Arithmétique

Racines

§ 1. Définition

La **racine carrée** d'un nombre x est le nombre positif dont le carré est égal à x. On la désigne par $\sqrt{x}$.

La **racine cubique** d'un nombre x est le nombre dont le cube est égal à x. On la désigne par $\sqrt[3]{x}$.

La **racine quatrième** d'un nombre x est le nombre positif dont la puissance quatrième est égal à x. On la désigne par $\sqrt[4]{x}$.

La **racine cinquième** d'un nombre x est le nombre dont la puissance cinquième est égal à x. On la désigne par $\sqrt[5]{x}$.

La **racine n-ième** d'un nombre x est le nombres positif dont la puissance n-ième est égal à x. On la désigne par $\sqrt[n]{x}$.

On remarque que les racines sont les fonctions inverses des puissances:

$$\sqrt{36} = 6, \text{ car } 6^2 = 36,$$

$$\sqrt{81} = 9, \text{ car } 9^2 = 81,$$

$$\sqrt{2,25} = 1,5, \text{ car } 1,5^2 = 2,25,$$

$$\sqrt[3]{64} = 4, \text{ car } 4^3 = 64,$$

$$\sqrt[3]{216} = 6, \text{ car } 6^3 = 216,$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3, \text{ car } (-3)^3 = -27,$$

$$\sqrt[5]{-32} = 2, \text{ car } (-2)^5 = -32,$$

$$\sqrt[6]{64} = 2, \text{ car } 2^6 = 64.$$

On ne peut pas toujours calculer de tête les racines. Il faut parfois utiliser la calculatrice.

Exemple: $\sqrt{10}$ ne peut pas se trouver facilement; en utilisant la calculatrice, on trouve: $\sqrt{10} = 3,16227766$ (on presse les touches [1][0][$\sqrt{}$]).

§ 2. Propriétés des racines

Les racines ont les propriétés suivantes:

Produit de racines: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, où $a \geq 0$ et $b \geq 0$;

Quotient de racines: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, où $a \geq 0$ et $b > 0$.

Ces propriétés sont utiles pour trouver sans calculatrice certaines racines:

$$\sqrt{4900} = \sqrt{49 \cdot 100} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{100} = 7 \cdot 10 = 70,$$

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6,$$

$$\sqrt[3]{27000} = \sqrt[3]{27 \cdot 1000} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{1000} = 3 \cdot 10 = 30,$$

$$\sqrt{0,64} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{100}} = \frac{8}{10} = 0,8,$$

$$\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = \sqrt{4} = 2.$$

§ 3. Simplification de racines

Parfois, lorsque le résultat d'un calcul est une racine, on ne cherche pas à la calculer, mais à la simplifier, à faire en sorte que le nombre sous la racine soit le plus petit possible. On utilise alors une méthode qui s'appelle la **simplification de racines**. Elle utilise les propriétés des racines ci-dessus.

Elle est illustrée par deux exemples:

- on a abouti à $\sqrt{480}$; on peut faire en sorte que le nombre sous la racine soit inférieur à 480: on a:

$$\sqrt{480} = \sqrt{4 \cdot 120} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{120} = 2 \cdot \sqrt{120} = 2 \cdot \sqrt{4 \cdot 30} =$$
$$= 2 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{30} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{30} = 4 \cdot \sqrt{30};$$

on donnera donc comme réponse $4 \cdot \sqrt{30}$, plutôt que $\sqrt{480}$.

- on a abouti à $\sqrt{4410}$; on peut faire en sorte que le nombre sous la racine soit inférieur à 4410: on a:

$$\sqrt{4410} = \sqrt{9 \cdot 490} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{490} = 3 \cdot \sqrt{490} = 3 \cdot \sqrt{49 \cdot 10} =$$
$$= 3 \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{10} = 3 \cdot 7 \cdot \sqrt{10} = 21 \cdot \sqrt{10}\,;$$

on donnera donc comme réponse $21 \cdot \sqrt{10}$ plutôt que $\sqrt{4410}$.

§ 4. Racines de nombres négatifs

Il est toujours possible de calculer une racine (carrée, cubique, quatrième, etc.) d'un nombre positif (avec ou sans machine à calculer).

Il n'est cependant pas toujours possible de calculer certaines racines d'un nombre négatif. Par exemple, $\sqrt{-4}$ n'existe pas car il n'existe aucun nombre, qui, mis à la puissance deux, donne un nombre négatif.

Par contre, $\sqrt[3]{-8}$ existe et vaut -2, car $(-2)^3 = -8$.