Analyse - théorie

Fait par Roland Vuille, Perma'math

Etude de fonction:

Le but lorsqu'on étudie une fonction est de trouver un certain nombre d'informations sur la fonction afin de pouvoir dessiner son graphe de la manière la plus précise possible.

Les différents étapes de l'étude d'une fonction sont:

(1) Domaine de définition: Le domaine de définition (noté généralement D) est l'ensemble des valeurs pour lesquelles on peut calculer la fonction. De manière générale, les cas où il faut exclure un nombre, des nombres ou un ensemble de nombres (tel qu'un intervalle) sont:

- lorsqu'on a une fonction rationnelle (un polynôme sur un polynôme), il faut que le dénominateur soit différent de 0; les nombres pour lesquelles le dénominateur est nul sont à exclure du domaine de définition;
- lorsqu'on a une fonction qui comprend une racine carrée (ou une racine quatrième ou une racine sixième, etc.), il faut que l'expression sous la racine soit supérieure ou égale à zéro. les nombres (généralement des ensembles de nombres donnés sous forme d'intervalles) pour lesquels l'expression sous la racine est strictement négative sont à exclure du domaine de définition; dans ce cas D est généralement donné sous la forme d'un intervalle;
- lorsque la fonction logarithme (log ou ln) apparaît dans la fonction, il faut que l'expression dans le logarithme soit strictement positif; les nombres pour lesquels l'expression dans le logarithme est inférieure ou égale à zéro est à exclure du domaine de définition; dans ce cas D est généralement donné sous forme d'un intervalle.

(2) Parité et périodicité: La parité et la périodicité concerne la structure générale du graphique de la fonction. Il y a 3 cas à considérer:

- le graphe de la fonction est-il symétrique par rapport à l'axe y (l'axe y est un axe de symétrie pour le graphe de la fonction)? Dans ce cas, on dit que la fonction est paire. Pour le démontrer algébriquement avant d'avoir dessiné le graphique de la fonction, on procède comme suit : on calcule $f(-x)$ et on essaie de voir si on peut obtenir $f(-x) = f(x)$. Si cela est valable pour toute valeur de x, alors la fonction est paire.

- le graphe de la fonction est-il symétrique par rapport à l'origine des axes (le point $(0;0)$ est-il un centre de symétrie pour le graphe de f) ?
  Dans ce cas, on dit que la fonction est <u>impaire</u>. Pour le démontrer algébriquement avant d'avoir dessiné le graphique de la fonction, on procède comme suit : on calcule $f(-x)$ et on essaie de voir si on peut obtenir $f(-x) = -f(x)$. Si cela est valable pour toute valeur de x, alors la fonction est impaire.
- la structure du graphe de la fonction est-elle la même lorsqu'on se déplace selon l'axe x (une partie du graphe se répète-il infiniment à gauche et à droite sur l'axe x) ? Dans ce cas, on dit que la fonction est <u>périodique</u>. Pour le démontrer algébriquement avant d'avoir dessiné le graphique de la fonction f, on regarde si une fonction trigonométrique apparaît dans la fonction (s'il n'y a pas de fonction trigonométrique dans f, f n'est jamais périodique). S'il y a une fonction trigonométrique dans f, on essaie de résoudre $f(x+p) = f(x)$ avec $p \neq 0$. Si on trouve un tel p, la fonction est périodique et on dit que sa période est p.

Bien sûr, il existe des fonctions qui ne sont ni paires, ni impaires, ni périodiques. Si une fonction est paire, elle ne peut pas être impaire et vice-versa. Il existe des fonctions paires périodiques (par exemple $f(x) = \cos(x)$) et des fonctions impaires périodiques (par exemple $f(x) = \sin(x)$).

(3) <u>Asymptotes:</u> Afin de bien pouvoir dessiner le graphe d'une fonction f, on est intéressé à connaître son comportement lorsque x s'approche de $-\infty$ et de $+\infty$ et lorsque x s'approche des exclus à gauche ou à droite (ou lorsque x s'approche du bord d'un intervalle qui est exclu du domaine de définition).

<u>Asymptote(s) verticale(s):</u> Les seules asymptotes possibles pour une fonction f sont à ses exclus (ou aux bords d'intervalles exclus). Pour connaître le comportement de f au voisinage d'un de ses exclus (noté x_0), on doit déterminer $\lim_{x \underset{>}{\to} x_0} f(x)$ (la limite des valeurs de f lorsque x s'approche de x_0 avec des valeurs supérieures) et $\lim_{x \underset{<}{\to} x_0} f(x)$ (la limite des valeurs de f lorsque x s'approche de x_0 avec des valeurs inférieures). Pour calculer

ces limites, on procède comme suit :

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x)$: on prend pour x une valeur très proche, mais supérieure à x_0 (par exemple, si $x_0 = 2$, on prend $x = 2{,}000001$), et on calcule f pour cette valeur ; si le résultat est très grand (par exemple $2'143'258{,}62$), on dira alors que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = +\infty$; si le résultat est très petit (par exemple $-2'156'472{,}84$), on dira alors que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x)$: on procède comme ci-dessus, mais en prenant cette fois une valeur proche de x_0 mais juste inférieure (par exemple, si $x = 2$, on prend $x = 1{,}999999$) et on conclut de la même façon.

Si les nombres juste inférieurs ou supérieurs à x_0 ne permettent pas de conclure de manière certaine, on prendra une ou des valeurs encore plus proches de x_0.

Si on a $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, alors $x = x_0$ est une asymptote verticale et on connaît le comportement de f à gauche et à droite de x_0.

<u>Asymptote(s) non verticale(s)</u> : Les asymptotes non verticales (i.e. les asymptotes horizontales et les asymptotes obliques) déterminent le comportement d'une fonction f lorsque $x \to -\infty$ et lorsque $x \to +\infty$.

On sépare leur étude en 2 parties : 1) les fonctions rationnelles ; 2) les autres fonctions.

1) Les fonctions rationnelles (polynôme sur polynôme) : on effectue la division euclidienne du numérateur et du dénominateur ; on obtient le quotient q et le reste r ; ainsi si $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$, on peut écrire $f(x) = q + \frac{r}{d(x)}$; si q est un nombre, alors $y = q$ est une <u>asymptote horizontale</u> pour f ; le signe de $\frac{r}{d(x)}$ lorsque $x \to \pm\infty$ nous dit alors si f s'approche de l'asymptote par au-dessus ($\frac{r}{d(x)} > 0$) ou par au-dessous ($\frac{r}{d(x)} < 0$) ; si q est de la forme $q = ax + b$, alors $y = ax + b$ est une <u>asymptote oblique</u> pour f ; le signe de $\frac{r}{d(x)}$ lorsque $x \to \pm\infty$ nous dit alors de la même manière si f s'approche de l'asymptote par au-dessus ou au-dessous.

2) Les autres fonctions : on cherche à déterminer s'il existe m et h tels que $y = mx + h$ soit une asymptote non verticale pour f ; pour

déterminer m, on doit calculer $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ (prendre des valeurs de x très grandes et voir ce que devient $\frac{f(x)}{x}$) et $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ (souvent ces 2 m sont les mêmes, mais il peut arriver qu'ils diffèrent ; pour déterminer h, on doit calculer $h=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$ et $h=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)$ (pour autant qu'on ait pu déterminer m).

Il peut arriver qu'une fonction ait une asymptote horizontale à $+\infty$ (on dira qu'elle a une asymptote horizontale à droite) et une asymptote oblique à $-\infty$ (on dira qu'elle a une asymptote oblique à gauche), ou qu'elle ait une asymptote oblique à droite et aucune à gauche, etc.

(4) <u>Intersections avec les axes :</u>

Intersection avec l'axe x : dans la fonction $y=f(x)$, on pose $y=0$ et on résoud $f(x)=0$; le ou les x tels que $f(x)=0$ s'appellent les <u>zéros de f</u>.

Intersection avec l'axe y : dans la fonction $y=f(x)$, on pose $x=0$ et on calcule $f(0)$.

(5) <u>Tableau de signes:</u> Le tableau de signes de la fonction f va indiquer où f est négative, où f est nulle et où f est positive. Il se présente de la manière suivante :

x	
$f(x)$	

← on met ici tous les zéros de f et tous les exclus du domaine de définition, en les classant dans l'ordre croissant.

pour chaque zéro écrit, on place ici un zéro ;
pour chaque exclu écrit, on barre la valeur de $f(x)$;
entre chacun des nombres écrits, on choisit une valeur et on calcule f pour elle, ce qui nous donnera le signe de f entre ces 2 nombres.

(6) <u>Première dérivée:</u> La dérivée d'une fonction f est par définition la pente de la tangente au graphe de la fonction f. On la note f'.
Pour la calculer, on utilise les formules de dérivées de base telles qu'elles sont données à la page 75 du "Formulaire et tables" et les règles suivantes :

<u>Règle pour l'addition:</u> $(u+v)'=u'+v'$

Exemple : si $f(x)=x^2+3x$, on a $u=x^2$ et $v=3x$; ainsi $u'=2x$ et $v'=3$; on obtient ainsi $f'(x)=u'+v'=$
$=2x+3$.

<u>Règle pour la multiplication par un nombre:</u> Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, on a $(\lambda u)'=\lambda u'$.

Exemple : si $f(x)=3x^2$, on a $\lambda=3$ et $u=x^2$;

Comme $u' = 2x$, on obtient $f'(x) = \lambda u' = 3 \cdot 2x = 6x$.

Règle pour la multiplication: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Exemple: si $f(x) = x^2 \cos(x)$, on a $u = x^2$ et $v = \cos(x)$; ainsi $u' = 2x$ et $v' = -\sin(x)$; on obtient ainsi
$$f'(x) = u'v + uv' = 2x\cos(x) - x^2 \sin(x).$$

Règle pour la division: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemple: si $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$, on a $u = x - 1$ et $v = x^2$; ainsi $u' = 1$ et $v' = 2x$; on obtient ainsi $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} =$
$$= \frac{1 \cdot x^2 - (x-1) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4} = \frac{-x^2 + 2x}{x^4} =$$
$$= \frac{x(-x+2)}{x^4} = \frac{-x+2}{x^3}.$$

Règle pour la composition: Une composition de fonction est une suite de fonction que l'on peut décomposer en plusieurs parties. Par exemple, $f(x) = \sin(x^2)$ est une fonction composée car, pour une valeur choisie de x, on doit d'abord calculer $z = x^2$, puis, à partir de ce résultat, on doit calculer $\sin(z)$.
Si la fonction f peut s'écrire $f(x) = u(v(x))$, on a alors $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$.
Concrètement, on écrira :

$$\begin{tikzcd}
f: x \arrow[r, mapsto, "v"'] & z = v(x) \arrow[r, mapsto, "u"'] \arrow[d, "\text{dérivée}"] & y = u(z) \arrow[d, "\text{dérivée}"] \\
& z' = v'(x) & \begin{array}{l} y' = u'(z) \\ \quad = u'(v(x)) \end{array}
\end{tikzcd}$$

et on multiplie z' avec y' pour obtenir f':
$$f'(x) = z' \cdot y' = v'(x) \cdot u'(v(x)).$$
L'avantage de la technique décrite ici est qu'elle peut s'appliquer à une composition de plus de 2 fonctions.

Exemple: Si $f(x) = \sin(\sqrt{x^2+1})$, on peut écrire :

$$\begin{tikzcd}
f: x \arrow[r, mapsto] & z = x^2+1 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\text{dérivée}"] & w = \sqrt{z} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\text{dérivée}"] & y = \sin(w) \arrow[d, "\text{dérivée}"] \\
& z' = 2x & \begin{array}{l} w' = \frac{1}{2\sqrt{z}} \\ \quad = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \end{array} & \begin{array}{l} y' = \cos(w) \\ \quad = \cos(\sqrt{z}) \\ \quad = \cos(\sqrt{x^2+1}) \end{array}
\end{tikzcd}$$

ainsi $f'(x) = z' \cdot w' \cdot y' = 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \cos(\sqrt{x^2+1}) =$
$$= \frac{x\cos(\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(7) <u>Points à tangente horizontale:</u> les points à tangentes horizontales sont les points telles que leurs premières coordonnées x satisfont $f'(x)=0$. Comme leur nom l'indique, ce sont des points où la tangente au graphe de f est horizontale.
Pour les calculer, on résoud $f'(x)=0$ et, pour chaque x trouvé, on calcule $f(x)$, ce qui nous donne les coordonnées complètes de ces points.
Les x tels que $f'(x)=0$ sont appelés les <u>zéros de f'</u>.

(8) <u>Tableau de croissance:</u> Le tableau de croissance de f va indiquer où f est croissante, où f atteint un maximum ou un minimum et où f est décroissante.
Il se présente de la manière suivante:

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

on met ici tous les zéros de f' et tous les exclus du domaine de définition, en les classant dans l'ordre croissant

pour chaque zéro de f', on place ici un zéro;
pour chaque exclu écrit, on barre la valeur de $f'(x)$;
entre chacun des nombres écrits, on choisit une valeur et on calcule f' pour elle, ce qui nous donnera le signe de f' entre ces 2 nombres

pour chaque exclu écrit, on barre la valeur de $f(x)$;
pour chaque endroit où $f'(x) < 0$, cela signifie que la fonction est décroissante, ce que l'on symbolise par ↘ dans la ligne de f; pour chaque endroit où $f'(x) > 0$, cela signifie que la fonction est croissante, ce que l'on symbolise par ↗ dans la ligne de f.

On peut alors déterminer la nature des points à tangente horizontale:
- si on a, dans la ligne de f, ↗ ↘, cela signifie que le point est un <u>maximum</u>;
- si on a, dans la ligne de f, ↘ ↗, cela signifie que le point est un <u>minimum</u>;
- si on a, dans la ligne de f, ↘ ↘ ou ↗ ↗, le point à tangente horizontale n'est ni un maximum, ni un minimum; on l'appelle <u>point d'inflexion.</u>

(9) <u>Graphe:</u> En reprenant chacun des points (1) à (8) ci-dessus, on construit le graphe de la fonction. Il faudra parfois compléter les informations par le calcul des coordonnées d'autres points du graphe.

Equation de la tangente au graphe d'une fonction en un point donné :

On donne une fonction f et on cherche l'équation de la tangente au graphe au point x_0.
La tangente est une droite ; son graphe est donc une fonction affine de la forme $y = mx+h$.
m est sa pente ; or, comme on considère la tangente en x_0 et que la dérivée est la pente de la tangente, on a que $m = f'(x_0)$.
Ainsi, pour trouver m, on calcule f' au point x_0.
Puis, comme le point $(x_0; f(x_0))$ (qui est connu en calculant f au point x_0) est aussi un un point de la tangente (c'est le point de tangence), en remplaçant x par x_0 et y par $f(x_0)$ dans $y = mx+h$ (où m est maintenant connu), on en déduit h.
On obtient ainsi l'équation $y = mx+h$ de la tangente au graphe de f en x_0.

Problème d'optimisation:

Un problème d'optimisation est un problème où l'on cherche le maximum ou le minimum d'une grandeur qui dépend d'un certain nombre de données incluses dans l'énoncé du problème.

La première étape (et c'est souvent la plus difficile) est d'arriver à exprimer cette grandeur comme une fonction d'une variable.

Si c'est un problème géométrique, il ne faut pas hésiter à faire un ou des schémas pour expliciter cette fonction.

On obtient ainsi une fonction $f(x)$ et on doit trouver son maximum ou son minimum.

On calcule alors $f'(x)$ et on résoud $f'(x)=0$.

Cela nous donnera les points à tangente horizontale de f (ce sont les zéros de f').

L'établissement d'un tableau de croissance nous permettra alors de trouver le x pour lequel f est maximum ou minimum.

On pourra alors calculer f pour ce x et donner ainsi la réponse au problème.

Intégrales et surfaces:

Il y a plusieurs concepts dans le sujet "intégrales et surfaces". Commençons par la notion de primitives.

Primitives: Trouver une primitive est l'opération inverse de trouver la dérivée. Ainsi si g est la dérivée de f, on dira que g est une primitive de f.
Il existe toujours une infinité de primitives, toutes séparées l'une de l'autre par une constante. En effet, si g est une primitive de f (et donc $g' = f$), $g + c$ où c est un nombre réel est aussi une primitive de f (puisque $(g+c)' = g' = f$).
Généralement, on note F une primitive de f (et on a $F' = f$).
Il existe plusieurs méthodes pour trouver une primitive :

Pour les fonctions de base: on utilise les primitives données aux pages 78 et 79 du "Formulaire et tables"; par exemple, la primitive de $\sqrt{x}$ est $\frac{2}{3} x\sqrt{x} + c$, où c est une constante.

Pour les fonctions simples: Si on doit trouver la primitive de $\cos(3x)$, on procède de la manière suivante :

calcul de la primitive ←
→ calcul de la dérivée

	$\sin(x)$	$\cos(x)$	(voir p. 78 de "Formulaire et table)
on cherche alors la dérivée de $\sin(\underline{3x})$ puisqu'on doit obtenir $\cos(\underline{3x})$	$\sin(3x)$	$3\cos(3x)$	(3 est la dérivée de $3x$)
dans ce genre de tableau, on peut multiplier ou diviser chaque colonne, pour autant que cela soit par le même nombre	$\downarrow :3$	$\downarrow :3$	
	$\frac{1}{3}\sin(3x)$	$\cos(3x)$	

Ainsi la primitive de $\cos(3x)$ est $\frac{1}{3}\sin(3x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Si on doit trouver la primitive de $x\cos(x^2)$, on procède similairement:

primitive ←
→ dérivée

$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\sin(x^2)$	$2x\cos(x^2)$	($2x$ est la dérivée de x^2)
$\downarrow :2$	$\downarrow :2$	
$\frac{1}{2}\sin(x^2)$	$x\cos(x^2)$	

Ainsi la primitive de $x\cos(x^2)$ est $\frac{1}{2}\sin(x^2) + c$.

Pour des fonctions plus compliquées: Lorsqu'on ne peut pas utiliser la technique décrite ci-dessus, on peut alors en utiliser une autre, appelée intégration par parties.

Cette méthode est basée sur la forme:

$$\text{primitive de } (u' \cdot v) = u \cdot v - \text{primitive de } (u \cdot v').$$

Il faut donc que la fonction de départ pour laquelle on cherche la primitive soit une multiplication. On choisira pour v la partie qui devient plus simple lorsqu'on calcule v'.

Illustrons cela par un exemple: quel est la primitive de $x\cos(x)$?

On n'arrivera pas à la trouver par la méthode de la page précédente.

On va utiliser la méthode d'intégration par parties.

On peut écrire $x\cos(x) = u' \cdot v$ avec $u' = \cos(x)$ et $v = x$

(on choisit comme ceci u' et v car $v' = 1$ est plus simple que v).

Avec $u' = \cos(x)$ et $v = x$, on a $u = \sin(x)$ (primitive de $u' = \cos(x)$) et $v' = 1$.

En appliquant la formule primitive de $(u' \cdot v) = u \cdot v$ - primitive de $(u \cdot v')$, on obtient:

$$\begin{aligned}\text{primitive de } (x\cos(x)) &= x \cdot \sin(x) - \text{primitive de } (1 \cdot \sin(x)) = \\ &= x\sin(x) - \text{primitive de } (\sin(x)) = \\ &= x\sin(x) - (-\cos(x)) = \\ &= x\sin(x) + \cos(x), \text{ auquel on ajoute la constante.}\end{aligned}$$

Ainsi la primitive de $x\cos(x)$ est $x\sin(x) + \cos(x) + c$.

Dans les cas où cette manière de faire ne marche pas non plus, il faut alors se référer à des tables de primitives beaucoup plus complète.

Le cas où apparaît la fonction exponentielle: Lorsqu'on doit trouver la primitive d'une fonction de la forme (polynôme de degré n)$\cdot e^{kx}$, k étant un nombre réel, on cherchera une primitive de la forme (un autre polynôme de degré n)$\cdot e^{kx}$. En dérivant cette primitive, on doit retrouver la fonction de départ. Par identification des termes de cette dérivée et de la fonction de départ, on peut alors déterminer exactement la primitive cherchée.

Exemple: chercher la primitive de $(x^2+1)e^{3x}$.

On note $f(x) = (x^2+1)e^{3x}$ et $F(x)$ sa primitive.

F devra être de la forme $F(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$ (polynôme de même degré que x^2+1).

On dérive F : F est de la forme $u.v$, où $u=Ax^2+Bx+C$ et $v=e^{3x}$;

Comme $u'=2Ax+B$ et $v'=3e^{3x}$, on a alors :

$$\begin{aligned} F' = u'v+uv' &= (2Ax+B)e^{3x} + (Ax^2+Bx+C)3e^{3x} = \\ &= (2Ax+B)e^{3x} + (3Ax^2+3Bx+3C)e^{3x} = \\ &= (2Ax+B+3Ax^2+3Bx+3C)e^{3x} = \\ &= (3Ax^2+(2A+3B)x+B+3C)e^{3x}. \end{aligned}$$

Comme F' doit être exactement égal à f, on doit avoir

$$(3Ax^2+(2A+3B)x+B+3C)e^{3x} = (x^2+1)e^{3x} \text{ et, donc}$$

$$3Ax^2+(2A+3B)x+B+3C = x^2+1.$$

Les coefficients de x^2 doivent alors être égaux : $3A=1$.

Les coefficients de x doivent alors être égaux : $2A+3B=0$.

Les coefficients sans x doivent alors être égaux : $B+3C=1$.

(cette manière de faire s'appelle "identification des termes).

On obtient ainsi 3 équations :
$$\begin{aligned} 3A &= 1 \quad (1) \\ 2A+3B &= 0 \quad (2) \\ B+3C &= 1 \quad (3). \end{aligned}$$

De (1), on déduit $A=\frac{1}{3}$.

Par substitution dans (2), on trouve $2\cdot\frac{1}{3}+3B=0$, d'où $3B=-\frac{2}{3}$ et $B=-\frac{2}{9}$.

Par substitution dans (3), on trouve $-\frac{2}{9}+3C=1$, d'où $3C=1+\frac{2}{9}=\frac{11}{9}$ et $C=\frac{11}{27}$.

Ainsi la primitive de $(x^2+1)e^{3x}$ est $\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{11}{27}\right)e^{3x}+c$, $c\in\mathbb{R}$.

<u>Intégrale indéfinie:</u> Le terme "intégrale indéfinie" est synonyme du terme "primitive", si ce n'est qu'il se note différemment.

L'intégrale indéfinie de $f(x)$ se note $\int f(x)dx$ (qui est donc égal à F, primitive de f).

Lorsqu'on demande de calculer $\int f(x)\,dx$, on demande en fait de trouver une primitive de f.

On procède de la même manière que ci-dessus pour trouver l'intégrale indéfinie d'une fonction.

La formule d'<u>intégration par parties</u> peut ainsi aussi s'écrire :

$$\int u'.v\,dx = u.v - \int u.v'\,dx.$$

<u>Intégrale définie:</u> La notation pour une intégrale définie est $\int_a^b f(x)\,dx$, où a et b sont des nombres réels (on peut éventuellement avoir $a=-\infty$ et/ou

$b = +\infty$).

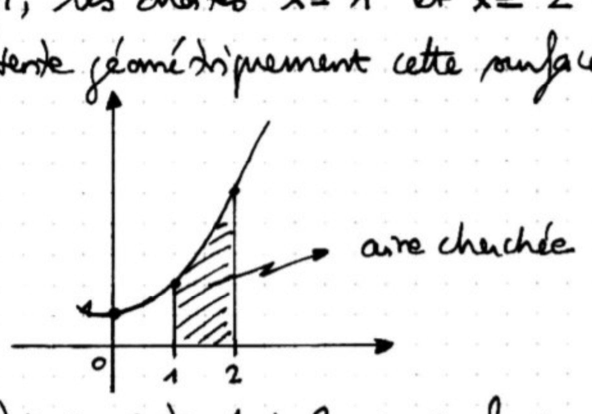
Cette notation signifie : $\int^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, où F est la primitive de F où l'on prend la constante additionnelle égale à zéro, $F(b)$ étant la valeur de cette primitive calculée en b et $F(a)$ étant la valeur de cette primitive calculée en a.

Exemple: Calculer $\int_1^2 (x^2+1)\,dx$.

On commence par calculer une primitive F de x^2+1.
Une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$.
Une primitive de 1 est x.
Ainsi on a $F(x) = \frac{x^3}{3} + x$ (primitive de x^2+1).
Comme $a=1$ et $b=2$, on a:
$F(2) = \frac{2^3}{3} + 2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}$ et
$F(1) = \frac{1^3}{3} + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.
Ainsi $\int_1^2 (x^2+1)\,dx = \frac{14}{3} - \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$.

<u>Aire sous le graphe d'une fonction positive:</u> Lorsqu'on cherche l'aire comprise entre le graphique d'une fonction f positive, les droites $x=a$ et $x=b$, et l'axe x, cette aire vaut exactement $\int_a^b f(x)\,dx$.

Exemple: Calculer l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x) = x^2+1$, les droites $x=1$ et $x=2$ et l'axe x.
Si on représente géométriquement cette surface, on a:

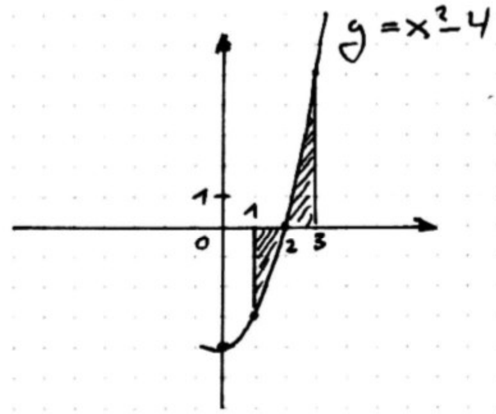


Comme $f(x) \geqslant 0$ entre 1 et 2, on a alors:
aire hachurée $= \int_1^2 f(x)\,dx = \frac{10}{3}$ (voir ci-dessus).

<u>Aire comprise entre le graphe d'une fonction et l'axe x:</u> Lorsqu'on cherche l'aire comprise entre le graphique d'une fonction (non nécessairement positive), les droites $x=a$ et $x=b$, cette aire ne vaut plus nécessairement $\int_a^b f(x)\,dx$, particulièrement si f peut être parfois négative et parfois positive entre a et b.

Pour calculer l'aire demandée, il faut alors décomposer les aires entre les parties au-dessus de l'axe et celles au-dessous de l'axe. On calcule alors les intégrales définies pour chacune de ses parties et on additionne les valeurs absolues de tous les nombres obtenus pour trouver l'aire totale.

Exemple: Calculer l'aire hachurée:



Commençons par trouver une primitive de $f(x) = x^2 - 4$.
Une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$.
Une primitive de -4 est $-4x$.
Ainsi, F primitive de $f(x) = x^2 - 4$ est $F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$.
Si on calcule $\int_1^3 f(x)\,dx = F(3) - F(1)$, on obtient:

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \frac{3^3}{3} - 4.3 - \left(\frac{1^3}{3} - 4.1\right) = \frac{27}{3} - 12 - \frac{1}{3} + 4 = 9 - 12 - \frac{1}{3} + 4$$
$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ce n'est pas l'aire cherchée!

Pour trouver l'aire cherchée, on divise la surface en 2 parties: la partie entre 1 et 2 (où f est négative) et la partie entre 2 et 3 (où f est positive), et on calcule l'aire de chacune de ses parties.
On a:

$$\int_1^2 f(x)\,dx = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - 4.2 - \left(\frac{1^3}{3} - 4.1\right) =$$
$$= \frac{8}{3} - 8 - \frac{1}{3} + 4 = \frac{7}{3} - 4 = -\frac{5}{3}.$$

Ainsi l'aire de la partie hachurée entre $x = 1$ et $x = 2$ vaut $\left|-\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3}$.

$$\int_2^3 f(x)\,dx = F(3) - F(2) = \frac{3^3}{3} - 4.3 - \left(\frac{2^3}{3} - 4.2\right) =$$
$$= 9 - 12 - \frac{8}{3} + 8 = 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}.$$

Ceci correspond bien à l'aire comprise entre $x = 2$ et $x = 3$ (puisque $f(x) \geq 0$ dans cette intervalle.

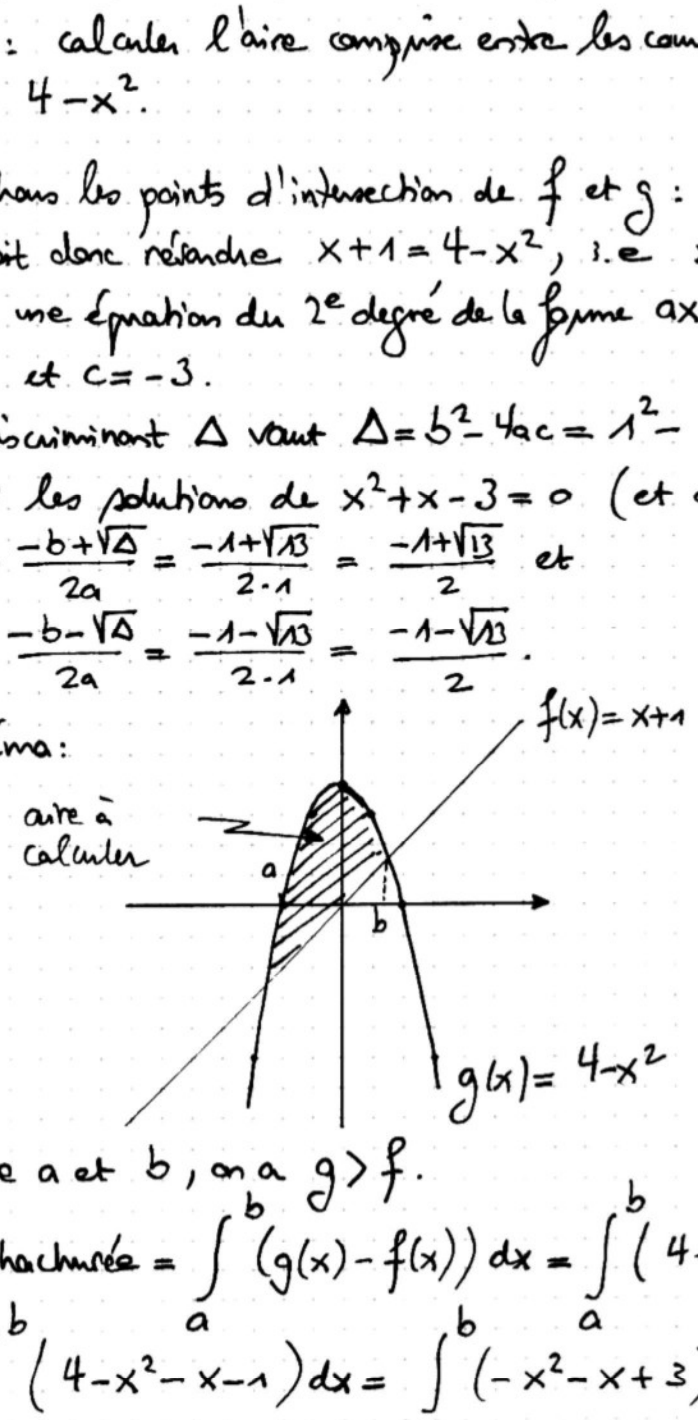
Finalement l'aire hachurée cherchée vaut $\frac{5}{3}+\frac{7}{3}=\frac{12}{3}=4.$

Aires entre des courbes: Lorsqu'on cherche l'aire comprise entre deux fonctions f et g, on procède comme suit:

1. On calcule les points d'intersection de f et g : par exemple $x=a$ et $x=b$.
2. On fait un schéma des fonctions et on hachure l'aire à calculer;
3. On détermine quelle est la fonction au-dessus de l'autre sur l'intervalle $[a;b]$: supposons que $g>f$ sur cette intervalle;
4. L'aire entre les 2 fonctions est alors $\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$ (peu importe s'il y a des parties négatives pour f et g ou non).

Exemples: calculer l'aire comprise entre les courbes $f(x)=x+1$ et $g(x)=4-x^2$.

1. Cherchons les points d'intersection de f et g : ils sont donnés par $f(x)=g(x)$.
   On doit donc résoudre $x+1=4-x^2$, i.e $x^2+x-3=0$.
   C'est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=1$ et $c=-3$.
   Le discriminant Δ vaut $\Delta=b^2-4ac=1^2-4\cdot1\cdot(-3)=1+12=13$.
   Ainsi les solutions de $x^2+x-3=0$ (et donc de $f(x)=g(x)$) sont:
   $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{13}}{2\cdot1}=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ et
   $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{13}}{2\cdot1}=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$.
2. Schéma:



$a=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\cong-2{,}3$

$b=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\cong1{,}3$

3. Entre a et b, on a $g>f$.
4. Aire hachurée $=\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx=\int_a^b (4-x^2-(x+1))\,dx=$

$$=\int_a^b (4-x^2-x-1)\,dx=\int_a^b (-x^2-x+3)\,dx.$$

Une primitive de $-x^2-x+3$ est $F(x)=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x$.

On a : $F(b) \cong -\frac{1{,}3^3}{3} - \frac{1{,}3^2}{2} + 3 \cdot 1{,}3 \cong 2{,}32$ et

$F(a) \cong -\frac{(-2{,}3)^3}{3} - \frac{(-2{,}3)^2}{2} + 3 \cdot (-2{,}3) \cong -5{,}49.$

Donc : aire hachurée $= F(b) - F(a) \cong 2{,}32 - (-5{,}49) = 7{,}81.$

Bien sûr, s'il y a plus de 2 intersections entre le graphe des 2 fonctions, il faudra calculer l'aire entre les 2 graphes en la coupant en plusieurs parties selon ces intersections, en calculant l'aire de chacune de ces parties comme ci-dessus et en additionnant le tout.