1. L'équation du plan tangent à la surface d'équation $f(x;y;z)=0$ au point $(x_0;y_0;z_0)$ est donnée par l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0;z_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)(z-z_0)=0.$$

Ici, on a la surface $z=x^2y$, que l'on peut écrire $z-x^2y=0$.
On a donc la surface d'équation $f(x;y;z)=0$ avec $f(x;y;z)=z-x^2y$.
De plus, le point concerné est $(2;1;4)$. Ainsi $x_0=2$; $y_0=1$; $z_0=4$.

On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y;z)=-2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y;z)=-x^2$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x;y;z)=1$.

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)=-2x_0y_0=-2\cdot 2\cdot 1=-4$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0;z_0)=-x_0^2=-2^2=-4$ et

$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)=1$.

Le plan tangent s'écrit donc : $-4(x-2)-4(y-1)+1(z-4)=0$

$\Rightarrow -4x+8-4y+4+z-4=0$

$\Rightarrow -4x-4y+z+8=0 \Rightarrow \underline{\underline{4x+4y-z-8=0.}}$

2. L'équation du plan tangent à la surface d'équation $f(x;y;z)=0$ au point $(x_0;y_0;z_0)$ est donné par l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0;z_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)(z-z_0)=0.$$

Ici, on a la surface $x^2+y^2+z^2=25$ (sphère de centre $(0;0;0)$ et de rayon 5), que l'on peut écrire $x^2+y^2+z^2-25=0$.
On a alors la surface d'équation $f(x;y;z)=0$ avec $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2-25$.
De plus, le point concerné est $(-3;0;4)$. Ainsi $x_0=-3$, $y_0=0$, $z_0=4$.

On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y;z)=2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y;z)=2y$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x;y;z)=2z$.

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)=2x_0=-6$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0;z_0)=2y_0=0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)=2z_0=8$.

Le plan tangent s'écrit donc : $-6(x+3)+0(y-0)+8(z-4)=0$

$\Rightarrow -6x-18+8z-32 \Rightarrow -6x+8z-50=0$

$\Rightarrow \underline{\underline{3x-4z+25=0.}}$

3. Pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, les coordonnées des points critiques sont les solutions des équations $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 0$.

Pour déterminer si un point critique est un extremum relatif ou un col, on étudie les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point critique concerné. La matrice hessienne de f en un point $(x_0;y_0)$ est

$$\mathrm{Hess}_{(x_0;y_0)}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0;y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0;y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0;y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0;y_0) \end{pmatrix}.$$

On pose $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0;y_0) = r$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0;y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0;y_0) = s$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0;y_0) = t$.

Une valeur propre d'une matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ est un nombre λ tel que $A\vec{v_0} = \lambda \vec{v_0}$ où $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Dans le cas de la matrice hessienne $\mathrm{Hess}_{(x_0;y_0)}(f)$, $rt - s^2$ est son déterminant et le produit de ses valeurs propres, tandis que $r+t$ est sa trace et la somme des valeurs propres.

Pour ce que l'on demande ici, la nature d'un point critique $(x_0;y_0)$ dépend des signes de r et de $rt - s^2$:

- si $rt - s^2 < 0$, alors $(x_0;y_0)$ correspond à un col ;
- si $rt - s^2 > 0$, alors $(x_0;y_0)$ correspond à un extremum relatif ;
- si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, alors $(x_0;y_0)$ correspond à un minimum relatif ;
- si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, alors $(x_0;y_0)$ correspond à un maximum relatif.

Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien conclure ; on peut avoir un col ou un extremum relatif. Il faudrait étudier les dérivées partielles d'ordre supérieur à 2.

(i) On a $f(x;y) = 2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x + 8y + 1$.

Calculons $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 4x + 4y + 4$ et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 4x + 6y + 8.$$

Cherchons les points critiques de f, à savoir la ou les solutions de $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 0$:

on doit ainsi résoudre le système $\begin{cases} 4x + 4y + 4 = 0 \\ 4x + 6y + 8 = 0 \end{cases}$;

en soustrayant la 1e équation de la 2e, on obtient : $2y+4=0 \Rightarrow 2y=-4$
$\Rightarrow y=-2$;

avec $y=-2$, on obtient $4x+4\cdot(-2)+4=0 \Rightarrow 4x-8+4=0 \Rightarrow 4x-4=0$
$\Rightarrow 4x=4 \Rightarrow x=1$;

ainsi l'unique point critique de f est $(1;-2)$.

Calculons maintenant r, s et t : on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)=4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y)=$
$=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y)=4$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=6$;

ainsi $r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1;-2)=4$, $s=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1;-2)=4$ et $t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1;-2)=6$.

On peut alors calculer $rt-s^2$: $rt-s^2=4\cdot6-4^2=24-16=8$.

Comme $r=4>0$ et $rt-s^2=8>0$, on en conclut que l'unique point critique de f, $(1;-2)$ est un minimum relatif.

(ii) On a $f(x;y)=x^2-4xy+3y^2-6x+12y-1$.

Calculons $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=2x-4y-6$ et
$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=-4x+6y+12$.

Cherchons les points critiques de f, à savoir la ou les solution de $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=0$:

on doit résoudre le système : $\begin{cases} 2x-4y-6=0 \\ -4x+6y+12=0 \end{cases}$;

en additionnant la 2e équation à 2 fois la première, on obtient : $-2y=0 \Rightarrow y=0$;

avec $y=0$, on obtient $2x-6=0 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$;

ainsi l'unique point critique de f est $(3;0)$.

Calculons maintenant r, s et t : on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y)=$
$=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y)=-4$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=6$;

ainsi $r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3;0)=2$, $s=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3;0)=-4$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3;0)=6$.

On peut alors calculer $rt-s^2$: $rt-s^2=2\cdot6-(-4)^2=12-16=-4$.

Comme $rt-s^2<0$, on en conclut que la fonction n'a pas d'extremum relatif et uniquement un col en $(3;0)$.

(iii) On a $f(x;y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.

Calculons $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 3x^2 - 3$ et

$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 3y^2 - 12$.

Cherchons les points critiques de f, à savoir la ou les solutions de $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 0$:

on doit résoudre le système $\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 12 = 0 \end{cases}$;

de la 1^e équation, on tire $3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$;

de la 2^e équation, on tire $3y^2 = 12 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$;

on obtient ainsi 4 points critiques différents : $(1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$.

Pour chacun de ces points, on va maintenant chercher les signes de r et de $rt - s^2$:

on a tout d'abord $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) = 0$ et

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = 6y$;

pour $(1;1)$: on a $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1;1) = 6$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1;1) = 0$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1;1) = 6$;

ainsi $r = 6 > 0$ et $rt - s^2 = 6 \cdot 6 - 0^2 = 36 > 0$

$\Rightarrow$ $(1;1)$ est un minimum relatif de f;

pour $(1;-1)$: on a $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1;-1) = 6$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1;-1) = 0$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1;-1) = -6$;

ainsi $r = 6 > 0$ et $rt - s^2 = 6 \cdot (-6) - 0^2 = -36 < 0$

$\Rightarrow$ $(1;-1)$ est un col;

pour $(-1;1)$: on a $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1;1) = -6$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1;1) = 0$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1;1) = 6$;

ainsi $r = -6 < 0$ et $rt - s^2 = -6 \cdot 6 - 0^2 = -36 < 0$

$\Rightarrow$ $(-1;1)$ est un col;

pour $(-1;-1)$: on a $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1;-1) = -6$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1;-1) = 0$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1;-1) = -6$;

ainsi $r = -6 < 0$ et $rt - s^2 = -6 \cdot (-6) - 0^2 = 36 > 0$

$\Rightarrow$ $(-1;-1)$ est un maximum relatif.