Exercice 1

(i) Paramétrisation de l'axe des X $\Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0. \end{cases}$

Paramétrisation de la droite $x=y \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t. \end{cases}$

Paramétrisation de la parabole $y=x^2 \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t^2. \end{cases}$

(ii) On doit calculer $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ le long des trois courbes paramétrisées.

Selon l'axe des x: $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t^2.0}{t^4+0^2} = \underline{\underline{0}}.$

Selon la droite x=y: $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t^2.t}{t^4+t^2} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{t^3}{t^4+t^2} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{t^2+1} = \underline{\underline{0}}.$

Selon la parabole $x=y^2$: $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t^2.t^2}{t^4+t^4} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{t^4}{2t^4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$

(iii) Si la limite de $f(x;y)$ lorsque $(x;y)\to(0;0)$ existait, toutes les limites selon tous les chemins possibles devraient égales.
Comme ce n'est pas le cas ici, $\underline{\underline{\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) \text{ n'existe pas.}}}$

Exercice 2

(i) $\lim\limits_{(x;y)\to(-1;2)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{-1\cdot 2}{(-1)^2+2^2} = -\frac{2}{5}.$

(ii) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^2+3x}{4x-xy} = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x(x+3)}{x(4-y)} = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x+3}{4-y} = \frac{3}{4}.$

Exercice 3

On a $f(x;y) = \sin(x)\cos(y) + xy$.

$f_x(x;y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x;y)$ est la dérivée de f par rapport à x (y est alors considéré comme fixe).

Ainsi $f_x(x;y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin(x)\cos(y) + xy\right) = \underline{\underline{\cos(x)\cos(y) + y}}$.

Similairement $f_y(x;y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin(x)\cos(y) + xy\right) = \sin(x)\cdot(-\sin(y)) + x$

$= \underline{\underline{-\sin(x)\sin(y) + x}}$.