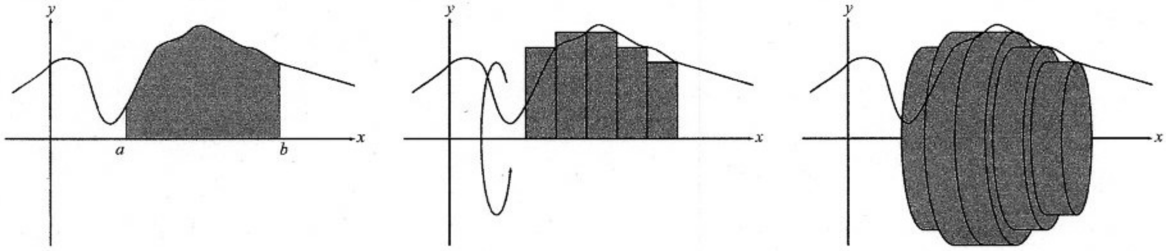
Chapitre 18

Quelques applications des intégrales

18.1 Volumes de révolutions

18.1.1 Autour du premier axe

Dans ce cas, on veut décrire le volume V_x construit à partir d'une courbe que l'on fait tourner le long de l'axe des x entre les bornes a et b.



On procède de la même façon que pour l'aire sous une courbe. On commence par subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ pour i allant de 1 à n (sur l'exemple ci-dessus, on a pris $n = 5$). On construit ainsi n rectangles dont le coin droit touche le graphe de la fonction (comme montré sur le dessin), puis on les fait tourner autour de l'axe des x afin de former des rondelles cylindriques. Enfin en faisant tendre le nombre de subdivisions n vers l'infini (et par conséquent la longueur des intervalles de la subdivision vers 0), on trouve le volume V_x cherché.

Le volume de la i-ième rondelle est donné par la formule "base fois hauteur" où la base est le disque de rayon $f(x_i)$ et où la hauteur est la largeur de la subdivision $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

$$\pi\big(f(x_i)\big)^2 \cdot \Delta x$$

De ce fait, le volume de toutes les rondelles vaut

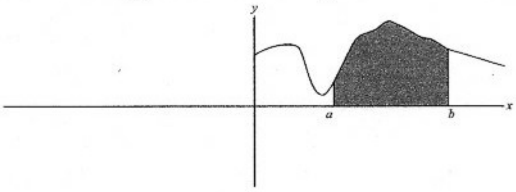
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\pi f^2(x_i) \cdot \Delta x\right) \ = \ \pi \sum_{i=1}^{n} f^2(x_i)\Delta x$$

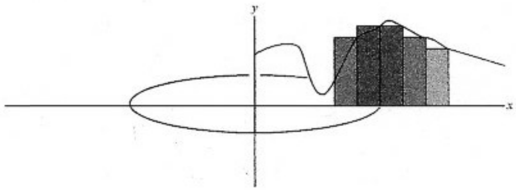
En prenant la limite, on peut utiliser la notation de l'intégrale pour obtenir :

$$V_x \ = \ \lim_{n\to+\infty} \pi \sum_{i=1}^{n} f^2(x_i)\Delta x \ = \ \pi \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f^2(x_i)\Delta x \overset{\text{not.}}{=} \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

18.1.2 Autour du deuxième axe

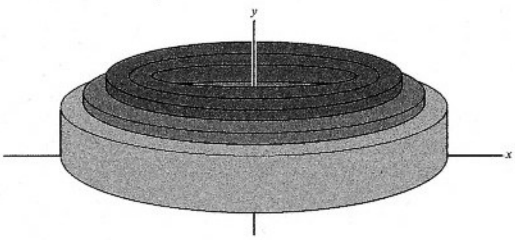
Dans ce cas, on veut décrire le volume V_y construit à partir d'une courbe que l'on fait tourner le long de l'axe des y entre les bornes a et b.



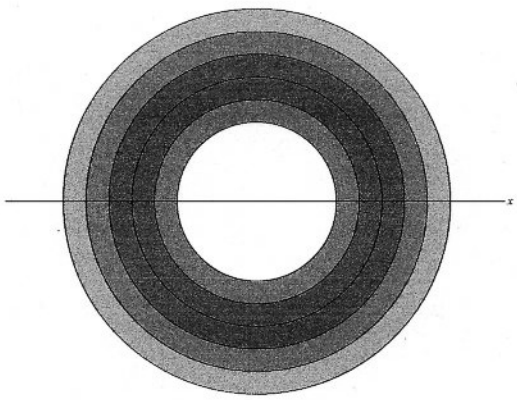


Voici deux façons de voir comment on tourne autour de l'axe des y.

Vue de côté



Vue de dessus



On procède de la même façon que précédemment. On commence par subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ pour i allant de 1 à n (sur l'exemple ci-dessus, on a pris $n = 5$). On construit ainsi n rectangles dont le coin droit touche le graphe de la fonction (comme montré sur le dessin), puis on les fait tourner autour de l'axe des y afin de former cylindres creux. Enfin en faisant tendre le nombre de subdivisions n vers l'infini (et par conséquent la longueur des intervalles de la subdivision vers 0), on trouve le volume V_y cherché.

On trouve le volume du i-ième cylindre creux en soustrayant au volume du cylindre plein de rayon x_i celui de rayon $x_{i-1} = x_i - \Delta x$. Ce volume est ainsi

$$\overbrace{\underbrace{\pi x_i^2}_{\text{base}}\ \underbrace{f(x_i)}_{\text{hauteur}}}^{\substack{\text{volume du cylindre}\\ \text{de rayon } x_i}} - \overbrace{\underbrace{\pi(x_i - \Delta x)^2}_{\text{base}}\ \underbrace{f(x_i)}_{\text{hauteur}}}^{\substack{\text{volume du cylindre}\\ \text{de rayon } x_{i-1} = x_i - \Delta x}} = \pi 2 x_i \Delta x f(x_i) - \pi(\Delta x)^2 f(x_i)$$

De ce fait, le volume de tous les cylindres creux vaut

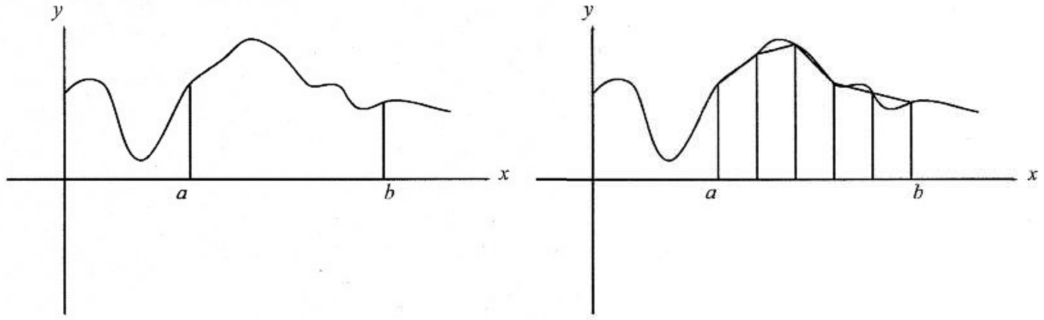
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\pi 2 x_i \Delta x f(x_i) - \pi(\Delta x)^2 f(x_i)\right) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\Delta x - \pi \overbrace{\tfrac{b-a}{n}}^{=\Delta x} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

En prenant la limite, on peut utiliser la notation de l'intégrale pour obtenir :

$$V_y = 2\pi \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\Delta x - \pi \overbrace{\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \tfrac{b-a}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x}_{=\int_a^b f(x)\,dx}}^{\to 0} \overset{\text{not.}}{=} 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$$

18.2 Longueur d'une courbe

Dans ce cas, on veut décrire la longueur L d'une courbe donnée par le graphe d'une fonction entre les bornes a et b.



On procède de la même façon que précédemment. On commence par subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ pour i allant de 1 à n (sur l'exemple ci-dessus, on a pris $n = 5$). Pour chaque intervalle de la subdivision, on remplace la courbe par un segment dont on calcule la longueur. Enfin en faisant tendre le nombre de subdivisions n vers l'infini (et par conséquent la longueur des intervalles de la subdivision vers 0), on trouve la longueur L cherchée.

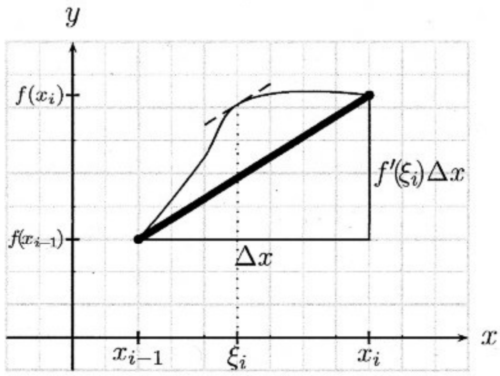
La longueur du i-ième segment (au-dessus du i-ième intervalle) est donnée par Pythagore et le théorème des accroissements finis.

Rappel : le théorème des accroissements finis et son interprétation

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On considère une fonction dérivable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Alors, il existe (au moins) un nombre $\xi \in \,]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$



Interprétation adaptée à notre cas

La pente moyenne entre les points

$$(x_{i-1}, f(x_{i-1})) \quad \text{et} \quad (x_i, f(x_i))$$

est égale à $f'(\xi_i)$ (pente instantanée en ξ_i) pour un ξ_i entre x_{i-1} et x_i (non compris).

Par Pythagore, et comme $\Delta x > 0$, la longueur du segment est donnée par :

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(\xi_i)\Delta x)^2} = \sqrt{1 + (f')^2(\xi_i)}\, \Delta x$$

De ce fait, le longueur de tous les segments vaut

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{1 + (f')^2(\xi_i)}\, \Delta x \right)$$

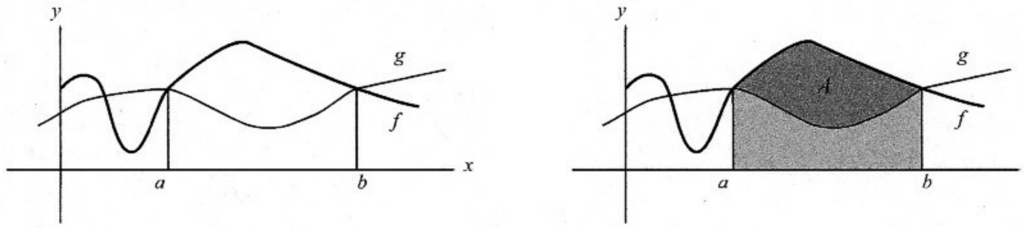
En prenant la limite, on peut utiliser la notation de l'intégrale pour obtenir :

$$L = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{1 + (f')^2(\xi_i)}\, \Delta x \right) \right) \overset{\text{not.}}{=} \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2(x)}\, dx$$

Le fait que l'on ait ξ_i à la place de x_i ne pose aucun problème si f' est continue.

18.3 L'aire entre deux courbes

Dans ce cas, on veut calculer l'aire A entre deux courbes données respectivement par les fonctions f et g entre les bornes a et b.



Dans le cas où les fonctions sont toutes deux positives, on obtient A de la manière suivante.

$$A = \text{“Aire sous la fonction la plus grande”} - \text{“Aire sous la fonction la plus petite”}$$

Ainsi, si $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Cette formule est aussi valable lorsque les fonctions ne sont pas forcément positives, tant que $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ est toujours valable. En effet, on translate les deux fonctions vers le haut jusqu'à ce qu'elles soit toutes deux positives (par chance, l'amplitude de la translation se simplifie lorsqu'on écrit la formule).

$$\boxed{A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \quad \text{si } f(x) \geqslant g(x) \text{ pour tout } x \in [a, b]}$$

Résumé

1. Le volume V_x construit à partir d'une courbe f que l'on fait tourner le long de l'axe des x entre les bornes a et b est donné par la formule suivante.

$$\boxed{V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx}$$

2. Le volume V_y construit à partir d'une courbe f que l'on fait tourner le long de l'axe des y entre les bornes a et b est donné par la formule suivante.

$$\boxed{V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx}$$

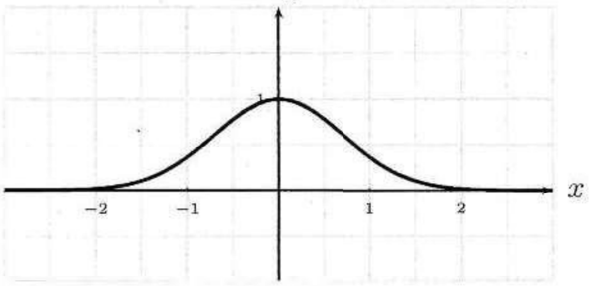
3. La longueur L de la courbe f entre les bornes a et b est donné par la formule suivante.

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2(x)}\,dx}$$

18.4 Un calcul d'intégrale sophistiqué

On considère la fonction $f(x) = e^{-x^2}$. Cette fonction n'admet pas de primitive qui s'écrit comme combinaisons $(+, -, \cdot, \div, \circ)$ de fonctions élémentaires (monômes, racines n-ièmes, fonctions trigonométriques, exponentielles et logarithmes).

Voici le graphe de cette fonction qui ne s'annule jamais (même si elle a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$).



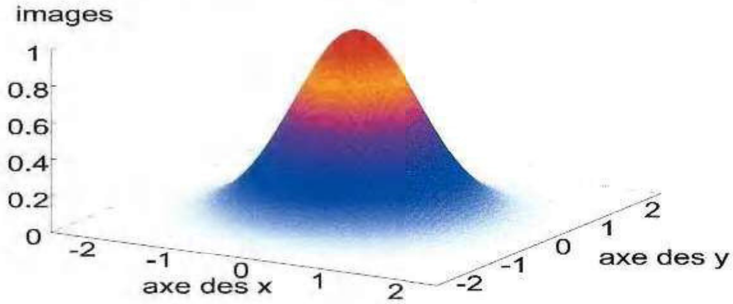
Puisque cette fonction n'admet pas de primitive, on ne peut pas directement utiliser le théorème fondamental du calcul intégral (TFCI) pour calculer l'intégrale $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$.

L'astuce consiste à faire tourner la fonction autour de l'axe vertical. Cela transforme la fonction $f(x)$ en une fonction à deux variables qui est $g(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

En effet, lorsqu'on fait tourner la fonction, on remplace x par le rayon r du cercle centré à l'origine passant par le point $(x; y)$. Par Pythagore, on a $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, ainsi

$$g(x, y) = f(r) = e^{-\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = e^{-(x^2+y^2)}$$

On obtient le graphe suivant pour $f(x, y)$.



On calcule le volume V sous la fonction de deux manières différentes.

1. Par les applications de l'intégrale, on peut faire tourner le graphe de f autour de l'axe vertical de 0 à x. On a ainsi

$$V = 2\pi \int\limits_0^{+\infty} x f(x)\,dx = \pi \int\limits_0^{+\infty} 2xe^{-x^2}\,dx$$

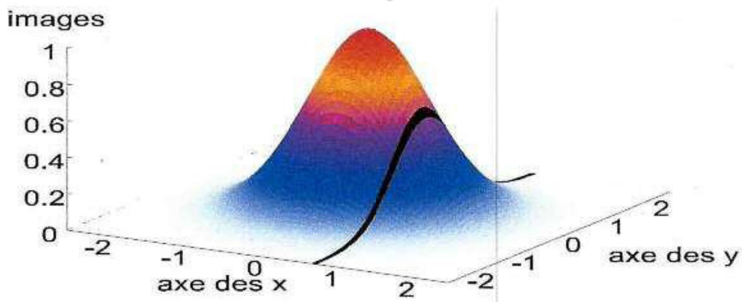
   En effectuant la substitution $t = x^2$, on a $dt = 2x\,dx$ (on n'oublie pas de calculer les nouvelles bornes d'intégration) et on obtient ainsi

$$V = \pi \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\,dt \overset{\text{TFCI}}{=} \pi\left(-e^{-t}\Big|_0^{+\infty}\right) = \pi\Big(\lim_{t\to+\infty} -e^{-t} - (-1)\Big) = \pi \cdot 1 = \pi$$

2. On calcule le volume V à l'aide d'une intégrale double (même principe qu'une intégrale simple, mais au lieu d'estimer l'aire sous la fonction à l'aide de rectangles, on utilise des parallélépipèdes rectangles).

$$V = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dxdy$$

On voit que grâce à la formule sur les puissances, on peut «casser » $f(x,y)$ en un produit de fonctions à une variable. On peut donc calculer cette intégrale pour x, puis pour y comme le montre le graphe suivant (en noir, on voit une épaisseur dx, bien sûr il faut penser que la partie noire descend jusqu'au plan horizontal à hauteur 0, mais qu'elle est cachée par le reste de la fonction).



$$V = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\right)dx$$

Mais l'intégrale en y ne dépend pas de x (le résultat est un nombre), on peut donc la sortir de l'intégrale en x.

$$V = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)$$

Ainsi, en changeant le nom de la variable y en x, on obtient

$$V = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

On a donc montré que le carré de l'intégrale qu'on cherche à calculer vaut π. Par conséquent, on a

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}}$$