Champ vectoriel

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ (ou de $\mathbb{R}^2$).
Un <u>champ vectoriel</u> est une fonction $\vec{F}$ qui fait correspondre à chaque point $(x;y;z)$ de E un vecteur de dimension trois : $\vec{F}(x;y;z)$.

Si f est une fonction scalaire de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (elle est dite scalaire car ses images sont des nombres et non pas des vecteurs), on définit son <u>gradient</u> par

$$\overrightarrow{grad} f = \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Le gradient d'une fonction scalaire de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est un champ vectoriel défini sur $\mathbb{R}^3$.

Un champ vectoriel est dit <u>champ vectoriel conservatif</u> s'il est l'opposé du gradient d'une certaine fonction scalaire, c'est-à-dire s'il existe une fonction scalaire f telle que $\vec{F} = -\overrightarrow{grad} f = -\vec{\nabla} f$, $\vec{F}$ étant le champ vectoriel.

Pour un champ vectoriel $\vec{F}$, on définit son rotationnel par :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}, \text{ avec } \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

On peut démontrer que dire que le champ vectoriel $\vec{F}$ est commutatif est équivalent à avoir $\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$.
Le moyen le plus simple de vérifier qu'un champ vectoriel est conservatif est de vérifier que $\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$.

Le <u>travail d'un champ vectoriel $\vec{F}$ le long du chemin C</u> est donné par l'intégrale curviligne : $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Si on paramétrise la courbe C par : $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$, on peut alors écrire

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left(F_x \cdot f'(t) + F_y \cdot g'(t) + F_z \cdot h'(t) \right) dt$$, où F_x, F_y et F_z sont les

composantes de $\vec{F}$ exprimées avec le paramètre λ et a et b sont les nombres pour le paramètre t correspondant au départ et à la fin de la courbe C (elle doit être orientée).

Si le champ vectoriel $\vec{F}$ est conservatif, il existe donc une fonction scalaire f telle que $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, f = -\vec{\nabla} f$. f est parfois appelée <u>fonction potentiel</u> ou <u>potentiel</u> de $\vec{F}$. Dans ce cas, le travail du champ $\vec{F}$ le long du chemin C est donné par $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(A) - f(B)$, où A est le point de départ de C et B sa fin. Si, en plus, la courbe C est fermée, alors $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ (puisque $A = B$).

1. On a :

$$\vec{F}(x;y;z) = \begin{pmatrix} y^2z^3 \\ 1+2xyz^3 \\ 4z+3xy^2z^2 \end{pmatrix}.$$

On cherche f, potentiel de $\vec{F}$. On doit donc avoir $\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$.

On doit donc avoir :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y^2z^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -(1+2xyz^3) = -1-2xyz^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -(4z+3xy^2z^2) = -4z-3xy^2z^3.$$

De $\frac{\partial f}{\partial x} = -y^2z^3$, on déduit que $f = g(y;z) - xy^2z^3$.

Avec $f = g(y;z) - xy^2z^3$, on a $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}(y;z) - 2xyz^3$.

Comme $\frac{\partial f}{\partial y} = -1-2xyz^3$, on en déduit que $\frac{\partial g}{\partial y}(y;z) = -1$ et,

donc, $g(y;z) = -y + h(z)$.

Ainsi on a $f = -y + h(z) - xy^2z^3$.

On obtient $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial z}(z) - 3xy^2z^2$.

Comme $\frac{\partial f}{\partial z} = -4z - 2xyz^3$, on en déduit que $\frac{\partial h}{\partial z}(z) = -4z$ et,

donc, $h(z) = -2z^2$.

On a finalement $\underline{\underline{f = -y - 2z^2 - xy^2z^3.}}$

② **$1^{\text{ère}}$ manière:**

On a $\vec{F}(x;y;z) = \begin{pmatrix} y^2 + ze^{x-y} \\ 2xy - ze^{x-y} + 3z^4 \\ e^{x-y} + 12yz^3 + 1 \end{pmatrix}$

Le cercle centré à l'origine et de rayon 2 et dans le plan $z=0$ peut s'écrire en équations paramétriques : $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 0 \end{cases}$ avec $t \in [0;2\pi]$

Le travail du champ $\vec{F}$ le long de ce cercle est donné par

$\int_{\text{cercle}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\text{cercle}} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$, où F_x, F_y et F_z sont respectivement les $1^e, 2^e$ et 3^e composantes de $\vec{F}$.

Le travail s'écrit donc $\int_{\text{cercle}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\text{cercle}} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz)$.

On va transformer cette intégrale curviligne en une intégrale simple en utilisant les équations paramétriques du cercle :

de $x = 2\cos t$, on trouve $\frac{dx}{dt} = -2\sin t$, d'où $dx = -2\sin t\,dt$;
de $y = 2\sin t$, on trouve $\frac{dy}{dt} = 2\cos t$, d'où $dy = 2\cos t\,dt$;
de $z=0$, on trouve $\frac{dz}{dt} = 0$, d'où $dz = 0\cdot dt$.

En outre : $F_x = y^2 + ze^{x-y} = (2\sin t)^2 + 0\cdot e^{2\cos t - 2\sin t} = 4\sin^2 t$;

$F_y = 2xy - ze^{x-y} + 3z^4 = 2\cdot 2\cos t\cdot 2\sin t - 0\cdot e^{2\cos t - 2\sin t} + 3\cdot 0^4 =$
$= 8\cos t\sin t$;

$F_z = e^{2\cos t - 2\sin t} + 12\cdot 2\sin t\cdot 0 + 1 = e^{2\cos t - 2\sin t} + 1$.

Le travail est donc : t va de 0 à 2π

$$\int_{\text{cercle}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \Big(4\sin^2 t\cdot(-2\sin t\,dt) + 8\cos t\sin t\cdot 2\cos t\,dt + (e^{2\cos t - 2\sin t} + 1)\cdot 0\,dt \Big) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-8\sin^3 t + 16\sin t\cos^2 t\right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-8\sin t\,(1-\cos^2 t) + 16\sin t\cos^2 t\right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-8\sin t + 8\sin t\cos^2 t + 16\sin t\cos^2 t\right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-8\sin t + 24 \sin t \cos^2 t\right) dt =$$

$$= -8\int_0^{2\pi} \sin t \, dt + 24 \int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t \, dt =$$

$$= -8\left[-\cos t\right]_0^{2\pi} + 24\left[-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= -8\left(-\cos 2\pi + \cos 0\right) + 24\left(-\frac{\cos^3 2\pi}{3} + \frac{\cos^3 0}{3}\right) =$$

$$= -8\left(-1+1\right) + 24\left(-\frac{1^3}{3} + \frac{1^3}{3}\right) = 0.$$

Ainsi le <u>travail vaut 0.</u>

<u>$2^{ème}$ manière :</u>

On va montrer que le champ $\overrightarrow{F}$ est conservatif, et comme le chemin est fermé, on en conclura que le travail vaut 0.

Pour montrer que le champ $\overrightarrow{F}$ est conservatif, il suffit de montrer que $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0}$.

On a : $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$ avec

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = -e^{x-y} + 12z^3, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = -e^{x-y} + 12z^3,$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = e^{x-y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = e^{x-y},$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = 2y - ze^{x-y}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2y - ze^{x-y}.$$

Ainsi $\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0$.

On a donc bien $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0}$; d'où le champ $\overrightarrow{F}$ est conservatif ; comme le chemin est fermé (cercle entier), on en déduit que le <u>travail vaut 0.</u>

3. On a :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} ze^x + \sin(y) \\ z + x\cos(y) \\ y + e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}.$$

Le champ $\vec{F}$ est conservatif si $\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$.

On a :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F_x = ze^x + \sin(y) \\ F_y = x\cos(y) + z \\ F_z = y + e^x. \end{cases}$$

Ainsi $\frac{\partial F_z}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial F_y}{\partial z} = 1$,

$\frac{\partial F_x}{\partial z} = e^x$, $\frac{\partial F_z}{\partial x} = e^x$,

$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \cos(y)$, $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \cos(y)$.

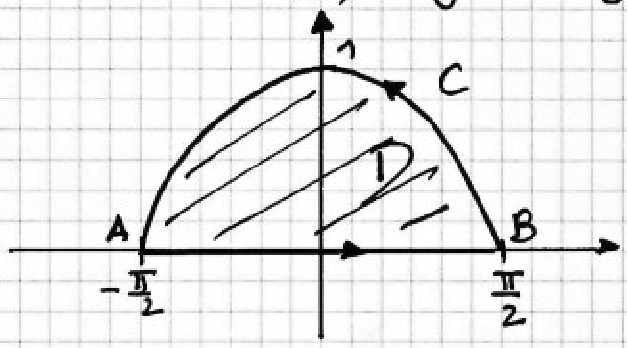
On obtient $\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0$.

Par conséquent, $\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ et $\vec{F}$ est un champ vectoriel conservatif.

④ On a : $\vec{F}(x;y) = \begin{pmatrix} y \\ \sin(x) \end{pmatrix}$

et $D = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \ ; \ 0 \leq y \leq \cos(x) \right\}$.

Dessinons D :



Appelons C le bord orienté de D (voir schéma ci-dessus).

Le travail de $\vec{F}$ le long du bord de D est donné par

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \begin{pmatrix} y \\ \sin(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \int_C \left(y\,dx + \sin(x)\,dy \right).$$

On subdivise C en 2 parties :

1) C_1 va horizontalement de A à B ;
2) C_2 va le long de la courbe $\cos(x)$ de B à A.

On obtient ainsi $W = \int_{C_1} \left(y\,dx + \sin(x)\,dy \right) + \int_{C_2} \left(y\,dx + \sin(x)\,dy \right)$.

Le bord C_1 peut s'écrire en équations paramétriques de la manière suivante : $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

On a alors $dx = dt$ et $dy = 0$.

Ainsi $\int_{C_1} \left(y\,dx + \sin(x)\,dy \right) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(0\,dt + \sin(t) \cdot 0\,dt \right) = 0$.

Le bord C_2 peut s'écrire en équations paramétriques de la manière suivante : $\begin{cases} x = t \\ y = \cos(t) \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

On a alors $dx = dt$ et $dy = -\sin(t)\,dt$.

Ainsi $\int_{C_2} \left(y\,dx + \sin(x)\,dy \right) = \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \left(\cos(t)\,dt + \sin(t) \cdot (-\sin(t))\,dt \right) =$

de B à A

$$= \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \left(\cos(t) - \sin^2(t) \right) dt =$$

$$= \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \cos(t)\,dt - \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \sin^2(t)\,dt$$

$$= \Big[\sin(t) \Big]_{\pi/2}^{-\pi/2} - \left[\frac{t - \sin(t)\cos(t)}{2} \right]_{\pi/2}^{-\pi/2} =$$

$$= \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{-\frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2})\cos(-\frac{\pi}{2})}{2} - \frac{\frac{\pi}{2} - \sin(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2})}{2} \right) =$$

$$= -1 - 1 - \left(\frac{-\frac{\pi}{2}}{2} - \frac{\frac{\pi}{2}}{2} \right) = -2 - \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = -2 - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - 2.$$

Finalement, on trouve :

$$W = \int_{C_1} \left(y\,dx + \sin(x)\,dy \right) + \int_{C_2} \left(y\,dx + \sin(x)\,dy \right) =$$

$$= 0 + \frac{\pi}{2} - 2 = \frac{\pi}{2} - 2.$$

Le travail vaut donc $\frac{\pi}{2} - 2$.