1. On a $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0). \end{cases}$

(i) Montrons tout d'abord que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$.

Montrons que f est aussi continue en $(0;0)$:

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2y^2\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{xy\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}} = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}} = \text{"}\frac{1}{+\infty}\text{"} = 0.$$

Ainsi f est bien continue sur $\mathbb{R}^2$.

Calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y)$ pour $(x;y) \neq (0;0)$.

On a: $f(x;y) = \dfrac{u}{v}$ avec $u = xy$ et $v = \sqrt{x^2+y^2}$.

Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u' = \dfrac{\partial u}{\partial x} = y$ et $v' = \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Donc $$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = \frac{\frac{y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 - x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{y(x^2+y^2)-x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)} = \frac{x^2y+y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Calculons maintenant $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0;0)$.

On a $$\frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x\neq 0}} \frac{f(\Delta x;0)-f(0;0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x\neq 0}} \frac{\frac{\Delta x \cdot 0}{\sqrt{\Delta x^2+0^2}}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x\neq 0}} \frac{\frac{0}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x\neq 0}} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe pour tout $(x;y)$ et on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{si } (x;y)\neq(0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0). \end{cases}$

Par symétrie, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe pour tout $(x;y)$ et on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{si } (x;y)\neq(0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0). \end{cases}$

(ii) On a $$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{(y^2)^{3/2}} = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^3} = 1.$$

Or $$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{(x^2)^{3/2}} = 0.$$

Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0;0)$.

2. On a $f(x;y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0). \end{cases}$

(i) Montrons tout d'abord que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0;0)\}$.

Montrons que f est aussi continue en $(0;0)$.

Comme $|\sin(u)| \leq 1$, $\forall u \in \mathbb{R}$, on a $\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq 1, \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$.

Ainsi $|f(x;y)| \leq (x^2+y^2)\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq x^2+y^2$, $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$.

Comme $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} (x^2+y^2) = 0$, on a alors clairement $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = 0$.

Ainsi f est bien continue sur $\mathbb{R}^2$.

Calculons maintenant $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0;0)$.

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x;0) - f(0;0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2}}\right)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)$.

Comme $\left|\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)\right| \leq 1$, on a $\left|\Delta x \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)\right| \leq \Delta x$.

Comme $\Delta x \to 0$, on en conclut que $\frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = 0$.

Par symétrie on aura $\frac{\partial f}{\partial y}(0;0) = 0$.

(ii) Cherchons $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(x;y) \neq (0;0)$.

On a $f(x;y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = u \cdot v$ avec $u = x^2+y^2$ et $v = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

On aura $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = u'v + uv'$ avec $u' = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ et

$v' = \frac{\partial v}{\partial x} = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'$.

On doit donc chercher la dérivée de $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = (x^2+y^2)^{-1/2}$.

Elle vaut $\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)' = -\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-3/2} \cdot 2x = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

Ainsi $v' = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \cdot \left(-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

On obtient donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x^2+y^2)\cdot\left(-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right) =$$

$$= 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Par symétrie, on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 2y\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

(ii) Par définition, la fonction f sera différentiable en $(0;0)$ s'il existe une application linéaire $L(h;k): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{(h;k)\to(0;0)} \frac{f(0+h;0+k) - f(0;0) - L(h;k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

On a : $f(0+h;0+k) = f(h;k) = (h^2+k^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)$;

$f(0;0) = 0$;

$f(0+h;0+k) - f(0;0) = (h^2+k^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)$;

$$\frac{f(0+h;0+k) - f(0;0) - L(h;k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{(h^2+k^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) - L(h;k)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \sqrt{h^2+k^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) - \frac{L(h;k)}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Comme $|\sin(u)| \leq 1$, $\forall u \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{(h;k)\to(0;0)} \left|\sqrt{h^2+k^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)\right| = \lim_{(h;k)\to(0;0)} \sqrt{h^2+k^2}\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)\right| \leq$$

$$\leq \lim_{(h;k)\to(0;0)} \sqrt{h^2+k^2} = 0, \text{ d'où } \lim_{(h;k)\to(0;0)} \sqrt{h^2+k^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) = 0.$$

En choisissant $L(h;k) = 0$ comme fonction linéaire de h et k, on obtient :

$$\lim_{(h;k)\to(0;0)} \frac{f(0+h;0+k) - f(0;0) - L(h;k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h;k)\to(0;0)} \sqrt{h^2+k^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) = 0.$$

Par conséquent, f est bien différentiable en $(0;0)$.

(iii) Comme $|\sin(u)| \leq 1$, $\forall u \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \left|x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| = \lim_{(x;y)\to(0;0)} |x|\cdot\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq$$

$$\leq \lim_{(x;y)\to(0;0)} |x| = 0.$$

Ainsi $\lim_{(x;y)\to(0;0)} x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ <u>existe</u> et vaut 0.

On a $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{|y|} \cos\left(\dfrac{1}{|y|}\right) =$

$= \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0.$

De plus $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|} \cos\left(\dfrac{1}{|x|}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)\cdot \cos\left(\dfrac{1}{|x|}\right)$ où $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ n'existe pas et que $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{1}{|x|}\right)$ n'existe pas non plus, on conclut que $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ n'existe pas.