\ a\neq 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{a^2}{a^2} = 1.$

Cherchons maintenant $\lim\limits_{\substack{(x;y)\to(0;b)\\ b\neq 0}} f(x;y)$:

On a $\lim\limits_{\substack{(x;y)\to(0;b)\\ b\neq 0}} f(x;y) = \lim\limits_{\substack{(x;y)\to(0;b)\\ b\neq 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{-b^2}{b^2} = -1.$

Si $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ existait, on devrait avoir

$$\lim_{a\to 0} \lim_{\substack{(x;y)\to(a;0)\\ a\neq 0}} f(x;y) = \lim_{b\to 0} \lim_{\substack{(x;y)\to(0;b)\\ b\neq 0}} f(x;y)$$

(une fonction est continue si elle amène au même résultat pour un point peu importe par quel chemin on va vers le point).

Comme ce n'est pas le cas $(1 \neq -1)$, on en déduit que $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ n'existe pas.
Ainsi <u>f n'est pas continue en $(0;0)$.</u>

Exercice 3

$$f(x;y) = \begin{cases} x+y & \text{si } x+y \leq 0 \\ xy+\sqrt{x+y} & \text{si } x+y > 0. \end{cases}$$

$x+y$ est définie sur $\mathbb{R}^2$.

Avec $x+y > 0$, $xy+\sqrt{x+y}$ est toujours définie.

On en déduit que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^2$.

$x+y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

xy et $\sqrt{x+y}$ sont continue pour tout $(x;y)$ tel que $x+y>0$.

On en déduit que f est continue pour tout $(x;y)$ tels que $x+y \neq 0$ (autrement dit f est continue sauf sur la frontière entre $x+y \leq 0$ et $x+y>0$, c'est-à-dire sauf sur $x+y=0$).

Cherchons maintenant ce qu'il se passe en $x+y=0$, c'est-à-dire $y=-x$.

Avec $y=-x$, on a : $x+y = x+(-x) = x-x = 0$

$$xy+\sqrt{x+y} = x(-x)+\sqrt{x+(-x)} = -x^2+\sqrt{x-x} = -x^2.$$

Comme $-x^2 \neq 0$, sauf si $x=0$ (comme $y=-x$, si $x=0$, on a aussi $y=0$), on en déduit que f est continue en $(0;0)$ et discontinue en $(x;y)$ avec $x \neq 0$ et $y=-x$.

En résumé : f est continue sur tout $\mathbb{R}^2$ sauf aux points $(x;y)$ tels que $x\neq 0$ et $y=-x$ et elle est discontinue en $(x;y)$ tels que $x \neq 0$ et $y=-x$.

Exercice 4

$$f_1(x;y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^2}{(xy)^2-(x-y)^2} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

On va chercher $\lim_{(x;y)\to(0;0)} f_1(x;y)$. Si elle vaut 0, f_1 sera continue en $(0;0)$. Si elle ne vaut pas 0, f_1 sera discontinue en $(0;0)$.

Comme $(x-y)^2 \geqslant 0$, on a $(xy)^2-(x-y)^2 \leqslant (xy)^2$.

Ainsi $\dfrac{(xy)^2}{(xy)^2-(x-y)^2} \geqslant \dfrac{(xy)^2}{(xy)^2} \geqslant 1$.

On aura alors $\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) \geqslant 1$. Cette limite ne peut donc pas valoir 0.

Ainsi <u>$f_1(x;y)$ est discontinue en $(0;0)$.</u>

$$f_2(x;y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{\frac{x^2}{9}+4y^2}} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

On va chercher $\lim_{(x;y)\to(0;0)} f_2(x;y)$. Si elle vaut 0, f_2 sera continue en $(0;0)$. Si elle ne vaut pas 0, f_2 sera discontinue en $(0;0)$.

On remarque tout d'abord que :

$$\frac{1}{9}(x^2+y^2) = \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9} \leqslant \frac{x^2}{9}+4y^2 \leqslant 4x^2+4y^2 = 4(x^2+y^2) \qquad (x;y)\neq(0;0).$$

On a alors :
$$\sqrt{\frac{1}{9}(x^2+y^2)} \leqslant \sqrt{\frac{x^2}{9}+4y^2} \leqslant \sqrt{4(x^2+y^2)} \qquad (x;y)\neq(0;0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2} \leqslant \sqrt{\frac{x^2}{9}+4y^2} \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2} \qquad (x;y)\neq(0;0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{9}+4y^2}} \leqslant \frac{1}{\frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (x;y)\neq(0;0).$$

Si $xy > 0$, on obtient : $\dfrac{xy}{2\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \dfrac{xy}{\sqrt{\frac{x^2}{9}+4y^2}} \leqslant \dfrac{xy}{\frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2}}$ (1).

Si $xy < 0$, on obtient : $\dfrac{xy}{\frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \dfrac{xy}{\sqrt{\frac{x^2}{9}+4y^2}} \leqslant \dfrac{xy}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ (2).

En utilisant l'identité remarquable $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ et, comme $(x+y)^2 \geqslant 0$, on obtient $x^2+2xy+y^2 \geqslant 0$, d'où $2xy \geqslant -(x^2+y^2)$ et $xy \geqslant -\frac{1}{2}(x^2+y^2)$.
En utilisant l'identité remarquable $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$ et, comme $(x-y)^2 \geqslant 0$,

on obtient $x^2 - 2xy + y^2 \geqslant 0$ d'où $2xy \leq x^2+y^2$ et $xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.
Pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors les inégalités suivantes :

$$-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \quad (3).$$

En combinant (1) et (3), on obtient pour $xy > 0$ (on a $\sqrt{x^2+y^2} > 0$)

$$\frac{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{xy}{2\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{xy}{\sqrt{\frac{x^2}{9}+4y^2}} \leq \frac{xy}{\frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Comme $\frac{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}$ et $\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2}$, on obtient les inégalités $-\frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{xy}{\sqrt{\frac{x^2}{9}+4y^2}} \leq \frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ (4).

En combinant (2) et (3), on obtient pour $xy < 0$ (on a $\sqrt{x^2+y^2} > 0$)

$$\frac{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{xy}{\frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{xy}{\sqrt{\frac{x^2}{9}+4y^2}} \leq \frac{xy}{2\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Comme $\frac{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ et $\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}$, on obtient les inégalités $-\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{xy}{\sqrt{\frac{x^2}{9}+4y^2}} \leq \frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}$ (5).

On obtient ainsi :

Si $xy > 0$: $-\frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{xy}{\sqrt{\frac{x^2}{9}+4y^2}} \leq \frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ (4)

Si $xy < 0$: $-\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{xy}{\sqrt{\frac{x^2}{9}+4y^2}} \leq \frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}$ (5).

Comme, dans tous les cas, $\lim_{(x;y)\to(0;0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$, on en déduit, également dans tous les cas, que $\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{\sqrt{\frac{x^2}{9}+4y^2}} = 0$, c'est-à-dire $\lim_{(x;y)\to(0;0)} f_2(x;y) = 0$.

Ainsi <u>$f_2(x;y)$ est continue en $(0;0)$.</u>