Arithmétique

Grandeurs proportionnelles, pourcentages, échelles et règle de trois

§ 1. Grandeurs proportionnelles

Deux grandeurs sont des **grandeurs proportionnelles** si, pour passer d'un nombre correspondant à la première grandeur au nombre correspondant à la deuxième grandeur, on multiple toujours par le même nombre.

Par exemple, le nombre acheté de litres d'essence et le prix à payer sont proportionnels: si le prix d'un litre d'essence coûte 1,80 francs, on multiplie le nombre de litres d'essence par 1,8 et on obtient toujours le prix à payer; ainsi, le prix de 8 litres d'essence est 8 fois 1,8, c'est-à-dire 14,40 francs.

Il existe beaucoup de grandeurs proportionnelles:

- le nombre d'articles et le prix à payer;
- la longueur des côtés de carrés et leur périmètre;
- le poids d'objets et leur volume;
- etc.

Cependant, toutes les grandeurs ne sont pas proportionnelles. Par exemple, si on multiplie le côté d'un carré par trois, son aire ne sera pas multiplié par trois, mais par neuf. Il faut donc avant toute chose vérifier que la proportionnalité existe avant de l'affirmer. Pour cela, il suffit de se demander: "si je double le nombre correspondant à la première grandeur, est-ce que le nombre correspondant à la deuxième grandeur sera doublé?"; si oui, les deux grandeurs sont proportionnelles; ni non, elles ne sont pas proportionnelles.

§ 2. Règle de trois

La **règle de trois** s'applique **uniquement** aux grandeurs proportionnelles.

1ère technique:

Supposons que l'on sache que 3 kg de pain coûtent 10,50 francs et que l'on doive trouver combien coûtent 4,5 kg de pain.

Il est clair que le nombre de kilogrammes de pain et son prix sont des grandeurs proportionnelles (si on double le nombre de kilogrammes, on double le prix).

On construit un tableau dont chaque colonne concerne une des grandeurs concernées (ici les kilogrammes et les francs) et on y place des 3 nombres à disposition:

kg	francs
3	**10,50**
4,5	

On a indiqué dans ce tableau le prix connu des 3 kg de pain (10,50 francs).

On cherche maintenant le prix d'un kg de pain:

kg	francs
3	10,50
1	
4,5	

Comme il faut diviser 3 par 3 pour obtenir 1, on divise 10,50 par 3 pour obtenir le prix d'un kg:

kg	francs
3	10,50
1	**3,50**
4,5	

A partir d'un kg de pain, on peut alors facilement trouver le prix de 4,5 kg en multipliant le prix d'un kg par 4,5:

kg	francs
3	10.5
1	3,50
4.5	**15,75**

Ainsi, le prix de 4,5 kg de pain est 15,75 francs.

2ème technique:

La procédure de **règle de trois** peut être simplifiée. Il n'est pas nécessaire de calculer la ligne du milieu (pour 1 kg).

On écrit dans un tableau similaire les trois nombres que l'on a à disposition:

kg	francs
3	**10,50**
4,5	

On a indiqué dans ce tableau le prix connu des 3 kg de pain (10,50 francs). On calcul alors le quatrième nombre (prix de 4,5 kg) de la manière suivante:

kg	francs
3	**10,50**
4,5	$\frac{4,5 \cdot 10,50}{3}$

Le **quatrième nombre (inconnu) est toujours le produit des deux nombres de la diagonale connue** (4,5 et 10,50) **divisé par le troisième nombre connu** (3).

On a alors directement:

kg	francs
3	10.5
4.5	**15,75**

Ainsi, le prix de 4,5 kg de pain est 15,75 francs.

Pour tous les calculs avec des grandeurs proportionnelles, on peut utiliser l'un des techniques ci-dessus. Dans la suite, on utilisera la 2ème technique (plus rapide que la première).

§ 3. Proportionnalité inverse

Toutes les grandeurs ne sont pas proportionnelles. La règle de trois ne s'appliquent pas pour celles qui ne le sont pas.

Parmi les grandeurs qui ne sont pas proportionnelles, on distingue les **grandeurs inversement proportionnelles**. Dans ce cas-là, si on double le nombre correspondant à la première grandeur, le nombre correspondant à la seconde grandeur ne sera plus doublé, mais divisé par deux.

Un exemple de grandeurs inversement proportionnelles est la vitesse d'un véhicule et le temps qu'il met pour effectuer une distance donnée. Si la distance est de 100 km et que le véhicule roule à 50 km/h, il met 2 heures pour effectuer le parcours. S'il va deux fois plus vite, c'est-à-dire s'il va à 100 km/h, il mettra 1 heure, c'est-à-dire qu'il mettra deux fois moins de temps. Ainsi, si on double la vitesse, le temps ne sera pas doublé, mais divisé par deux.

§ 4. Masse volumique

La masse volumique est un des exemples où on utilise la règle de trois.

La **masse volumique** (symbolisée par la lettre grecque ρ) d'un corps est égale au quotient de sa masse (m) par son volume (V): $\rho = \frac{m}{V}$.

La masse d'un corps et son volume sont des grandeurs proportionnelles (si on double la masse, on double le volume, et vice-versa).

Admettons que la masse volumique d'un objet est de 7'500 kg/m^3, ce qui signifie que 1 m^3 de matière formant l'objet a une masse de 7'500 kg. On dispose d'une cube de la même matière dont on sait que la masse est de 1'500 g et on cherche à connaître son volume. On utilise la règle de trois. On fait donc un tableau, en transformant les kilogrammes en grammes afin de travailler dans la même unité (7’500 kg = 7’500’000 g):

g	m^3
7'500'000	1
1’500	

Pour trouver le 4ème nombre, on multiple les deux nombres de la diagonale connue (1’500 et 1) et on divise le produit par le 3ème connu (7’500’000):

g	m^3
7'500'000	1
1'500	$\frac{1500 \cdot 1}{7500000}$

On obtient ainsi:

g	m^3
7'500'000	1
1'500	**0,0002**

Ainsi, le volume des 1'500 grammes de la sphère est 0,0002 m^3, autrement dit 0,2 dm^3 ou 200 cm^3.

§ 5. Pourcentages

Un autre exemple où l'on peut utiliser facilement appliquer la règle de trois est les pourcentages.

Un **pourcentage** est une fraction dont le dénominateur est 100.

Par exemple: 20% = $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ = 0,2.

Calculer le pourcentage d'un nombre se fait de la manière suivante:

20% de 450 = $\frac{20}{100}$ de 450 = $\frac{1}{5}$ de 450 = $\frac{1}{5} \cdot 450 = \frac{1}{5} \cdot \frac{450}{1} = \frac{450}{5} = \frac{90}{1}$ = 90.

Dans certaines situations plus complexes avec les pourcents, on peut utiliser sans problème la règle de trois.

A noter, que dans les calculs avec les pourcents, **le nombre de départ (sur lequel on ajoute ou enlève un certain pourcentage) vaut toujours 100%**.

En voici trois exemples:

1er exemple:

Le 1er janvier, vous déposez 1000.-- sur votre compte en banque. A la fin de l'année, vous recevez 3 % d'intérêts sur l'argent mis sur votre compte. A quelle somme cela correspond-il?

Le nombre de départ, ici les 1000.-- déposés en banque, correspond toujours à 100 %.

On peut alors utiliser la règle de trois de la manière suivante:

%	francs
100	1'000
0	

%	francs
100	1'000
3	$\frac{3 \cdot 1000}{3}$

%	francs
100	1'000
3	**30**

La somme correspondante est donc de 30 francs.

2ème exemple:

Une voiture coûte 25'000.--. Elle subit une augmentation de 8 %. Combien va-t-elle alors coûter?

Là encore, le chiffre de départ, les 25'000.--, correspond à 100 %.

Comme il y a une augmentation de 8 %, on doit, pour répondre à la question, calculer le 108 %.

Le tableau de la règle de trois est alors:

%	francs
100	25'000
0	

%	francs
100	25'000
108	$\frac{108 \cdot 25000}{100}$

%	francs
100	25'000
108	**27'000**

Ainsi, le nouveau prix de la voiture est de 27'000.--.

On aurait aussi pu calculer 8 % du prix de départ de la voiture (on aurait trouver 2000.--) et il aurait alors fallu les ajouter aux 25'000.-- de départ, et on aurait alors aussi obtenu 27'000.--.

3ème exemple:

Vous prêtez 150.-- à un ami. Il vous rend 175.--. A quel pourcent d'intérêts lui avez-vous fait votre prêt?

Le nombre de départ, les 150.-- prêtés, correspond à 100 %.

Le montant des intérêts correspondent à 175 - 150 = 25.--. Il faut donc trouver à quel pourcent correspondent ces 25.--

En utilisant la règle de trois, on a:

%	francs
100	150
	25

Cette fois-ci, la diagonale connue va d’en haut à gauche à en bas à droite (contrairement aux exemples ci-dessus où la diagonale allait d’en bas à gauche à en haut à droite). On utilise néanmoins la même technique (on multiplie les deux nombres de la diagonale connue et on divise le produit par le troisième nombre connu):

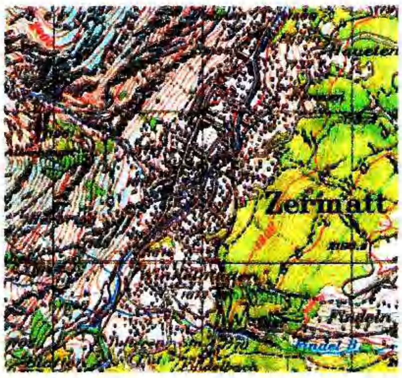
%	francs
100	150
$\frac{100\cdot 25}{150}$	25

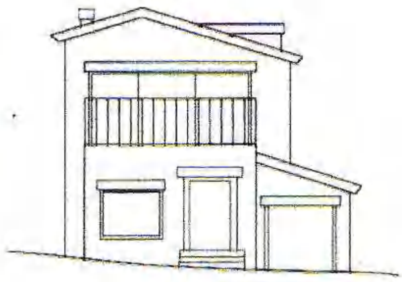
%	francs
100	150
16,666...	25

Le pourcentage cherché est donc de 16,666... %, que l'on arrondit à 16,67 %.

§ 6. Echelles

Un troisième exemple où l'utilisation de la règle de trois est utile est les calculs liés aux **échelles**.





1 : 50'000
Chaque dimension réelle a été divisée par 50'000.

1 : 200
Chaque dimension réelle a été divisée par 200.

10 : 1
Chaque dimension réelle a été multipliée par 10.

La carte topographique et le plan de la façade sont des réductions de la réalité : leurs échelles sont inférieures à 1.

Le dessin du coléoptère est un agrandissement de la réalité : son échelle est supérieure à 1.

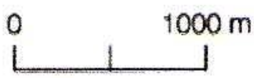
Cette carte, ce plan et ce dessin sont des représentations à l'échelle d'une réalité physique. Cela signifie que, dans chacun de ces cas, les dimensions de la représentation et les dimensions réelles sont proportionnelles.

Une échelle peut être exprimée de plusieurs manières, la première étant la plus courante:

Par un quotient

1 : 50'000

Par un dessin



Par une indication du type

«2 cm pour 1 km»

Exemple: une échelle 1:50'000 signifie qu'un centimètre sur la carte correspond à 50'000 centimètres dans la réalité, autrement que la réalité est divisée par 50’000 pour obtenir la carte.

Voici trois exemples d'utilisation de la règle de trois dans les calculs liés aux échelles.

1er exemple:

Sur une carte au 1:25'000, on mesure une distance de 8 cm. Combien de km cela fait-il dans la réalité?

1:25'000 signifie que 1 cm sur la carte correspond à 25'000 cm dans la réalité.

On fait un tableau de règle de trois:

carte	réalité
1 cm	25'000 cm
8 cm	

carte	réalité
1 cm	25'000 cm
8 cm	$\frac{8 \cdot 25000}{1}$=**200'000 cm**

Ainsi, la distance dans la réalité est de 200'000 cm = 2000 m = **2 km**.

2ème exemple:

La distance entre deux villes est de 7,5 km. A combien de centimètres cela correspond-il sur une carte au 1:40'000?

1:40'000 signifie que 1 cm sur la carte correspond à 40'000 cm dans la réalité.

En outre, 7,5 km = 7500 m = 750'000 cm.

Le tableau de la règle de trois est:

carte	réalité
1 cm	40'000 cm
	750'000 cm

carte	réalité
1 cm	40'000 cm
$\frac{1 \cdot 750000}{40000}$=**18,75 cm**	750'000 cm

Ainsi, la distance sur la carte est de **18,75 cm**.

3ème exemple:

Vous disposez d'une carte dont l'échelle a été effacée. Vous mesurez sur la carte la distance entre deux villes: elle est de 6 cm. Vous savez que, dans la réalité, la distance entre ces deux villes est de 90 km. Comment retrouver l'échelle de la carte?

On a 90 km = 90'000 m = 9'000'000 cm.

Pour trouver l'échelle de la carte, autrement 1:?, on doit trouver à combien de cm dans la réalité correspond 1 cm sur la carte.

Le tableau de la règle de trois est donc:

carte	**réalité**
6 cm	9'000'000 cm
1 cm	

carte	**réalité**
6 cm	9'000'000 cm
1 cm	$\frac{1\cdot 9000000}{6}$=**1'500'000 cm**

Ainsi, on en conclut que l'échelle de la carte est **1:1'500'000**.

§ 7. Changes de monnaies

Un dernier exemple (mais il en existe encore bien d'autres) où la règle de trois est utile est le change de monnaies.

Par exemple, on sait que 160 francs suisses donnent 100 euros et on aimerait savoir combien d'euros on peut avoir avec 50 francs suisses.

On fait un tableau de la règle de trois:

fr. suisses	**euros**
160	100
50	

On calcule combien d'euros on peut avoir avec 1 franc suisse:

fr. suisses	**euros**
160	100
50	$\frac{50\cdot 100}{160}$=**31,25**

Ainsi, on peut avoir **31,25 euros** avec les 50 francs suisses.