1. La longueur du graphe de la fonction $f : [0; \frac{5}{9}] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t) = t^{3/2}$, est donné par $L = \int_0^{5/9} \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$.

On a $f'(t) = \frac{3}{2} t^{1/2}$.

Ainsi $(f'(t))^2 = \left(\frac{3}{2} t^{1/2}\right)^2 = \frac{9}{4} t$ et

$$\sqrt{1 + (f'(t))^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4} t}.$$

Une primitive de $\sqrt{x}$ étant $\frac{2}{3} x \sqrt{x} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$, une primitive de $\sqrt{1 + \frac{9}{4} t}$ est $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} \left(1 + \frac{9}{4} t\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4} t\right)^{3/2}$

En $t = \frac{5}{9}$, cette primitive vaut $\frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{9}\right)^{3/2} = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{5}{4}\right)^{3/2} =$

$$= \frac{8}{27} \left(\frac{9}{4}\right)^{3/2} = \frac{8}{27} \left(\sqrt{\frac{9}{4}}\right)^3 = \frac{8}{27} \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{8}{27} \cdot \frac{27}{8} = 1.$$

En $t = 0$, cette primitive vaut $\frac{8}{27} (1)^{3/2} = \frac{8}{27}$.

Ainsi, on a $L = 1 - \frac{8}{27} = \underline{\underline{\frac{19}{27}}}$.

2. La longueur d'une courbe $x : [a;b] \to \mathbb{R}^3$, $x(t) = (f(t); g(t); h(t))$ est donnée par $L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}\, dt$. Ici $a = 0$ et $b = \frac{4}{3}$.

On a $f(t) = \cos(t) \Rightarrow f'(t) = -\sin(t)$

$g(t) = \sin(t) \Rightarrow g'(t) = \cos(t)$

$h(t) = t^{3/2} \Rightarrow h'(t) = \frac{3}{2} t^{1/2}$.

Par conséquent $\sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2} = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + (\frac{3}{2}t^{1/2})^2} =$

$= \sqrt{\underbrace{\sin^2(t) + \cos^2(t)}_{1} + \frac{9}{4}t} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}$.

Une primitive de $\sqrt{x}$ étant $\frac{2}{3} x\sqrt{x} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$, une primitive de $\sqrt{1+\frac{9}{4}t}$ est $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} \left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{3/2} = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{3/2}$.

La valeur de cette primitive en $t = b = \frac{4}{3}$ vaut $\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}\cdot\frac{4}{3}\right)^{3/2} =$

$= \frac{8}{27}(1+3)^{3/2} = \frac{8}{27} 4^{3/2} = \frac{8}{27}(\sqrt{4})^3 = \frac{8}{27}\cdot 2^3 = \frac{8}{27}\cdot 8 = \frac{64}{27}$.

En $t = a = 0$, la primitive vaut $\frac{8}{27}(1)^{3/2} = \frac{8}{27}$.

Ainsi, on a $L = \frac{64}{27} - \frac{8}{27} = \underline{\underline{\frac{56}{27}}}$.

3. On a la spirale $x : [-\pi ; \pi] \to \mathbb{R}^2$, $x(t) = (e^t \cos(t) ; e^t \sin(t))$.

(i) On va commencer par mettre la spirale sous forme polaire.

On a tout d'abord $r = \sqrt{(e^t \cos(t))^2 + (e^t \sin(t))^2} =$

$= \sqrt{e^{2t}\cos^2(t) + e^{2t}\sin^2(t)} = \sqrt{e^{2t}(\underbrace{\cos^2(t)+\sin^2(t)}_{1})} = \sqrt{e^{2t}} = e^t$.

Avec t étant l'angle par rapport à l'axe des abscisse, l'équation polaire de la fonction x est $r = e^t$.

L'angle τ entre le segment OP, où O est l'origine et P un point de la courbe, et la tangente à la courbe au point P est donné par $\tan(\tau) = \frac{f(\varphi)}{f'(\varphi)}$, où $r = f(\varphi)$ est l'équation polaire de la courbe (par abus de langage, on dira que τ est l'angle entre OP et la courbe).

Ici $\varphi = t$, $f(t) = e^t$ et $f'(t) = e^t$ aussi.

On a ainsi $\tan(\tau) = \frac{e^t}{e^t} = 1$ pour n'importe quel point de la courbe.

Or $\tan(\tau) = 1 \Rightarrow \tau = \frac{\pi}{4}$ rad $= 45°$, ce qui est bien ce qu'on voulait démontrer.

(ii) La longueur de la courbe est donnée par $L = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(g'(t))^2 + (h'(t))^2}\, dt$, où $g(t) = e^t \cos(t)$ et $h(t) = e^t \sin(t)$.

On a $g'(t) = e^t(-\sin(t)) + e^t \cos(t) = e^t(-\sin(t) + \cos(t))$.

Ainsi $(g'(t))^2 = (e^t(-\sin(t) + \cos(t)))^2 = e^{2t}(-\sin(t) + \cos(t))^2 =$

$= e^{2t}(\underbrace{\sin^2(t) + \cos^2(t)}_{1} - 2\sin(t)\cos(t)) =$

$= e^{2t}(1 - 2\sin(t)\cos(t))$.

De plus $h'(t) = e^t \cos(t) + e^t \sin(t) = e^t(\cos(t) + \sin(t))$.

D'où $(h'(t))^2 = (e^t(\cos(t) + \sin(t)))^2 = e^{2t}(\cos(t) + \sin(t))^2 =$

$= e^{2t}(\underbrace{\cos^2(t) + \sin^2(t)}_{1} + 2\cos(t)\sin(t)) =$

$= e^{2t}(1 + 2\sin(t)\cos(t))$.

On obtient donc $(g'(t))^2 + (h'(t))^2 = e^{2t}(1 - 2\sin(t)\cos(t)) + e^{2t}(1 + 2\sin(t)\cos(t)) =$

$= e^{2t}(1 - \cancel{2\sin(t)\cos(t)} + 1 + \cancel{2\sin(t)\cos(t)}) = 2e^{2t}$

Ainsi $\sqrt{(g'(t))^2+(h'(t))^2} = \sqrt{2e^{2t}} = \sqrt{2}\sqrt{e^{2t}} = \sqrt{2}\,e^t$.

Une primitive de $\sqrt{2}e^t$ est $\sqrt{2}e^t$.
En $t=\pi$, elle vaut $\sqrt{2}e^{\pi}$.
En $t=-\pi$, elle vaut $\sqrt{2}e^{-\pi}$.
On obtient ainsi $L = \sqrt{2}e^{\pi} - \sqrt{2}e^{-\pi} = \underline{\underline{\sqrt{2}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}}$.