

Arithmétique

Multiples, diviseurs, décompositions en produits de facteurs premiers et utilisations

§ 1. Multiples

Multiples

Par définition, si a et b sont deux nombres entiers naturels non nuls, alors a est un **multiple** de b s'il existe un nombre entier naturel c tel que $a = b \cdot c$.

Exemples: 32 est un multiple de 8, car $32 = 4 \cdot 8$;

27 n'est pas un multiple de 10 car il n'existe aucun nombre entier n tel que $27 = n \cdot 10$.

Les multiples de 4 sont: 4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; ...

Les multiples d'un nombre sont donc le livret associé à ce nombre.

Il existe toujours une infinité de multiples d'un nombre.

Multiples communs et ppmc

Un **multiple commun** de deux ou plusieurs nombres entiers naturels est un nombre entier naturel qui est multiple de chacun d'eux.

Exemple: 72 est un multiple commun de 3, 9 et 12, car 72 est un multiple de 3, un multiple de 9 et un multiple de 12.

Le **plus petit multiple commun** de plusieurs nombres est appelé le **ppmc** de ces nombres.

Exemple: 36 est le ppmc de 3, 9 et 12, car 36 est le plus petit multiple commun de 3, 9 et 12.

Pour trouver tous les multiples communs de plusieurs nombres, il faut écrire la liste des multiples de chacun de ces nombres suffisamment longtemps pour qu'un même nombre apparaisse dans la liste de chacun. Le plus petit de ces nombres apparaissant dans chacune de ces listes est le plus petit multiple commun (ppmc). Les autres multiples communs sont alors les multiples de ce ppmc.

Exemple: les multiples de 4 sont 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, ... et les multiples de 7 sont 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, ...; ainsi les multiples communs de 4 et 7 sont 28, 56, 84, 112, 140, ... et le ppmc de 4 et 7 est 28.

Recherche d'un multiple commun

Si l'on doit rechercher un quelconque multiple commun de plusieurs nombres, il suffit de multiplier ces nombres pour obtenir le résultat cherché. Ce n'est peut-être pas le plus petit multiple commun, mais c'est un multiple commun.

§ 2. Diviseurs

Diviseurs

Par définition, si a et b sont deux nombres entiers naturels non nuls, alors b est un **diviseur** de a s'il existe un nombre entier naturel c tel que $a = b \cdot c$.

Exemples: 7 est un diviseur de 21, car $21 = 7 \cdot 3$

5 n'est pas un diviseur de 23 car il n'existe aucun nombre naturel n tel que $23 = 5 \cdot n$.

Les diviseurs de 24 sont: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24.

Les diviseurs d'un nombre sont toujours en nombre fini.

Pour trouver les diviseurs d'un nombre, on utilise ce que l'on appelle les critères de divisibilité, car il est plus simple de pouvoir déterminer si un nombre se divise par un autre sans avoir besoin de faire la division, plutôt que de faire une division complète.

Critères de divisibilité

Un nombre entier naturel se divise par:

- 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8; on dit alors qu'il est pair (par exemple, 436 se divise par 2 car 436 se termine par 6);

- 3** si la somme de ses chiffres se divise par 3 (par exemple, 435 se divise par 3 car $4+3+5 = 12$ se divise par 3);
- 4** si la nombre formé par ses deux derniers chiffres se divise par 4, notamment s'il se termine par 00 (par exemple, 436 se divise par 4 car 36 se divise par 4);
- 5** s'il se termine par 0 ou 5 (par exemple 435 se divise par 5 car il se termine par 5);
- 6** s'il se divise par 2 et par 3 (par exemple, 438 se divise par 6, puisque, se terminant par 8, il se divise par 2, et qu'il se divise par 3 puisque $4+3+8 = 15$ se divise par 3);
- 9** si la somme de ses chiffres se divise par 9 (par exemple 432 se divise par 9, puisque $4+3+2 = 9$ se divise par 9);
- 10** s'il se termine par 0;
- 25** s'il se termine par 00, 25, 50 ou 75;
- 50** s'il se termine par 00 ou 50;
- 100** s'il se termine par 00.

Il existe encore d'autres critères de divisibilité pour d'autres nombres, mais ils sont plus compliqués et même parfois plus difficiles à appliquer que de faire simplement la division elle-même, surtout si les nombres de sont pas trop grands.

Trouver les diviseurs d'un nombre

Pour **trouver les diviseurs d'un nombre** (par exemple 72), on procède comme suit:

72 se divise par 1 et cela donne 72;

72 se divise par 2 et cela donne 36;

72 se divise par 3 et cela donne 24;

72 se divise par 4 et cela donne 18;

72 se divise par 6 et cela donne 12;

72 se divise par 8 et cela donne 9;

on écrit alors successivement:

$$D_{72} = \{1; \dots\dots\dots; 72\};$$

$$D_{72} = \{1; 2; \dots\dots\dots; 36; 72\};$$

$$D_{72} = \{1; 2; 3; \dots\dots\dots; 24; 36; 72\};$$

$$D_{72} = \{1; 2; 3; 4; \dots\dots\dots; 18; 24; 36; 72\};$$

$$D_{72} = \{1; 2; 3; 4; 6; \dots\dots; 12; 18; 24; 36; 72\};$$

$$D_{72} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36; 72\}.$$

On ne va évidemment pas écrire toutes les lignes ci-dessus, mais uniquement la dernière, mais en faisant toutes les étapes mentionnées:

$$D_{72} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36; 72\}.$$

Diviseurs communs et pgdc

Un **diviseur commun** de deux ou plusieurs nombres entiers naturels est un nombre entier naturel qui est diviseur de chacun d'eux.

Exemple: 2 est un diviseur commun de 16, 24 et 40, car 2 est un diviseur de 16, un diviseur de 24 et un diviseur de 40.

Le **plus grand diviseur commun** de plusieurs nombres est appelé le **pgdc** de ces nombres.

Exemple: 8 est le pgdc de 16, 24 et 40, car 8 est le plus grand diviseur commun de 16, 24 et 40.

Pour trouver tous les diviseurs communs de plusieurs nombres, il faut écrire la liste des diviseurs de chacun de ces nombres. Un ou plusieurs nombres apparaissent dans chacun de ces listes. Le plus grand de ces nombres apparaissant dans chacune de ces listes est le plus grand diviseur commun (pgdc). Les autres diviseurs communs sont alors les diviseurs de ce pgdc.

Relation entre le ppmc et le pgdc

Lorsqu'on multiplie le ppmc et le pgdc de deux nombres, on trouve le produit de ces deux nombres.

Exemple: le ppmc de 8 et 10 est 40; leur pgdc est 2; le produit du ppmc et du pgdc est 80, qui est égal au produit de 8 et 10.

On peut donc écrire: $ppmc(a; b) \cdot pgdc(a; b) = a \cdot b$.

§ 3. Décompositions en produits de facteurs premiers et utilisations

Nombres premiers

Un **nombre premier** est un nombre entier naturel qui a exactement deux diviseurs: 1 et lui-même.

Par exemple, 7, 13 et 19 sont des nombres premiers, alors que 35 et 42 ne sont pas des nombres premiers.

Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 2000:

2	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251
257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317
331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397
401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557
563	569	571	577	587	593
599	601	607	613	617	619
631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701
709	719	727	733	739	743
751	757	761	769	773	787
797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911
919	929	937	941	947	953
967	971	977	983	991	997
1009	1013	1019	1021	1031	1033
1039	1049	1051	1061	1063	1069
1087	1091	1093	1097	1103	1109
1117	1123	1129	1151	1153	1163
1171	1181	1187	1193	1201	1213
1217	1223	1229	1231	1237	1249
1259	1277	1279	1283	1289	1291
1297	1301	1303	1307	1319	1321
1327	1361	1367	1373	1381	1399
1409	1423	1427	1429	1433	1439
1447	1451	1453	1459	1471	1481
1483	1487	1489	1493	1499	1511
1523	1531	1543	1549	1553	1559
1567	1571	1579	1583	1597	1601
1607	1609	1613	1619	1621	1627
1637	1657	1663	1667	1669	1693
1697	1699	1709	1721	1723	1733
1741	1747	1753	1759	1777	1783
1787	1789	1801	1811	1823	1831
1847	1861	1867	1871	1873	1877
1879	1889	1901	1907	1913	1931
1933	1949	1951	1973	1979	1987
1993	1997	1999			

Nombres premiers entre eux

Des **nombres premiers entre eux** sont des nombres entiers naturels dont le seul diviseur commun est 1 (autrement le pgcd de ces nombres est 1).

Par exemple, 9 et 16 sont premiers entre eux, de même que 7 et 15. 12 et 8 ne sont pas premiers entre eux (puisque leur pgcd vaut 4).

Décomposition d'un nombre en produits de facteurs premiers

Tout nombre entier naturel peut se décomposer de manière unique en un produit de facteurs premiers. Cette décomposition s'appelle la **décomposition en produit de facteurs premiers** du nombre en question.

Exemples: on a $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$; ainsi $2^3 \cdot 3$ est la décomposition en produit de facteurs premiers de 24; on a $126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$; ainsi $2 \cdot 3^2 \cdot 7$ est la décomposition en produit de facteurs premiers de 126.

Pour décomposer un nombre en un produit de facteurs premiers, on peut par exemple procéder comme suit:

495 |

on va écrire dans cette colonne un nombre premier qui divisera le nombre correspondant de la colonne de gauche

on obtient ainsi:

495 | 3 car 495 se divise par 3 puisque $4+9+5$ se divise par 3

on mettra ici le résultat de la division du nombre au-dessus de gauche par le nombre au-dessus de droite ($495:3 = 165$)

puis:

495	3	
165	3	ca 165 se divise par 3
55	5	ca 55 se divise par 5
11	11	ca 11 se divise par 11
1		

il faut continuer jusqu'à obtenir "1" dans cette colonne

on remarque qu'il n'y a que des nombres premiers dans cette colonne.

Ainsi, on a obtenu la décomposition en produit de facteurs premiers de 495:

$$495 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11.$$

Autres exemples:

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

729	3
243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$$729 = 3^6$$

1485	3
495	3
165	3
55	5
11	11
1	

$$1485 = 3^3 \cdot 5 \cdot 11$$

378	2
189	3
63	3
21	3
7	7
1	

$$378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$$

1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

$$1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Utilisation des décompositions dans le calcul de ppmc

1ère technique:

Pour trouver le ppmc de deux nombres (par exemple 150 et 1485), on peut procéder comme suit:

- on les décompose en produits de facteurs premiers (voir ci-dessus):

$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$1485 = 3^3 \cdot 5 \cdot 11$$

- on écrit ces décompositions l'un sous l'autre en faisant apparaître tous les facteurs et tous les exposants qui figurent dans les deux décompositions (en mettant des puissances

zéro lorsque c'est nécessaire; on rappelle que n'importe quel nombre à la puissance zéro vaut 1; rajouter une multiplication par un nombre à la puissance zéro, donc par 1, ne change rien au produit):

$$150 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 11^0$$

$$1485 = 2^0 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 11^1$$

- le ppmc des deux nombres est alors le produit de chacun de ces facteurs avec la plus grande puissance apparaissant dans les décompositions:

$$\text{ppmc}(150; 1485) = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11 = 14'850.$$

2ème technique:

On peut aussi procéder de la manière suivante:

- on écrit côte à côte les décompositions des nombres en produits de facteurs premiers:

150	2		1485	3
75	3		495	3
25	5		165	3
5	5		55	5
1			11	11
			1	

- on entoure les paires de nombres premiers qui apparaissent dans les deux décompositions (un dans chaque décomposition):

150	2		1485	③
75	③		495	3
25	5		165	3
5	⑤		55	⑤
1			11	11
			1	

- dans chaque paire ainsi entourée, on trace un des deux nombres:

$$\begin{array}{r|l}
 150 & 2 \\
 75 & \textcircled{3} \\
 25 & 5 \\
 5 & \textcircled{5} \\
 1 &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 1485 & \textcircled{\cancel{2}} \\
 495 & 3 \\
 165 & 3 \\
 55 & \textcircled{\cancel{5}} \\
 11 & 11 \\
 1 &
 \end{array}$$

- le ppmc des deux nombres est alors le produit de tous les nombres premiers non tracés dans les deux décompositions:

$$\begin{aligned}
 \text{ppmc}(150; 1485) &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 11) = 150 \cdot 9 \cdot 11 = \\
 &= 14'850
 \end{aligned}$$

Utilisation des décompositions dans le calcul de pgdc

1ère technique:

Pour trouver le pgdc de deux nombres (par exemple 378 et 1260), on peut procéder comme suit:

- on les décompose en produits de facteurs premiers (voir ci-dessus):

$$378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$$

$$1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

- on écrit ces décompositions en faisant apparaître tous les facteurs et tous les exposants qui figurent dans les deux décompositions (en mettant des puissances zéro lorsque c'est nécessaire comme pour le calcul du ppmc):

$$378 = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^1$$

$$1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1$$

- le pgdc des deux nombres est alors le produit de chacun de ces facteurs avec la plus petite puissance apparaissant dans les décompositions:

$$\text{pgdc}(378; 1260) = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1 = 126.$$

2ème technique:

On peut aussi procéder de la manière suivante:

- on écrit côte à côte les décompositions des nombres en produits de facteurs premiers:

378		2
189		3
63		3
21		3
7		7
1		

1260		2
630		2
315		3
105		3
35		5
7		7
1		

- on entoure les paires de nombres premiers qui apparaissent dans les deux décompositions (un dans chaque décomposition):

378		②
189		③
63		③
21		3
7		⑦
1		

1260		②
630		2
315		③
105		③
35		5
7		⑦
1		

- dans chaque paire ainsi entourée, on trace un des deux nombres:

378		②
189		③
63		③
21		3
7		⑦
1		

1260		②
630		2
315		③
105		③
35		5
7		⑦
1		

- le pgcd des deux nombres est alors le produit de tous les nombres premiers entourés non tracés dans les deux décompositions:

$$\text{pgcd}(378; 1560) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 126$$

Remarques:

Dans les 2èmes techniques décrites ci-dessous pour le calcul du ppmc et du pgdc, la différence dans les procédures se situent dans les nombres à multiplier à la fin:

- pour le ppmc, on multiplie tous les nombres premiers non tracés;
- pour le pgdc, on multiplie tous les nombres premiers entourés non tracés.

De plus, si, dans le calcul du pgdc, il n'y a aucun nombre premier entouré non tracé, alors cela signifie que le pgdc des nombres en question vaut 1.

Utilisation des décompositions dans la simplification de fractions

Lorsqu'on doit simplifier une fraction (par exemple $\frac{72}{45}$), on peut utiliser les décompositions en produits de facteurs premiers:

- on cherche les décompositions de 72 et 45: $72 = 2^3 \cdot 3^2$ et $45 = 3^2 \cdot 5$;
- on a alors $\frac{72}{45} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{3^2 \cdot 5} = \frac{2^3}{5} = \frac{8}{5}$ par simplification par 3^2 .

Utilisation des décompositions dans le calcul avec des fractions

Lorsqu'on doit faire des calculs avec des fractions, il est parfois utile d'utiliser les décompositions en produits de facteurs premiers:

- on doit calculer $\frac{72}{49} \cdot \frac{56}{81}$;
- les décompositions des nombres concernés sont: $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $56 = 2^3 \cdot 7$, $49 = 7^2$ et $81 = 3^4$;
- on a alors $\frac{72}{49} \cdot \frac{56}{81} = \frac{72 \cdot 56}{49 \cdot 81} = \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7}{7^2 \cdot 3^4} = \frac{2^6 \cdot 3^2 \cdot 7}{3^4 \cdot 7^2} = \frac{2^6}{3^2 \cdot 7} = \frac{64}{63}$.

Utilisation des décompositions dans l'extraction ou la simplification de racines

Lorsqu'on cherche à trouver le résultat exacte de la racine carrée d'un nombre ou à simplifier la racine d'un nombre, on peut procéder comme suit:

1er exemple: calculer $\sqrt{729}$:

- on décompose le nombre en produits de facteurs premiers:

$$\begin{array}{r|l} 729 & 3 \\ 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

- dans les nombres premiers de la colonne de droite, on forme toutes les paires possibles de nombres premiers identiques (ils peuvent être différents d'une paire à l'autre):

729	3
243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

- pour chaque paire de nombres premiers, on en retient un et le produit de ces nombres retenus est la racine cherchée:

$$\sqrt{729} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27.$$

729	3	→ 3
243	3	
81	3	→ 3
27	3	
9	3	→ 3
3	3	
1		

2ème exemple: simplifier $\sqrt{150}$:

- on décompose le nombre en produits de facteurs premiers:

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

- dans les nombres premiers de la colonne de droite, on forme toutes les paires possibles de nombres premiers identiques (ils peuvent être différents d'une paire à l'autre):

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

- pour chaque paire de nombres premiers, on en retient un qui viendra en facteur devant la racine; pour ceux qui ne sont pas dans des paires, ils restent en facteurs sous la racine:

$$\sqrt{150} = 5 \cdot \sqrt{2 \cdot 3} = 5 \cdot \sqrt{6} = 5\sqrt{6}.$$

150	2	
75	3	
25	5	→ 5
5	5	
1		

3ème exemple: simplifier $\sqrt[3]{378}$:

on procède comme dans le 2ème exemple, si ce n'est que, au lieu de former des paires de nombres premiers, on forme des triplets (trois nombres premiers identiques); le reste de la démarche est identique:

$$\begin{array}{r|l} 378 & 2 \\ 189 & 3 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 378 & 2 \\ 189 & 3 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 378 & 2 \\ 189 & 3 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

on obtient: $\sqrt[3]{378} = 3 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 7} = 3 \cdot \sqrt[3]{14} = 3\sqrt[3]{14}$.