Chapitre 15

Quelques applications des dérivées

15.1 Problèmes d'optimisation

Dans la pratique, il est fréquent de vouloir optimiser une certaine *quantité* sous certaines conditions, appelées *contraintes*.

Pour que l'on puisse y arriver, il faut qu'il y ait assez de contraintes pour pouvoir exprimer la quantité à optimiser en fonction d'une seule variable ou *paramètre*.

Exemples d'utilisation

a) On cherche à minimiser le périmètre d'un rectangle dont l'aire est fixée.

b) On cherche à maximiser l'aire d'un rectangle dont le périmètre est fixé.

c) On cherche à minimiser la quantité de métal utilisé pour fabriquer une boîte de conserve de volume fixé.

Technique de résolution générale

1. On exprime la quantité Q à optimiser en fonction d'un paramètre x en utilisant les contraintes. On obtient ainsi une fonction $Q(x)$ dont on cherche les maxima ou minima.

   On précise le domaine d'intérêt I qui correspond au problème.

2. Afin de trouver les maxima ou minima de la fonction $Q(x)$, on recherche les points à tangente horizontale (symptôme d'un maximum ou d'un minimum). En d'autres termes, on résout l'équation

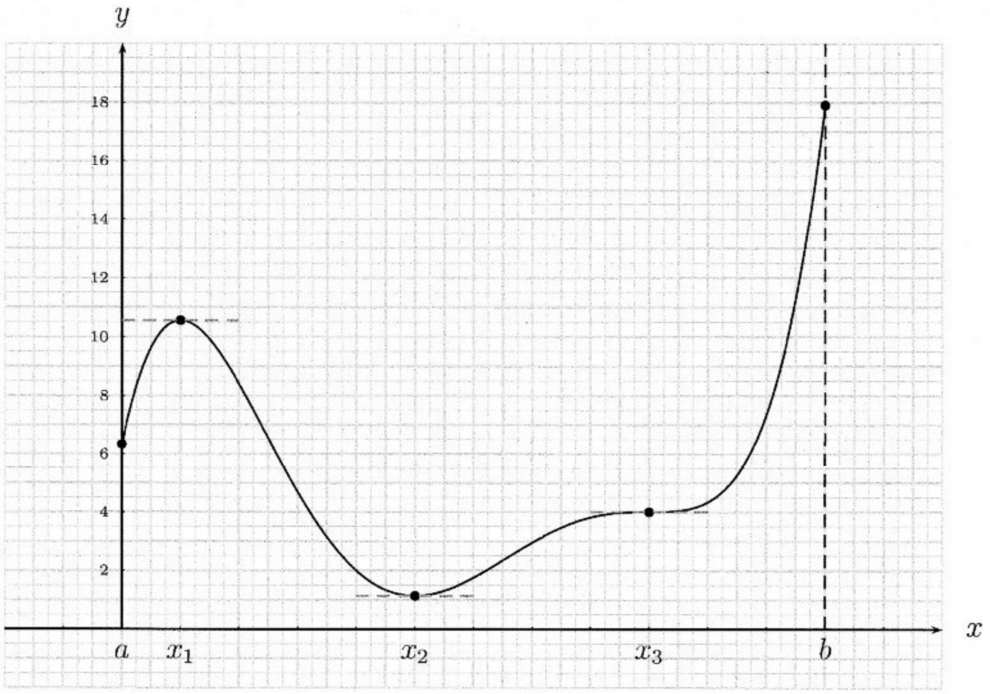
$$Q'(x) = 0 \qquad \text{pour } x \in I$$

3. On vérifie si les solutions de l'équation ci-dessus correspondent bien à des maxima ou des minima en faisant un tableau de signes de la dérivée $Q'(x)$ en prenant le domaine d'intérêt I au lieu du domaine de définition.

   Cette étape est importante car une fonction peut admettre des points à tangentes horizontales qui ne correspondent ni à un maximum ni à un minimum (par exemple un point d'inflexion). De plus, il ne faut pas oublier de regarder ce qu'il se passe au bord du domaine d'intérêt I, car un maximum ou minimum pourrait se produire au bord du domaine d'intérêt I.

Exemple théorique

Imaginons que le graphe de la quantité $Q(x)$ sur le domaine d'intérêt $[a, b]$ soit le suivant.



Ainsi, le comportement de $Q(x)$ obtenu à l'aide du tableau de signes de $Q'(x)$ est

x	a		x_1		x_2		x_3		b
$Q'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	$+$
comportement de $Q(x)$		$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$	$\smile$	$\nearrow$		$\nearrow$	
			maximum local		minimum local		palier		

Si on fait abstraction du graphe pour tirer les conclusions, le tableau de comportement nous indique que

1. le maximum (sur le domaine d'intérêt) est soit en x_1, soit en b ;
2. le minimum (sur le domaine d'intérêt) est soit en a, soit en x_2.

Pour savoir où se trouve le maximum, on calcule $Q(x_1)$ et $Q(b)$.

Si	$Q(x_1) < Q(b)$	$Q(x_1) = Q(b)$	$Q(x_1) > Q(b)$
Alors	le maximum est en b	il y a deux maxima	le maximum est en x_1

Pour savoir où se trouve le minimum, on calcule $Q(a)$ et $Q(x_2)$.

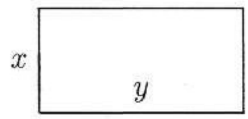
Si	$Q(a) < Q(x_2)$	$Q(a) = Q(x_2)$	$Q(a) > Q(x_2)$
Alors	le minimum est en a	il y a deux minima	le minimum est en x_2

Dans notre exemple, on constate que le maximum est en b et que le minimum est en x_2.

Un exemple concret (résolution)

On cherche à minimiser le périmètre d'un rectangle dont l'aire vaut 9.

1. On commence par dessiner un rectangle et on baptise les quantités inconnues.



   On cherche à minimiser le périmètre. On peut exprimer le périmètre à l'aide des deux paramètres x et de y comme suit.

$$P(x, y) = 2x + 2y$$

   Mais on veut arriver à exprimer P en fonction d'un seul paramètre. Or, on a une information sur l'aire du rectangle : l'aire vaut 9.

$$\text{Aire} = x \cdot y = 9 \iff y = \frac{9}{x}$$

   On substitue donc y dans la fonction du périmètre afin que le périmètre soit une fonction à un paramètre

$$P(x) = 2x + 2 \cdot \frac{9}{x} = 2\left(x + \frac{9}{x}\right)$$

   Le domaine d'intérêt est $I =]0, +\infty[$!

2. On résout $P'(x) = 0$ pour trouver les points à tangente horizontale.

   On a
$$P'(x) = 2\left(1 - \frac{9}{x^2}\right) = \frac{2(x^2 - 9)}{x^2} = \frac{2(x-3)(x+3)}{x^2}$$
   Les solutions de $P'(x) = 0$ sont -3 et 3. Le domaine d'intérêt étant $]0, +\infty[$, la seule solution qui est intéressante est $x = 3$.

3. Mais est-ce bien un minimum comme demandé ?

   Pour le vérifier, on fait le tableau de signes de la dérivée. On a

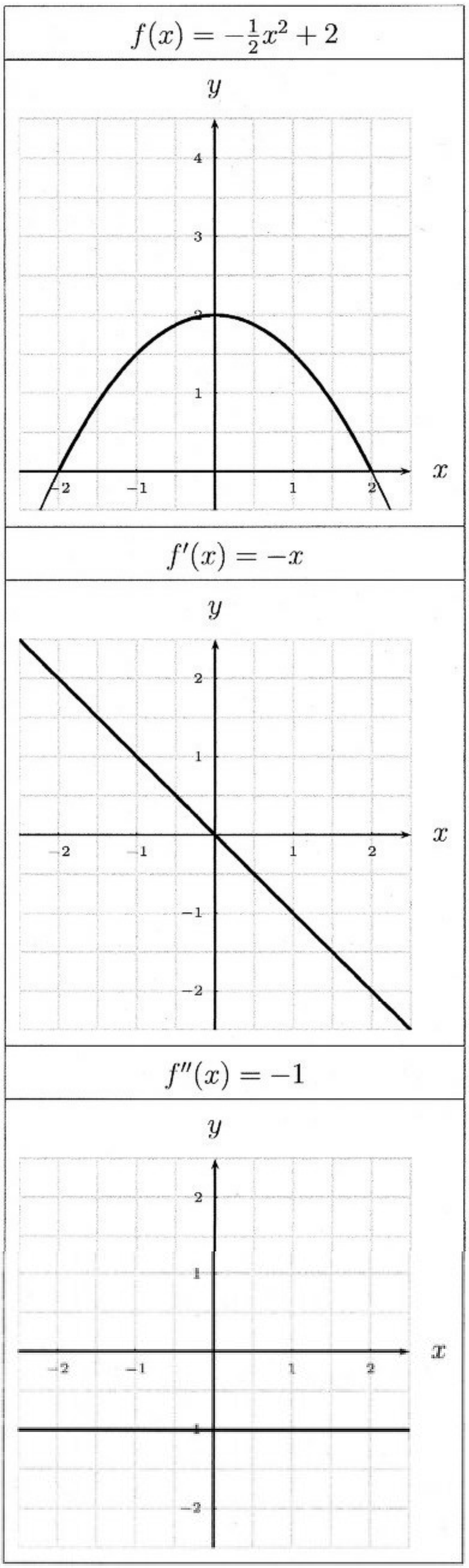
$$P'(x) = \frac{2(x-3)(x+3)}{x^2}$$

   Le tableau de signes sur le domaine d'intérêt $I =]0, +\infty[$ est

x	0		3	
$P'(x)$	↯	$-$	0	$+$
comportement de $P(x)$		↘	⌣	↗

   Le tableau de comportement montre que, au bord du domaine d'intérêt, il n'y a pas de minimum possible. Ainsi, la fonction $P(x)$ a un minimum en $x = 3$.

15.2 La courbure (l'accélération en physique)



Imaginons que l'on décrit un mouvement rectiligne (disons en hauteur) par une fonction f qui dépend du temps. $f(x)$ décrit donc la position verticale (en mètres) d'un objet au temps x (en secondes).

En regardant le graphe de f, on voit qu'au temps $x = -2$ l'objet se trouve à hauteur 0. Il est en train de monter jusqu'à atteindre une hauteur de 2 au temps $x = 0$, il va ensuite redescendre (il aura de nouveau atteint la hauteur 0 en $x = 2$).

La fonction f' décrit la variation (instantanée) de la position : ainsi $f'(x)$ est la vitesse instantanée de l'objet au temps x.

Dans notre cas, on constate qu'en $x = -2$ la vitesse de l'objet est relativement grande (elle est de 2 mètres par secondes vers le haut). En $x = 0$, la vitesse s'annule et change de signe (puisque l'objet arrête de monter pour commencer à redescendre). On retrouvera une vitesse de 2 mètres par secondes vers le bas au temps $x = 2$.

La fonction $f'' = (f')'$ exprime la variation (instantanée) de la vitesse. En physique, cette notion s'appelle l'accélération (dans ce contexte un freinage est aussi une accélération).

Ici l'accélération est constante et négative. Par conséquent, l'objet est toujours attiré vers le bas (par une force telle que la gravitation par exemple[1]).

En maths, la dérivée est une généralisation de la vitesse (car x ne représente pas toujours une unité de temps et $f(x)$ n'est pas toujours une distance).

La fonction f'' s'appelle la *courbure* de la fonction f. La courbure est une généralisation de l'accélération.

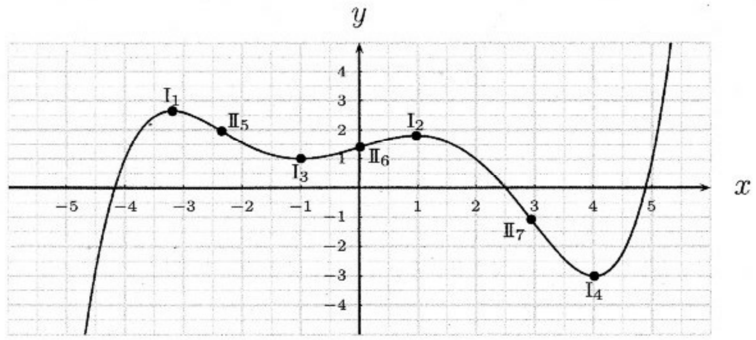
Une fonction qui 'tourne' vers le bas (comme la fonction f ci-contre) est dite de *courbure négative*.

On parle de *courbure positive* lorsque la fonction 'tourne' vers le haut.

1. En physique, l'accélération d'un objet est proportionnelle à la somme des forces agissant sur cet objet. D'où la célèbre formule $\vec{f} = m\vec{a}$.

15.3 Extrema locaux et points d'inflexion

Regardons le graphe d'une fonction f continue dont la première et deuxième dérivées sont aussi continues (donc la fonction est deux fois dérivable).



On voit deux types de points émerger :

I. **Les extrema (minima ou maxima) locaux** (voir les points I_1, I_2, I_3 et I_4).
En ces points, la tangente à la courbe est de pente nulle. On a donc une condition pour les identifier.

$$x_0 \text{ est un extremum local (minimum ou maximum)} \implies f'(x_0) = 0$$

Malheureusement, la réciproque est fausse (voir les points d'inflexion à tangente horizontale ci-dessous).

On le voit : en un extremum local, la dérivée doit s'annuler ET changer de signe !

x		x_0			x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
comp. de $f(x)$						
	maximum local			minimum local		

II. **Les points d'inflexion** (voir les points II_5, II_6, II_7).
Un *point d'inflexion* est un point où la courbure f'' s'annule ET change de signe. On a un point d'inflexion en x_0 lorsque le tableau de signes de f'' se comporte ainsi.

	dérivée positive						dérivée négative					
x		x_0			x_0			x_0			x_0	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
comp. de $f(x)$												

On peut aussi localiser les *points d'inflexion à tangente horizontale*[2] avec le tableau de signes de f' (on trouve les deux situations qui ne sont pas apparues ci-dessus).

x		x_0			x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$-$	0	$-$
comp. de $f(x)$						

2. le tableau de signes de f'' les localisera, mais comme, en général, on établit le tableau de signes de f' avant celui de f'', on les aura identifiés gratuitement juste avant.

15.4 Étude de fonction

Le but d'une étude de fonction est de pouvoir dessiner son graphe le plus précisément possible sans l'aide d'un ordinateur.

1. **Parité de la fonction**

   On détermine si la fonction est paire ou impaire (en cas de doute, on peut commencer par factoriser la fonction et examiner le domaine de définition ou l'ensemble des zéros de f). Cela permet d'identifier d'éventuelles symétries du graphe de f.

2. **Comportement de la fonction au bord de son domaine de définition**

   Il s'agit de trouver le plus grand domaine de définition possible de la fonction f. Puis, on calcule les limites pour tous les x qui sont au bord du domaine de définition : cela permet de déterminer :

   (a) les éventuelles asymptotes verticales ;

   (b) les éventuels trous ou sauts ;

   (c) le comportement à l'infini de la fonction.

   Les sauts en x_0 tels que $x_0 \in D$ ne se voient pas sur le domaine de définition (mais heureusement, la plupart du temps ils n'existent que si f est définie par morceaux comme c'est le cas pour la fonction de la page 176).

3. **Tableau de signes, de croissance, de courbure et de comportement**

   Pour cela, il faut d'abord :

   (a) factoriser $f(x)$;

   (b) calculer et factoriser la dérivée $f'(x)$, puis chercher son domaine de définition et ses zéros (utiles pour le tableau de croissance) ;

   (c) calculer et factoriser la dérivée seconde $f''(x)$, puis chercher son domaine de définition et ses zéros (utiles pour le tableau de courbure).

   On fait un tableau de signes pour les fonctions f, f' et f'' (le tableau de signes de f' donne des informations sur la croissance de f ; celui de f'' donne des informations sur la courbure de f). Ce tableau de signes comporte 5 lignes (une pour x, une pour $f(x)$, une pour $f'(x)$, une pour $f''(x)$ et une pour une esquisse locale du comportement de f).

   Ce tableau nous permet de trouver les minima locaux, les maxima locaux et les points d'inflexion qui sont des informations capitales pour dessiner un graphe de qualité.

4. **Calcul de la tangente ou de la pente en chaque point d'inflexion**

   Selon la fonction, il est possible qu'il soit demandé de calculer la tangente ou la pente en chaque point d'inflexion. Si tel est le cas, alors il est utile d'indiquer dans le tableau de croissance les pentes correspondantes à chaque point d'inflexion.

5. **Graphe de la fonction**

   On dessine le graphe de la fonction à l'aide de toutes les informations trouvées ci-dessus. On peut aussi ajouter quelques points (par exemple $(0; f(0))$ si $0 \in D$).

Quelques points supplémentaires parfois utiles à calculer

Lorsqu'il y a une asymptote oblique (ou horizontale) d'équation $y = mx + h$ (elle est horizontale si $m = 0$), on peut chercher lorsque la fonction coupe l'asymptote. On trouve les premières coordonnées de ces points d'intersection en résolvant l'équation suivante :

$$f(x) = mx + h$$

Cela peut permettre de déterminer la présence de points d'inflexion sans calculer f''.

Exemple d'étude de fonction

On étudie la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+3)^2}{(x+1)^2}$$

1. **Parité de la fonction**

   Cette fonction n'est ni paire, ni impaire. En effet, elle s'annule en $x = 1$, mais elle ne s'annule pas en $x = -1$ (pire, elle n'est même pas définie en $x = -1$).

2. **Comportement de la fonction au bord de son domaine de définition**

   Le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Son bord est $\{\pm\infty\} \cup \{-1\}$. Il y a donc deux comportements à examiner :

   - **Comportement local en $x = -1$**

     On a $\lim_{x \to -1} f(x) = \pm\infty$ car la limite est du type $(\frac{-8}{0})$. On a donc une asymptote verticale d'équation $x = -1$ (le tableau de signes qui suit montre clairement que les limites à gauche et à droite sont $-\infty$).

   - **Comportement asymptotique à l'infini**

     Ici, comme la fonction est rationnelle, et que le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur plus 1, on sait qu'on a affaire à une asymptote oblique de pente m et de hauteur h.

     $$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-1)(x+3)^2}{x(x+1)^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + \cdots}{x^3 + \cdots} = 1$$

     Le calcul de h est le suivant :

     $$\begin{aligned} h &= \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - m \cdot x) \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-1)(x+3)^2}{(x+1)^2} - \frac{x(x+1)^2}{(x+1)^2} \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-1)(x^2+6x+9)}{x^2+2x+1} - \frac{x(x^2+2x+1)}{x^2+2x+1} \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3+5x^2+3x-9-(x^3+2x^2+x)}{x^2+2x+1} \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2+2x-9}{x^2+2x+1} = 3 \end{aligned}$$

     Ainsi, la fonction f a une asymptote oblique d'équation $y = x + 3$.

3. **Tableau de signes, de croissance et de courbure**

(a) On commence par calculer et factoriser la dérivée de f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{(x-1)(x+3)^2}{(x+1)^2}\right)' \\ &= \frac{\big(1\cdot(x+3)^2+(x-1)\cdot 2(x+3)\big)\cdot(x+1)^2 \;-\; (x-1)(x+3)^2\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} \end{aligned}$$

C'est ici qu'il faut se montrer le plus malin : on peut mettre en évidence $(x+3)$ et simplifier la fraction par $(x+1)$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+3)\Big(\big((x+3)+2(x-1)\big)(x+1) \;-\; 2(x-1)(x+3)\Big)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{(x+3)\Big((3x+1)(x+1) \;-\; 2(x^2+2x-3)\Big)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{(x+3)\Big(3x^2+4x+1 \;-\; (2x^2+4x-6)\Big)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{(x+3)\overbrace{(x^2+7)}^{\text{toujours positif}}}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

Ainsi -3 et -1 seront dans le tableau de croissance de f

(b) Puis, on calcule et on factorise la dérivée seconde de f :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{(x+3)(x^2+7)}{(x+1)^3}\right)' \\ &= \frac{\big(1\cdot(x^2+7)+(x+3)\cdot(2x)\big)\cdot(x+1)^3 \;-\; (x+3)(x^2+7)\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} \end{aligned}$$

Cette fois, on ne peut rien mettre en évidence, mais on peut simplifier la fraction par $(x+1)^2$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\big((x^2+7)+2x(x+3)\big)(x+1) \;-\; 3(x+3)(x^2+7)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(3x^2+6x+7)(x+1) \;-\; 3(x+3)(x^2+7)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{3x^3+9x^2+13x+7 \;-\; 3(x^3+3x^2+7x+21)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{-8x-56}{(x+1)^4} = \frac{-8(x+7)}{(x+1)^4} \end{aligned}$$

Ainsi -7 et -1 seront dans le tableau de courbure de f

Maintenant, on est prêt pour le tableau de signes, de croissance et de courbure de la fonction f.

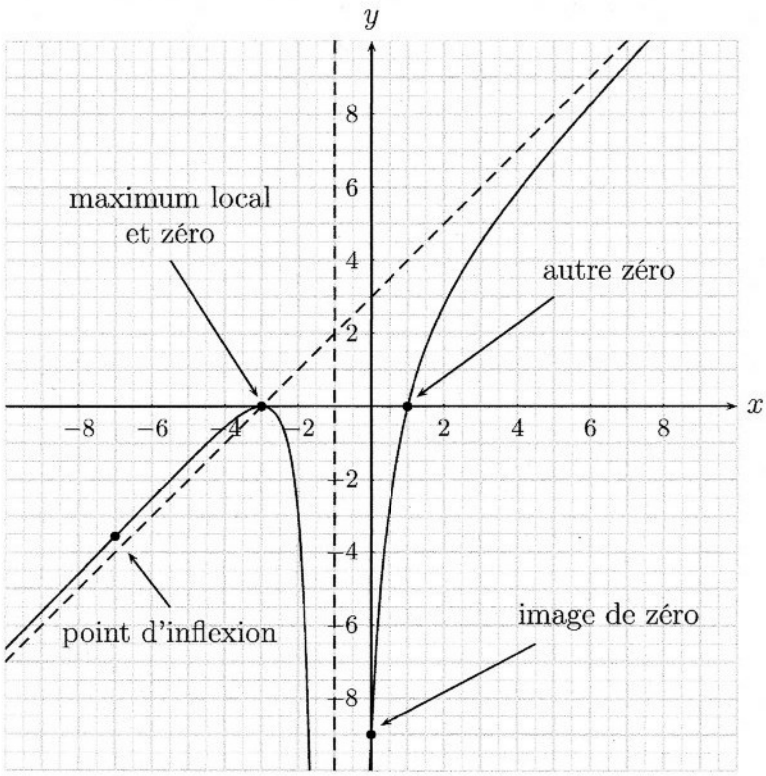
x		-7		-3		-1		1	
$f(x)$	$-$	$-\frac{32}{9}$	$-$	0	$-$	$\lightning$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	$\frac{28}{27}$	$+$	0	$-$	$\lightning$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$\lightning$	$-$	$-$	$-$
comportement de $f(x)$									

4. **Tangente au point d'inflexion**

   La pente au point d'inflexion est $f'(-7) = \frac{28}{27}$. L'équation de la tangente est

$$y = f(-7) + f'(-7)(x - (-7)) \iff y = -\tfrac{32}{9} + \tfrac{28}{27}(x+7)$$

5. **Graphe de la fonction**



Intersection avec l'asymptote oblique

Recherchons les éventuelles intersections entre la fonction f et l'asymptote oblique d'équation $y = x + 3$. On cherche les premières coordonnées de ces éventuels points :

$$f(x) = x+3 \iff \frac{(x-1)(x+3)^2}{(x+1)^2} = x+3 \iff (x-1)(x+3)^2 = (x+3)(x+1)^2$$

$$\iff (x-1)(x+3)^2 - (x+3)(x+1)^2 = 0 \iff (x+3)\Big((x-1)(x+3) - (x+1)^2\Big) = 0$$

$$\iff (x+3)\Big(x^2+2x-3-(x^2+2x+1)\Big) = 0 \iff (x+3)(-4) = 0 \iff x = -3$$

Le seul point d'intersection de la fonction et son asymptote est le point $(-3; 0)$.

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On considère une fonction dérivable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui satisfait

$$f(a) = f(b)$$

Alors, il existe (au moins) un nombre ξ tel que $a < \xi < b$ et $f'(\xi) = 0$.

Preuve

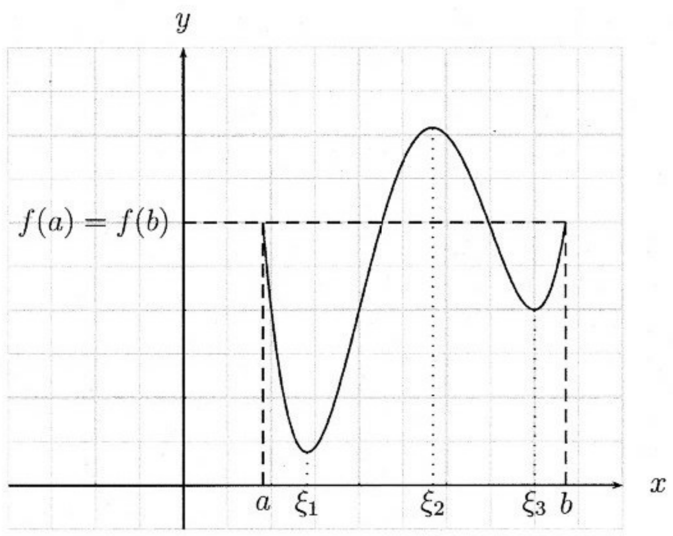
On distingue deux cas :

1. La fonction est constante (dans ce cas son graphe est horizontal) et on a $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Ainsi le ξ cherché peut être n'importe quel nombre entre a et b.

2. La fonction n'est pas constante. Dans ce cas, puisque $f(a) = f(b)$, alors la fonction admet (au moins) un maximum ou (au moins) un minimum entre a et b. Notons ξ la première coordonnée de cet extremum (un extremum est soit un minimum soit un maximum). La tangente en ξ est forcément horizontale, c'est-à-dire $f'(\xi) = 0$.

$\square$

Illustration



15.6 Le théorème des accroissements finis

Ce théorème souvent utilisé en mathématiques peut se déduire du théorème de Rolle. Il permet de démontrer le théorème de l'Hospital et il est utilisé dans le cours de troisième année afin de pouvoir calculer la longueur d'une courbe.

Théorème

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On considère une fonction dérivable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Alors, il existe (au moins) un nombre $\xi \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Preuve

On contemple la fonction

$$F(x) = (b - a)\big(f(b) - f(x)\big) - (b - x)\big(f(b) - f(a)\big)$$

Pour mieux visualiser cette fonction, on peut l'écrire comme un déterminant

$$F(x) \;=\; \begin{vmatrix} f(b) - f(x) & f(b) - f(a) \\ b - x & b - a \end{vmatrix}$$

Cette fonction est dérivable sur $[a, b]$ et on a $F(b) = F(a) = 0$.
Par le théorème de Rolle (appliqué à la fonction F), il existe un nombre ξ entre a et b tel que

$$F'(\xi) = 0$$

Or, en dérivant F, on trouve

$$F'(x) = -(b - a)f'(x) + (f(b) - f(a))$$

Donc

$$0 = F'(\xi) = -(b - a)f'(\xi) + (f(b) - f(a))$$

Et ainsi

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

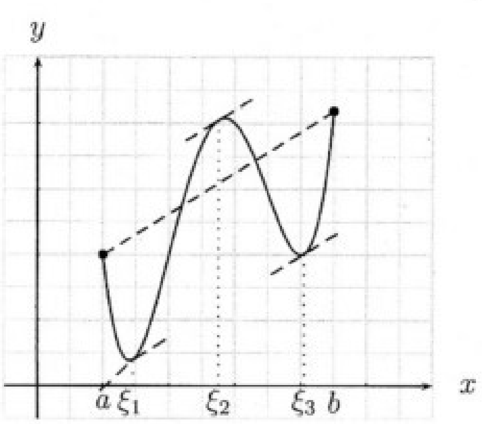
Interprétation

On peut interpréter ce théorème de la manière suivante.

La pente moyenne entre les points

$$(a; f(a)) \;\text{ et }\; (b; f(b))$$

est réalisée au moins une fois comme pente instantanée entre a et b.



15.7 Règle de l'Hospital

Il existe une règle très pratique faisant appel à la dérivée pour calculer certaines limites.

Règle de l'Hospital

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soit f et g deux fonctions qui sont dérivables au voisinage de a (même si elles ne le sont pas en a). On suppose aussi que f, g, f' et g' ne s'annulent pas au voisinage de a (même si elles s'annulent en a).

Si la limite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ on a

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}} \qquad \text{à condition que la limite de droite existe}$$

Exemples d'utilisation

1. On a
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} \overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2x+2}{1} = 4$$
2. On a
$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$
3. On a
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x)}{\sin(x)} \overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)+1}{\cos(x)} = -\infty$$
4. On a
$$\lim_{x\to +\infty} x\cdot e^{-x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Version light de la règle de l'Hospital et sa preuve

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f et g deux fonctions dérivables en a telles que

$$f(a) = 0, \quad g(a) = 0 \quad \text{et} \quad g'(a) \neq 0$$

Alors
$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}} \left(= \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$$

Preuve

Partons du terme de droite et utilisons la définition de la dérivée. On peut écrire ce terme puisque f et g sont dérivables en a et que $g'(a) \neq 0$.

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim\limits_{x_1\to a} \dfrac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}}{\lim\limits_{x_1\to a} \dfrac{g(x_1)-g(a)}{x_1-a}} = \lim_{x_1\to a} \frac{\dfrac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}}{\dfrac{g(x_1)-g(a)}{x_1-a}}$$

$$= \lim_{x_1\to a} \frac{f(x_1)-f(a)}{g(x_1)-g(a)} \underset{g(a)=0}{\overset{f(a)=0}{=}} \lim_{x_1\to a} \frac{f(x_1)}{g(x_1)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \square$$

15.8 Problèmes de taux d'accroissement

Exemple introductif

Une voiture roule à vitesse constante sur une autoroute. Elle consomme 0.08 litres par heure. Le prix du trajet est de 2 francs par litre consommé.

On peut en déduire le prix du trajet par heure.

$$\begin{aligned} \text{prix par heure} &= \text{prix par litre} \cdot \text{consommation} \\ &= 2\ {}^{\text{francs}}/_{\text{litre}} \cdot 0.08\ {}^{\text{litres}}/_{\text{heure}} = 0.16\ {}^{\text{francs}}/_{\text{heure}} \end{aligned}$$

Deux autres exemples

1. Les côtés d'un carré de 2 cm de côté croissent de 5 ${}^{\text{cm}}/_{\text{min}}$. Comment croit l'aire ?

   On travaille sous l'hypothèse que la croissance des côtés est constante, ainsi la fonction qui détermine la longueur des côtés est $c(t) = 5t + D$ avec $D \in \mathbb{R}$ une constante arbitraire (on pourrait prendre $D = 0$), car $c'(t) = 5$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   L'aire s'écrit en fonction de la longueur des côtés, $A(c) = c^2$, mais aussi en fonction de t
   $$A\big(c(t)\big) = c^2(t) = (5t + D)^2 = A(t)$$

   On cherche la vitesse de croissance de l'aire, c'est-à-dire la dérivée de l'aire.
   $$A'(t) = 2 \cdot (5t + D) \cdot 5 = 10(5t + D)$$

   On cherche l'instant t_0 pour lequel $c(t) = 2$. On trouve $t_0 = \frac{1}{5}(2 - D)$. Ainsi
   $$A'(t_0) = 10\left(5 \cdot \tfrac{1}{5}(2 - D) + D\right) = 20\ {}^{\text{cm}^2}/_{\text{min}}$$

2. Un carré de 4 cm^2 d'aire croît de 5 ${}^{\text{cm}^2}/_{\text{min}}$. Comment croissent les côtés ?

   On travaille sous l'hypothèse que la croissance de l'aire est constante, ainsi la fonction qui détermine la valeur de l'aire est $A(t) = 5t + D$ avec $D \in \mathbb{R}$ une constante arbitraire (on pourrait prendre $D = 0$), car $A'(t) = 5$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   La longueur des côtés s'écrit en fonction de l'aire, $c(A) = \sqrt{A}$, mais aussi en fonction de t
   $$c\big(A(t)\big) = \sqrt{A(t)} = \sqrt{5t + D} = c(t)$$

   On cherche la vitesse de croissance des côtés, c'est-à-dire la dérivée de la longueur des côtés.
   $$c'(t) = \frac{1}{2\sqrt{5t + D}} \cdot 5 = \frac{5}{2\sqrt{5t + D}}$$

   On cherche l'instant t_0 pour lequel $A(t) = 4$. On trouve $t_0 = \frac{1}{5}(4 - D)$. Ainsi
   $$c'(t_0) = \frac{5}{2\sqrt{5 \cdot \frac{1}{5}(4 - D) + D}} = \frac{5}{4}\ {}^{\text{cm}}/_{\text{min}}$$

Recherche d'une méthode plus efficace

Revenons à l'exemple introductif. Notons P pour la fonction qui donne le prix du trajet et L pour le nombre de litres consommés (L est un nombre ou une fonction selon le point de vue), et t pour le nombre d'heures du trajet.

La fonction P peut s'exprimer en fonction de L ou de t. La donnée permet d'affirmer que $P(L) = 2L$ et, en considérant L comme une fonction de t, on a $L(t) = 0.08t$. Ainsi

$$P\big(L(t)\big) = 2L(t) = 2 \cdot 0.08t = 0.16t = P(t)$$

En reprenant le calcul ci-dessus, on remarque l'apparition de dérivées.

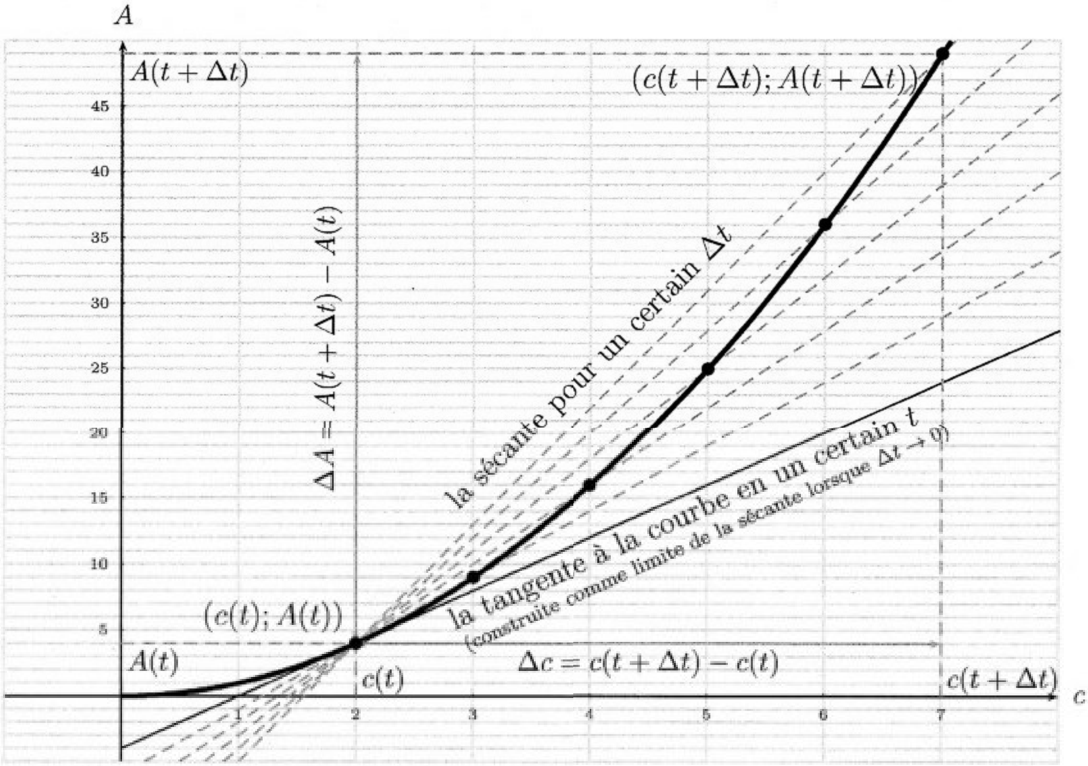
$$\begin{array}{ccccc}
2\ {}^{\text{francs}}/_{\text{litre}} & \cdot & 0.08\ {}^{\text{litres}}/_{\text{heure}} & = & 0.16\ {}^{\text{francs}}/_{\text{heure}} \\[1em]
\begin{array}{c}\text{dérivée de } P\\ \text{en fonction de } L\end{array} & \cdot & \begin{array}{c}\text{dérivée de } L\\ \text{en fonction de } t\end{array} & = & \begin{array}{c}\text{dérivée de } P\\ \text{en fonction de } t\end{array} \\[1em]
\dfrac{dP}{dL} & \cdot & \dfrac{dL}{dt} & = & \dfrac{dP}{dt}
\end{array}$$

La dernière ligne correspond à la *notation de Leibniz* (la notation f' pour la dérivée ne suffit plus car il y a deux variables différentes, L et t). On y reviendra.

Dans cet exemple, on a deux fonctions de t, $P(t)$ et $L(t)$, et l'une peut s'exprimer en fonction de l'autre, $P(L) = 2L$.

15.8.1 Notation de Leibniz et dérivation en cascade

On a deux fonctions A et c qui s'expriment toutes les deux en fonction d'une variable t. On représente les fonctions A et c comme une courbe paramétrée[3] et on revient à la définition de la dérivée.



3. Voir le chapitre 5 du supplément pour scientifiques du cours DF ; mais pour ce qui suit, les deux autres exemples de la page précédente suffisent.

Si la tangente n'est pas verticale[4], la fonction A s'écrit en fonction de la c (dans le premier des deux autres exemples, on a $A(c) = c^2$). On voit sur la représentation de la courbe paramétrée que pour Δt fixé, on a

$$\begin{cases} \Delta c = c(t+\Delta t) - c(t) \\ \Delta A = A(t+\Delta t) - A(t) \end{cases} \iff \begin{cases} c(t) + \Delta c = c(t+\Delta t) \\ A(t) + \Delta A = A(t+\Delta t) \end{cases}$$

Sous ces notations, on a

$$\lim_{\Delta c\to 0} \frac{A(c+\Delta c) - A(c)}{\Delta c} \cdot \lim_{\Delta t\to 0} \frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{\Delta t}$$

la fonction A peut aussi s'exprimer en fonction de t
car la fonction c s'exprime en fonction de t

$$\overset{\downarrow}{=} \lim_{\Delta t\to 0} \frac{A(c(t+\Delta t)) - A(c(t))}{c(t+\Delta t) - c(t)} \cdot \lim_{\Delta t\to 0} \frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \left(\frac{A(c(t+\Delta t)) - A(c(t))}{c(t+\Delta t) - c(t)} \cdot \frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{\Delta t} \right)$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{A(c(t+\Delta t)) - A(c(t))}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t}$$

Ainsi, sous la notation de Leibniz, on a montré (à nouveau) la dérivation en cascade

$$\boxed{\frac{dA}{dc} \cdot \frac{dc}{dt} = \frac{dA}{dt}} \ (\bigstar)$$

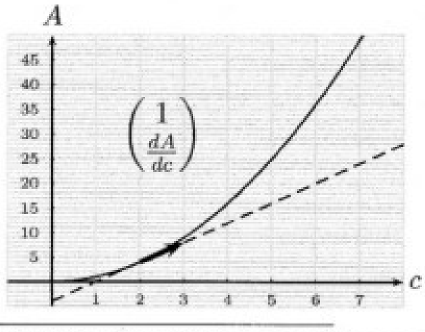
Une autre façon de présenter $\frac{dA}{dc}$ est : $\frac{dA}{dc} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{c(t+\Delta t) - c(t)} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta A}{\Delta c}$.
En se référant au schéma à la page précédente, c'est la pente de la tangente en $(c(t); A(t))$. C'est donc la dérivée de A par rapport à c.

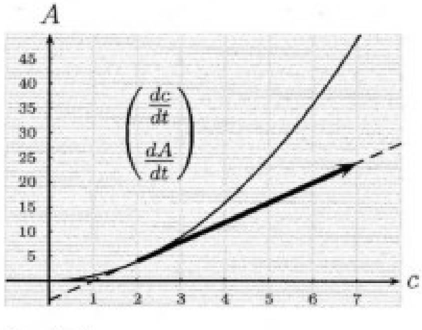
On a aussi les dérivées par rapport à t suivantes.

$$\frac{dc}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta c}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

Attention : ce ne sont pas de vraies «fractions», car il y a une limite qui se cache dans chacune de ces «fractions».

La relation ($\bigstar$) permet de montrer que les deux vecteurs représentés ci-dessous sont parallèles. Ainsi, les deux dérivées par rapport à t permettent de trouver un vecteur tangent à une courbe paramétrée en un instant t (ce sont les vecteurs du premier exemple).

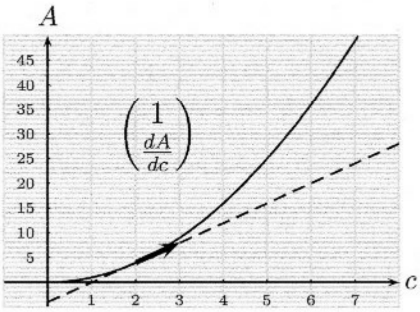


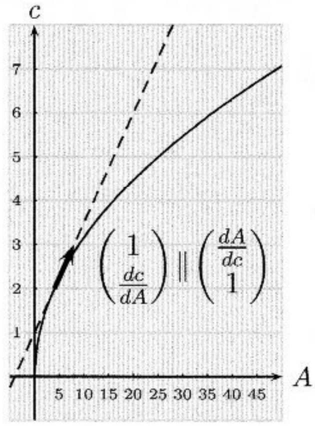


4. Si la tangente est verticale, on exprime c en fonction de A.

Une autre formule intéressante

Si on utilise les fonctions réciproques, c'est-à-dire on exprime c en fonction de A au lieu d'exprimer A en fonction de c. les graphes sont symétriques (par la symétrie d'axe $y = x$).





Les vecteurs tangents sont ainsi car la pente de la tangente du repère de gauche vaut $\frac{dA}{dc}$, alors que pour celle du repère de droite, elle vaut $\frac{dc}{dA}$ (la réciproque échange les rôles de c et de A). Mais cette symétrie échange aussi les composantes des vecteurs, ainsi en utilisant la propriété des vecteurs parallèles, on a la relation suivante (qu'on peut aussi démontrer en calculant des limites comme à la page précédente).

$$\frac{dA}{dc} \cdot \frac{dc}{dA} = 1$$

Moralité : ce ne sont pas de vraies «fractions», mais elles obéissent aux mêmes règles de multiplication et de division que les «vraies» fractions.

Application basée sur les deux exemples

On considère un carré de côté c et d'aire A.

1. On peut exprimer l'aire du carré en fonction de la longueur de ses côtés à l'aide de la fonction
$$A(c) = c^2$$

2. On peut exprimer la longueur des côtés du carré en fonction de son aire à l'aide de la fonction
$$c(A) = \sqrt{A}$$

On a les dérivées suivantes.

$$\frac{dA}{dc} = 2c = 2\sqrt{A} \qquad \text{et} \qquad \frac{dc}{dA} = \frac{1}{2\sqrt{A}} = \frac{1}{2c}$$

Que l'on prenne c ou A comme variable, on retrouve bien la relation

$$\frac{dA}{dc} \cdot \frac{dc}{dA} = 1$$

Résolution plus élégante des deux autres exemples

On note $A(t)$ pour l'aire exprimée en fonction du temps, $c(t)$ pour la longueur des côtés en fonction du temps et $A(c) = c^2$ pour l'aire exprimée en fonction de la longueur des côtés.

1. Dans ce cas, on fait le calcul en utilisant la fonction de l'aire exprimée en fonction du temps, mais aussi en fonction de la longueur des côtés du carré, qui elle-même est exprimée en fonction du temps.

taux d'accroissement de l'aire en fonction du temps	=	dérivée de A en fonction de c	$\cdot$	taux d'accroissement des côtés en fonction du temps
$\dfrac{dA}{dt}$	=	$\dfrac{dA}{dc}$	$\cdot$	$\dfrac{dc}{dt}$
	=	$2c$	$\cdot$	5

Comme $c = 2$, on a $\dfrac{dA}{dt} = 20\ {\rm cm}^2/{\rm min}$.

Si on veut être un peu plus pointilleux, il faudrait plutôt écrire

$$\frac{dA}{dt}(t_0) = \frac{dA}{dc}(c(t_0)) \cdot \frac{dc}{dt}(t_0) = 4 \cdot 5 = 20\ {\rm cm}^2/{\rm min}$$

où t_0 correspond à l'instant où les côtés du carré font 2 cm, c'est-à-dire $c(t_0) = 2$.

La donnée dit $\frac{dc}{dt}(t_0) = 5$. Ainsi, on n'a pas eu besoin de poser l'hypothèse que la croissance des côtés est constante, car on n'utilise que la connaissance de la croissance instantanée en l'instant t_0 (qui n'a pas besoin d'être connu).

2. Dans ce cas, on fait le calcul en utilisant la fonction de la longueur des côtés du carré exprimée en fonction du temps, mais aussi en fonction de l'aire du carré, qui elle-même est exprimée en fonction du temps.

On peut réutiliser la dérivée utilisée au point précédent, car on a la relation

$$\frac{dA}{dc} \cdot \frac{dc}{dA} = 1$$

On a ainsi

taux d'accroissement des côtés en fonction du temps	=	dérivée de c en fonction de A	$\cdot$	taux d'accroissement de l'aire en fonction du temps
$\dfrac{dc}{dt}$	=	$\dfrac{dc}{dA}$	$\cdot$	$\dfrac{dA}{dt}$
$\dfrac{dc}{dt}$	=	$\dfrac{1}{\frac{dA}{dc}}$	$\cdot$	$\dfrac{dA}{dt}$
	=	$\dfrac{1}{2c}$	$\cdot$	5

Comme $c = 2$ (car $A = 4$), on a $\dfrac{dc}{dt} = \dfrac{5}{4}\ {\rm cm}/{\rm min}$.

Comme avant, on n'a pas eu besoin de poser l'hypothèse que la croissance de l'aire est constante, car on n'utilise que la connaissance de la croissance instantanée en l'instant t_0 (qui n'a pas besoin d'être connu).

15.8.2 Les dérivées implicites

On considère un point $P(x; y)$ sur le cercle trigonométrique d'ordonnée positive ($y > 0$). Calculons la pente de la tangente au cercle en ce point P. On procède de manière classique par les points 1, 2 ; le but de cette section est d'observer qu'on peut faire de même sur une équation implicite comme on le montre en 3 et surtout en 4 ; le point 5 est juste un clin d'œil à la géométrie.

1. On peut écrire y en fonction de x, $y(x) = \sqrt{1-x^2}$, la pente est égale à la dérivée de y en fonction de x.
$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y}$$

2'. On peut écrire x en fonction de y, $x(y) = \pm\sqrt{1-y^2}$ (+ si $x > 0$, − si $x < 0$). La pente cherchée est
$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'(y)}$$
On a ainsi
$$x'(y) = \pm\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} \cdot (-2y) = \pm\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}} = \pm\frac{-y}{\pm x} = -\frac{y}{x} \implies y'(x) = -\frac{x}{y}$$

2". On peut isoler x de l'équation $x^2 + y^2 = 1$ en considérant y comme une fonction de x. On obtient $x = \pm\sqrt{1 - y^2(x)}$ (+ si $x > 0$, − si $x < 0$).

On dérive chaque partie de l'équation par rapport à x.
$$1 = \pm\frac{1}{2\sqrt{1-y^2(x)}} \cdot \big(-2y(x)\big) \cdot y'(x) \iff y'(x) = \frac{1}{\pm\frac{1}{\pm 2x} \cdot (-2y)} = -\frac{x}{y}$$

3. On définit le cercle par l'équation paramétrée *implicite*[5] $x^2(t) + y^2(t) = 1$ (avec, par exemple, $x(t) = \cos(t)$ et $y(t) = \sin(t)$). On dérive à gauche et à droite.
$$2x(t)\frac{dx}{dt}(t) + 2y(t)\frac{dy}{dt}(t) = 0 \overset{:\frac{dx}{dt}(t)}{\iff} 2x(t) + 2y(t)\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}(t) = 0$$
Comme l'ordonnée du point P est positive, elle peut s'écrire en fonction de x.
$$\iff 2x(t) + 2y(t)\frac{dy}{dx}(x(t)) = 0 \iff 2x + 2y(x)y'(x) = 0 \iff y'(x) = -\frac{x}{y}$$

4. On sait que le cercle trigonométrique est défini par l'équation $x^2+y^2 = 1$ qui est une équation *implicite*. Comme le point P est d'abscisse positive, on peut exprimer y en fonction de x (sans avoir besoin de donner la fonction de manière explicite). Ainsi, l'équation devient $x^2 + y^2(x) = 1$. On dérive à gauche et à droite.
$$2x + 2y(x)\frac{dy}{dx}(x) = 0 \iff 2x + 2y(x)y'(x) = 0 \iff y'(x) = -\frac{x}{y}$$

5. Le vecteur normal à la tangente en P est $\binom{x}{y}$, ainsi le vecteur directeur est $\binom{y}{-x}$ qui est parallèle au vecteur $\binom{1}{-\frac{x}{y}}$. Ainsi la pente de la tangente est $-\frac{x}{y}$.

5. On dit que l'équation est implicite car x et y ne sont pas isolés.