Complément au corrigé de la série 5

1.(i) Pour pouvoir montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent partout, il faut commencer par montrer que f est continue partout. Le seul point posant des problèmes est le point $(0;0)$. Il faut, pour que f soit continue, montrer que $\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = 0$ (voir corrigé).

Le calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}$ (on dérive f par rapport à x en considérant y constant) ne pose pas de problème (voir corrigé).

Pour montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existent partout, comme $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, il faut montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(0;0)$ existe.

On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x\neq 0}} \frac{f(\Delta x;0)-f(0;0)}{\Delta x}$ par définition de la dérivée.

On trouve alors que $\frac{\partial f}{\partial x}(0;0)$ existe et donc que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe partout.

Comme $f(x;y)$ est symétrique par rapport à x et y (c'est-à-dire que f ne change pas si on intervertit x et y), on conclut que $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe aussi partout.

(ii) Pour montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0;0)$, on calcule $\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$ de deux manières différentes (voir corrigé), et, comme on n'obtient pas le même résultat, on en conclut que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0;0)$.

2.(i) Comme dans l'exercice 1, pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ partout, il faut commencer par montrer que f est continue partout. Le seul point posant problème étant $(0;0)$, on montre que $\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)=0$ (voir corrigé) et on en déduit que f est continue partout. On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en utilisant la définition de la dérivée.

(ii) Dans le corrigé de cette exercice, la première partie (ii) est inutile car on ne demande pas explicitement $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Par définition, une fonction f est différentiable en $(a;b)$ s'il existe une application linéaire $L(h;k) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\lim_{(h;k)\to(0;0)} \frac{f(a+h;b+k)-f(a;b)-L(h;k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

(c'est la définition que j'utilise ; il peut y en avoir d'autres, équivalentes à celle-ci).

En prenant $L(h;k)=0$, on conclut dans le corrigé et en utilisant la définition que f est différentiable en $(0;0)$.

(iii) Pour calculer la $1^{ère}$ limite, on montre que, en valeur absolue, on est inférieur

à quelque chose qui va vers zéro. La limite est donc 0.
Pour la deuxième limite, on montre qu'elle s'écrit comme le produit de 2 expressions dont la limite n'existe pas. Donc la limite globale n'existe pas.