Arithmétique

Nombres entiers relatifs et opérations

§ 1. Nombres entiers relatifs

Un **nombre entier relatif** est un nombre entier, qu'il soit positif ou négatif.

Tout nombre entier relatif (sauf zéro) s'écrit à l'aide du signe + ou du signe - et d'un nombre entier naturel appelé sa **valeur absolue**. En écriture simplifiée, on ne note pas le signe + des nombres positifs.

Deux nombres sont **opposés** si leur somme est égal à zéro.

Par exemple: $+6$ et -6 sont deux nombres opposés, puisque leur somme vaut zéro.

Deux nombres opposés ont la même valeur absolue (c'est-à-dire qu'ils ont la même valeur si on ne tient pas compte de leurs signes) et sont de signes différents.

L'opposé d'un nombre x est noté $-x$.

Ainsi, l'ensemble des nombres entiers relatifs est composé des nombres entiers naturels et de leurs opposés.

§ 2. Représentation des nombres entiers relatifs sur un axe gradué

La **représentation des nombres entiers relatifs sur un axe gradué** correspond à ce que nous donne un thermomètre. Le zéro est environ à la moitié du thermomètre, les températures positives (les nombres positifs) sont au-dessus et les températures négatives (les nombres négatifs) sont au-dessous.

Savoir représenter des nombres entiers relatifs sur un axe gradué (donc un thermomètre), ainsi que savoir déterminer la valeur d'une graduation sur ce genre d'axe, est très utile lors d'opérations sur ces nombres.

§ 3. Comparaison de nombres entiers relatifs

Comparer deux nombres entiers relatifs (par exemple -10 et -7) revient à déterminer celui qui correspond, par exemple, à la température la plus froide (ainsi -10 est plus froid que -7). Le nombre correspondant à la température la plus froide est le plus petit nombre et celui correspondant à la température la plus chaude est le plus grand (on a donc -10 < -7).

§ 4. Addition de nombres entiers relatifs

Il existe plusieurs méthodes pour **additionner des nombres entiers relatifs**. En voici deux:

1ère méthode:

Pour additionner des nombres de même signe:

- on additionne leurs valeurs absolues;

- on garde leur signe.

Exemples: (+5) + (+7) = (+12) et (-3) + (-15) = (-18).

Pour additionner des nombres de signes différents:

- on soustrait la plus petite valeur absolue de la plus grande;

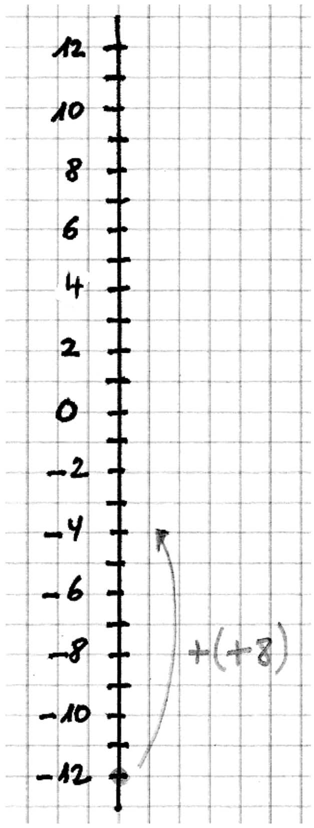
- on place devant le résultat le signe du nombre qui a la plus grande valeur absolue.

Exemples: (+6) + (-9) = (-3) et (-5) + (+7) = (+2).

2ème méthode:

Une autre méthode pour l'addition de nombres entiers relatifs est l'utilisation de thermomètres.

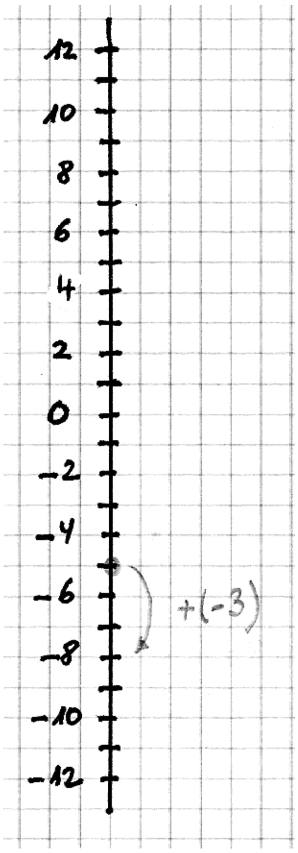
Si, par exemple, on veut effectuer le calcul (-12)+(+8), on commence par représenter le nombre (-12) sur le thermomètre, puis on effectuera l'opération +(+8) qui correspond à monter de 8 "degrés", puisque le "+" est vers le haut:



On arrive alors à une “température” de (-4).

Ainsi, on trouve que (-12)+(+8) = (-4).

Si on veut effectuer le calcul (-5)+(-3), on commence par représenter le nombre (-5) sur le thermomètre, puis on effectuera l'opération +(-3) qui correspond à descendre de 3 "degrés", puisque le "-" est vers le bas:



On arrive alors à une “température de (-8).

Ainsi, on trouve que (-5)+(-3) = (-8).

§ 5. Soustraction de nombres entiers relatifs

Pour **soustraire un nombre entier relatif**, on additionne son opposé.

Comme soustraire un nombre, c'est additionner son opposé, on peut toujours transformer une soustraction en addition.

Par exemple, on a: (-7)-(+2) = (-7)+(-2) = (-9) et (+3)-(-4) = (+3)+(+4) = (+7) (en utilisant une des techniques décrites dans "Addition de nombres entiers relatifs" ci-dessus).

§ 6. Ecriture simplifiée d'une somme

Toute suite d'additions et de soustractions de nombres entiers relatifs peut être écrite plus simplement.

La somme (-5) + (-9) + (+3) peut s'écrire plus simplement -5 - 9 + 3.

La somme (+4) +(-12) + (-6) + (-10) peut s'écrire plus simplement 4 - 12 - 6 - 10.

Par exemple, on peut écrire:

(-4)+(+2)-(+4)+(-5)-(-6) = (-4)+(+2)+(-4)+(-5)+(+6)	(en utilisant le fait que soustraire un nombre revient à additionner son opposé)
= - 4 + 2 - 4 - 5 + 6	(en utilisant les règles des signes ci-dessous)
= - 5.	

Les **règles des signes pour l'addition et la soustraction** que l'on utilise sont:

+(+ un nombre) = + ce nombre;

+(- un nombre) = - ce nombre;

-(+ un nombre) = - ce nombre;

-(- un nombre) = + ce nombre.

On peut schématiser ces règles de la manière suivante::

les amis (+) de mes amis (+) sont mes amis (+);

les amis (+) de mes ennemis (-) sont mes ennemis (-);

les ennemis (-) de mes amis (-) sont mes ennemis (-);

les ennemis (-) de mes ennemis (-) sont mes amis (+).

§ 7. Multiplication de nombres entiers relatifs

Voici comment **multiplier deux nombres entiers relatifs**.

Le produit de deux nombres de même signe est positif. On fait donc suivre le signe + du produit des valeurs absolues des facteurs.

Le produit de deux nombres de signes différents est négatif. On fait donc suivre le signe - du produit des valeurs absolues des facteurs.

Par exemple: $(+2)\cdot(+6) = (+12)$, $(-2)\cdot(+6)=(-12)$.

On a alors aussi des **règles des signes pour la multiplication**:

$(+a)\cdot(+b)=+(a\cdot b)$; par exemple: $(+3)\cdot(+4)=+3\cdot 4=+12=12$;

$(+a)\cdot(-b)=-(a\cdot b)$; par exemple: $(+3)\cdot(-4)=-3\cdot 4=-12$;

$(-a)\cdot(+b)=-(a\cdot b)$; par exemple: $(-3)\cdot(+4)=-3\cdot 4=-12$;

$(-a)\cdot(-b)=+(a\cdot b)$; par exemple: $(-3)\cdot(-4)=+3\cdot 4=+12=12$.

En fait, on peut les schématiser de la même manière que pour l'addition et la soustraction:

les amis (+) de mes amis (+) sont mes amis (+);

les amis (+) de mes ennemis (-) sont mes ennemis (-);

les ennemis (-) de mes amis (-) sont mes ennemis (-);

les ennemis (-) de mes ennemis (-) sont mes amis (+).

§ 8. Division de nombres entiers relatifs

Voici comment diviser **deux nombres entiers relatifs**.

Le quotient de deux nombres de même signe est positif. On fait donc suivre le signe + du quotient des valeurs absolues des nombres à diviser.

Le quotient de deux nombres de signes différents est négatif. On fait donc suivre le signe - du quotient des valeurs absolues des nombres à diviser.

Par exemple: $(+12):(+6) = (+2)$, $(-12):(+6)=(-2)$.

On a ainsi aussi des **règles des signes pour la division**:

$(+a):(+b)=+(a:b)$ par exemple: $(+3):(+4)=+3:4=+0,75=0,75$;

$(+a):(-b)=-(a:b)$ par exemple: $(+3):(-4)=-3:4=-0,75$;

$(-a):(+b)=-(a:b)$ par exemple: $(-3):(+4)=-3:4=-0,75$;

$(-a):(-b)=+(a:b)$ par exemple: $(-3):(-4)=+3:4=+0,75=0,75$.

On peut également les schématiser de la même manière que pour l'addition et la soustraction:

les amis (+) de mes amis (+) sont mes amis (+);

les amis (+) de mes ennemis (-) sont mes ennemis (-);

les ennemis (-) de mes amis (-) sont mes ennemis (-);

les ennemis (-) de mes ennemis (-) sont mes amis (+).

§ 9. Puissance de nombres entiers relatifs

Pour calculer une **puissance de nombres entiers relatifs** (par exemple $(-4)^3$), on la décompose en multiplications et on calcule le résultat en utilisant les règles des signes: $(-4)^3=(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)=[(-4)\cdot(-4)]\cdot(-4)=(+16)\cdot(-4)=-64$.