Calcul algebrique

1.1 Ensembles de nombres

Lorsque l'on considère une collection d'objets similaires, mais distincts comme un tout, on utilise la notion d'ensemble. Par exemple, l'ensemble des chiffres est la collection des nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Si l'on utilise le symbole D pour dénoter l'ensemble des chiffres, on écrit alors :

« tel que »

$$D = \left\{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \right\} \quad = \quad \underbrace{\left\{ x \,\middle|\, x \text{ est un chiffre} \right\}}_{\text{se lit "ensemble des } x \text{ tels que } x \text{ est un chiffre"}}$$

Nombres naturels : $\mathbb{N} = \left\{ 0 \,;1 \,;2 \,;3 \,;4 \,;... \right\}$

Nombres entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \left\{ ... \,;-2 \,;-1 \,;0 \,;1 \,;2 \,;... \right\}$

Nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,;p \in \mathbb{Z} \,,\ q \in \mathbb{Z} \,,q \neq 0 \right\}$

Nombres réels : $\mathbb{R}$

Nombres complexes : $\mathbb{C} \quad (i^2 = -1)$

Chacun de ces ensembles est contenu dans le suivant :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Les éléments de ces ensembles suivent les règles suivantes :

- L'addition et la multiplication sont ***commutatives*** :

$$a + b = b + a \qquad\qquad a \cdot b = b \cdot a$$

- L'addition et la multiplication sont ***associatives***

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad\qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

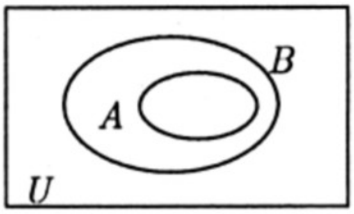
- La multiplication est ***distributive*** sur l'addition

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad\qquad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

> *Par convention, tout calcul est soumis aux règles de priorité suivantes :* ***Expressions entre parenthèses / multiplications et divisions / additions et soustractions***

1.1.1 *NOTATION ENSEMBLISTE*

1) Un ensemble A est ***inclus*** dans un ensemble B si tout élément de A appartient aussi à B. On dit que A est un ***sous-ensemble*** de B. On note $A \subset B$.

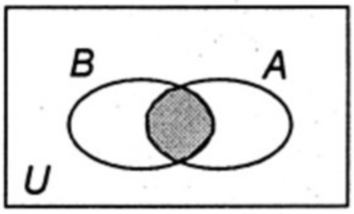


Exemples

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

$\left\{ a \,;\, e \,;\, i \,;\, o \,;\, u \right\} \subset \left\{ alphabet \right\}$

2) ***Intersection*** : $A \cap B = \left\{ x \middle| \, x \in A \textbf{ et } x \in B \right\}$

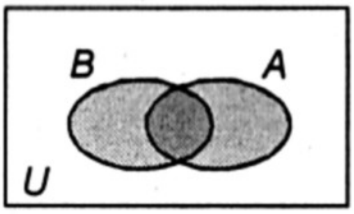


Exemples

$\left\{ 1 \,;\, 2 \,;\, 3 \right\} \cap \left\{ -2 \,;\, 0 \,;\, 1 \,;\, 3 \,;\, 5 \right\} = \left\{ 1 \,;\, 3 \right\}$

$\left\{ rouge \,;\, vert \,;\, bleu \right\} \cap \left\{ blanc \,;\, vert \right\} = \left\{ vert \right\}$

3) ***Réunion*** : $A \cup B = \left\{ x \middle| \, x \in A \textbf{ ou } x \in B \right\}$

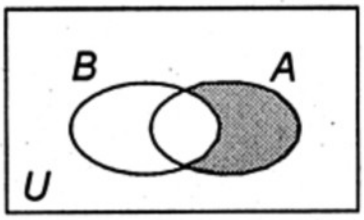


Exemples

$\left\{ 1 \,;\, 2 \,;\, 3 \right\} \cup \left\{ 0 \,;\, 1 \,;\, 3 \,;\, 5 \right\} = \left\{ 0 \,;\, 1 \,;\, 2 \,;\, 3 \,;\, 5 \right\}$

$\left\{ rouge \,;\, vert \right\} \cup \left\{ blanc \,;\, vert \,;\, jaune \right\}$
$= \left\{ rouge \,;\, blanc \,;\, vert \,;\, jaune \right\}$

4) ***Différence*** : $A \setminus B = \left\{ x \middle| x \in A \textbf{ et } x \notin B \right\}$

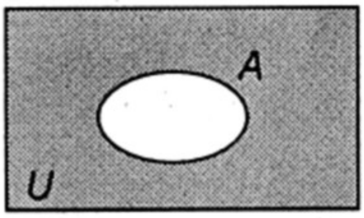


Exemples

$$\left\{ 0 ; 1 ; 3 ; 5 \right\} \setminus \left\{ 1 ; 2 ; 3 \right\} = \left\{ 0 ; 5 \right\}$$

$$\left\{ rouge ; vert ; bleu \right\} \setminus \left\{ blanc ; vert ; jaune \right\}$$
$$= \left\{ rouge ; bleu \right\}$$

5) ***Complémentaire*** : $\overline{A} = C_U^A = U \setminus A$



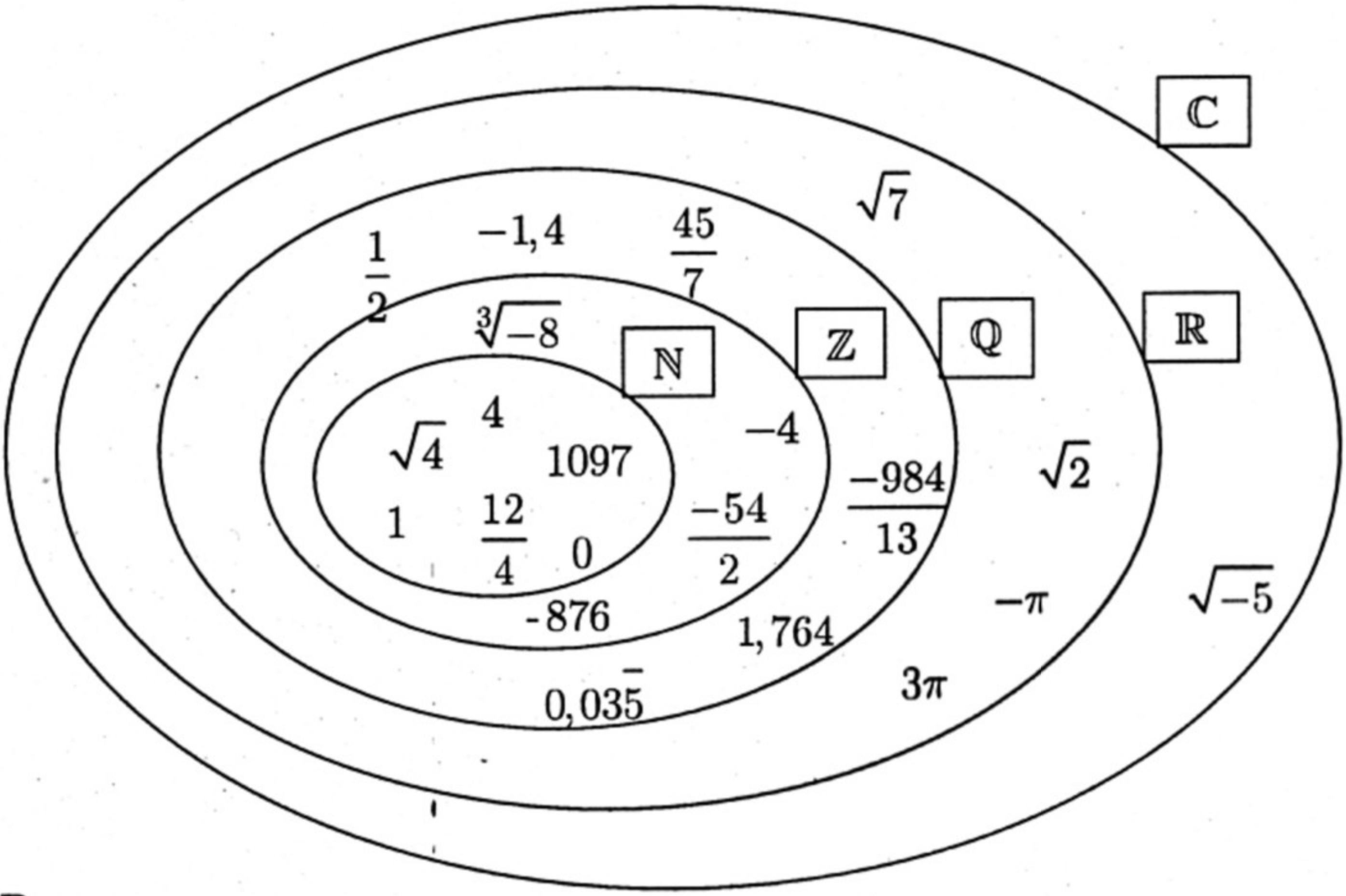
Exemples

$U = \left\{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \right\}$ $\qquad A = \left\{ 1 ; 2 ; 3 \right\}$

$\overline{A} = \left\{ 0 ; 4 ; 5 ; 6 \right\}$

Nombres irrationnels : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

1.1.2 Diagramme de Venn



Remarques

- Le symbole ∞ signifie infini.
- Les $\{...\}$signifient ensemble.
- La barre $\mid$ signifie tel que (t.q.)
- Les symboles $\in, \notin$ sont utilisés pour dire si un élément appartient (n'appartient pas) à un ensemble.
- ***L'ensemble vide*** se note $\varnothing$ ou $\{\ \}$.
- Un ensemble de nombres avec une « * » est un ensemble sans le 0. Donc, $\mathbb{N}^* = \{\ 1\ ;2\ ;3\ ;4\ ;...\ \}$,
  $\mathbb{Z}^* = \{\ ...\ ; -2\ ; -1\ \ ;1\ ;2\ ;...\ \}$,
- Généralement, lorsque l'on choisit deux ensembles A et B, ce sont des ensembles constitués de certains éléments d'un ensemble U que l'on appelle souvent ***univers.***

Contrôlons encore les affirmations suivantes.

1. Vérifions que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, c'est-à-dire que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

   Preuve. Supposons que

   $\sqrt{2}\ \in \mathbb{Q}$ on a alors $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, fraction irréductible

   $\Rightarrow \quad 2 = \dfrac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$ donc p^2est un nombre pair et donc p est aussi pair $(p = 2k)$

   $\Rightarrow \quad p^2 = 4k^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$ donc q^2 est un nombre pair et donc q est aussi pair

   Donc la fonction n'est pas irréductible, la supposition initiale est fausse et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ☺

2. Montrons que $0,03\bar{5} = 0.035555555.... \in \mathbb{Q}$

Preuve. Nous allons écrire $0,03\bar{5}$ sous forme de fraction.

$$\begin{array}{rl} 0.03\bar{5}\cdot 1000 &= 35.\bar{5} \\ -\quad 0.03\bar{5}\cdot 100 &= 3.\bar{5} \\ \hline 0.03\bar{5}\cdot 990 &= 32 \Rightarrow 0.03\bar{5} = \dfrac{32}{990} = \dfrac{16}{495} \in \mathbb{Q} \end{array}$$

☺

1.1.3 DEFINITIONS

- Un nombre naturel p est un ***nombre premier*** si $p \neq 1$ et si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et lui même.
- ***nombre pairs*** dans $\mathbb{N} = \left\{2n \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$
- ***nombre impairs*** dans $\mathbb{N} = \left\{2n+1 \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$
- Un ***intervalle*** est un ensemble de nombres qui contient tous les nombres réels et qui est délimité par deux nombres réels, a et b, appelés ***bornes*** de l'intervalle. Si a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, on note :

$$\left[\, a \,;\, b \,\right] = \left\{ x \middle| x \in \mathbb{R} \text{ et } a \leq x \leq b \right\}$$ ***intervalle fermé***

$$\left]\, a \,;\, b \,\right[= \left\{ x \middle| x \in \mathbb{R} \text{ et } a < x < b \right\}$$ ***intervalle ouvert***

$$\left[\, a \,;\, b \,\right[= \left\{ x \middle| x \in \mathbb{R} \text{ et } a \leq x < b \right\}$$

$$\left[\, a \,;\, +\infty \,\right[= \left\{ x \middle| x \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq a \right\}$$

$$\left]\, a \,;\, b \,\right] = \left\{ x \middle| x \in \mathbb{R} \text{ et } a < x \leq b \right\}$$

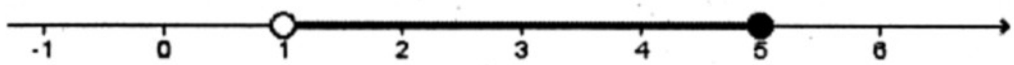
$$\left]\, -\infty \,;\, b \,\right] = \left\{ x \middle| x \in \mathbb{R} \text{ et } x \leq b \right\}$$

Exemple $\left]\, 1 \,;\, 5 \,\right] = \left\{ x \middle| x \in \mathbb{R} \text{ et } 1 < x \leq 5 \right\}$

Il est également possible de représenter un intervalle sur l'axe réel. Pour cela, on place les deux bornes de l'intervalle sur l'axe réel. On utilise un cercle plein si la borne appartient à l'intervalle et un cercle vide si la borne n'appartient pas à l'intervalle. Finalement on épaissit la partie de l'axe réel représentant l'intervalle en question.

<u>Exemple</u>

Représenter, sur l'axe réel, l'intervalle $\left]1\ ;\ 5\right]$.



1.2 QUELQUES RAPPELS

1.2.1 <u>CALCULS AVEC LES FRACTIONS</u>

- Pour ***additionner (ou soustraire)*** deux fractions, il faut avant tout trouver deux fractions équivalentes qui ont le même dénominateur ; on peut ensuite additionner (ou soustraire) les numérateurs

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

- Pour ***multiplier deux fractions***, on multiplie entre eux numérateurs et dénominateurs. ***Pour diviser par une fraction*** $\frac{c}{d}$ ***non nulle,*** il suffit de multiplier par son inverse $\frac{d}{c}$.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

1.2.2 IDENTITES REMARQUABLES

Les identités dites « remarquables » proviennent simplement du fait que la multiplication se distribue sur l'addition. Lorsque l'on multiplie deux sommes, chaque terme de l'une doit multiplier chaque terme de l'autre. A l'aide de $(p+q)(r+s) = pr + ps + qr + qs$, on obtient les résultats suivants :

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ***Exemple*** $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$
2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ***Exemple*** $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$
3) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ***Exemple*** $(x+5)(x-5) = x^2 - 25$

1.2.3 PUISSANCES ENTIERES ET RACINES.

Pour un nombre réel $a \in \mathbb{R}$ et un entier $n \geq 1$ on note $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n facteurs}}$

Ce nombre est appelé ***la puissance n-ième de a***, a est ***la base*** et n est ***l'exposant***. Pour tous les nombres entiers $m, n > 1$ et $a \in \mathbb{R}$ quelconque, on peut écrire

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n facteurs}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{m facteurs}} = a^{n+m}$$

Cette propriété est utilisée pour définir des puissances à exposants négatifs :

- Si a est non nul, $a^0 \cdot a = a^0 \cdot a^1 = a^{0+1} = a^1 \Rightarrow \boxed{a^0 = 1}$
- Si a est non nul, $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 \Rightarrow \boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

Pour tous les réels a a et b et tous les entiers m et n, on a les propriétés suivantes :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n} \qquad \left(ab\right)^n = a^n b^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ si a} \neq 0 \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\mathrm{n}} \text{ si } b \neq 0$$

Etant donné un nombre $a \geq 0$, on note $\sqrt{a}$ la solution positive de l'équation $x^2 = a$. On a les propriétés suivantes (pour tous les nombres $a,b \geq 0$) :

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Attention.

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

Etant donné un nombre a ≥ 0 et $n > 2$, on note

$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} \text{la solution de } x^n = a & \text{si } n \text{ est impair} \\ \text{la solution positive de } x^n = a & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

On a les propriétés suivantes (pour tous les nombres $a,b \geq 0$) :

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Attention.

$$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$$

- Si a est non nul, on a $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^1 = a \Rightarrow \boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$

1.2.4 *EXEMPLES*

Il est possible de combiner toutes ces règles :

a) $x \cdot \left(5xy\right)^3 \qquad = x \cdot 125x^3y^3 = 125x^4y^3$

b) $(5a^7r^2p)^3 \qquad = 125a^{21}r^6p^3$

c) $\dfrac{\left(3p^4q^{-2}\right)^2}{\sqrt{125}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{p^5} \qquad = \dfrac{9p^8q^{-4}}{5p^5} = \dfrac{9p^3}{5q^4}$

d) $\dfrac{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{\left(a+h\right)^2}}{h} \qquad = \dfrac{\dfrac{\left(a+h\right)^2 - a^2}{a^2\left(a+h\right)^2}}{h} = \dfrac{2a+h}{a^2\left(a+h\right)^2}$

e) $\sqrt{\left(\sqrt[3]{3x}\right)^{12}} \qquad = \sqrt{\left(\left(3x\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{12}} = \sqrt{\left(3x\right)^{\frac{12}{3}}}$

$$= \left(\left(3x\right)^{\frac{12}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(3x\right)^{\frac{12}{6}} = \left(3x\right)^2 = 9x^2$$

f) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \qquad = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{3}$

g) $\sqrt{8+\sqrt{15}} + \sqrt{8-\sqrt{15}} \qquad = ?$

$\left(\sqrt{8+\sqrt{15}} + \sqrt{8-\sqrt{15}}\right)^2 \qquad = 16 + 2\sqrt{8+\sqrt{15}} \cdot \sqrt{8-\sqrt{15}}$

$$= 16 + 2\sqrt{\left(8+\sqrt{15}\right) \cdot \left(8-\sqrt{15}\right)}$$

$$= 16 + 2\sqrt{64-15} = 16 + 2 \cdot 7 = 30$$

Donc comme $\sqrt{8+\sqrt{15}} + \sqrt{8-\sqrt{15}} > 0$, on a

$\sqrt{8+\sqrt{15}} + \sqrt{8-\sqrt{15}} \qquad = \sqrt{30}$

1.3 OPERATION SUR LES POLYNOMES

Un polynôme (réel) en une indéterminée x est une expression de la forme

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0$$

où les coefficients a_0; a_1;...; a_n sont des nombres réels et où n est un entier positif ou nul. Le nombre a_0 est appelé ***terme constant*** et le nombre a_n , rattaché à la plus grande puissance de x présente, est appelé ***coefficient dominant***.

L'ensemble de tous les polynômes réels en l'indéterminée x est noté $\mathbb{R}[x]$. Comme pour les nombres, il est possible d'additionner, de multiplier, de soustraire ou encore de diviser des polynômes.

1.3.1 RAPPELS

- $3x^2, -5x,\ 3,\ -45x^{12}, \sqrt{2}x,$ ... sont appelés ***monômes.***
- Dans le monôme ax^n on appelle a $(a \neq 0,\ a \in \mathbb{R})$ le ***coefficient***, x^n la ***partie littérale*** et n le ***degré.***
- Un ***polynôme*** est une somme de monômes.
- Dans le polynôme $ax^n + bx^{n-1} + ... + px + q$ on appelle a $(a \neq 0)$ le ***coefficient dominant***, n $(n \geq 0)$ le ***degré*** du polynôme et q le ***terme constant.***
- On peut ordonner un polynôme dans l'ordre croissant ou décroissant des degrés.

1.3.2 RACINES D'UN POLYNOME

On peut comparer le degré des polynômes calculés avec celui des polynômes initiaux :

$$\boxed{\deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q)} \qquad \boxed{\deg(P \pm Q) \leq \max\left\{\deg P; \deg Q\right\}}$$

Etant donné un polynôme $p(x)$ on peut attribuer à x n'importe quelle valeur $a \in \mathbb{R}$, obtenant ainsi un nombre noté $p(a)$

Exemple

$p(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 1 \qquad p(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 1 = 11$

On appelle ***racine (ou zéro)*** d'un polynôme $p(x)$ toute valeur a $\in \mathbb{R}$ qui vérifie $p(a) = 0$. Une première stratégie pour la recherche de racines est proposée par les résultats qui suivent :

> Si $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ est un polynôme à coefficients entiers, alors ***ses seules racines entières*** possibles sont les diviseurs de $p(0)$.

Preuve. On peut écrire $p(x) = p(0) + x \cdot q(x)$ où $q(x)$ est également un polynôme à coefficients entiers. Si $a \in \mathbb{Z}$ est tel que $p(a) = 0$, alors $p(0) = -a \cdot q(a)$ est un multiple entier de a ; en d'autres termes, a divise $p(0)$. Les racines entières de $p(x) \in \mathbb{Z}$ [x] se trouvent ainsi parmi les diviseurs de $p(0)$.¤

☺

Exemple : les racines entières plausibles de $P(x) = 5x^2 + 53x + 10$ se trouvent dans l'ensemble $\left\{\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10\right\}$.

Nous avons vu comment trouver les racines entières d'un polynôme à coefficients entiers. Nous pouvons affiner la recherche de racines avec le résultat suivant, dû à Gauss :

Les seules racines rationnelles (fractions) qui peuvent annuler un polynôme à coefficients entiers sont de la forme :

$$\frac{\text{diviseur du terme constant}}{\text{diviseur du coefficient dominant}}$$

Preuve. Soit $\frac{r}{s}$ une fraction irréductible qui annule le polynôme

$P(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + ... + p_1 x + p_0$. On a donc $P(\frac{r}{s}) = 0$,

c'est $-$ à $-$ dire :

$$P(\frac{r}{s}) = p_n\left(\frac{r}{s}\right)^n + p_{n-1}\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + ... + p_1\left(\frac{r}{s}\right) + p_0 = 0.$$

En multipliant par s^n , on obtient

$$p_n r^n + p_{n-1}r^{n-1}s + p_1 r s^{n-1} + p_0 s^n = 0.$$

Dans cette somme nulle de nombres entiers, il apparaît alors que r divise le terme $p_0 s^n$ puisqu'il divise clairement tous les autres. Comme r et s n'ont aucun facteur commun (puisque la fraction $\frac{r}{s}$ est supposée irréductible), on en déduit que r divise entièrement p_0 (terme constant de $P(x)$). De même, s divise le terme $p_n r^n$ (puisqu'il divise clairement tous les autres) et par suite s divise p_n (coefficient dominant de $P(x)$ ☺

Exemple : les racines rationnelles de $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$ se trouvent dans l'ensemble $\frac{\{\pm 1\}}{\{\pm 1; \pm 2\}} = \left\{\pm 1; \pm \frac{1}{2}\right\}$. Après calculs, on trouve

$x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{1}{2}$ comme seule racines rationnelles.

1.3.3 ADDITION ET SOUSTRACTION

L'addition et la soustraction de polynômes se fait très simplement. On additionne / soustrait les monômes de ***même partie littérale***.

Exemple

Considérons les polynômes $p(x) = -4x^4 + 2x^2 - 6x + 16$ et $q(x) = 3x^4 - x^3 + 8x^2 - 7$. On a alors

$$p(x) + q(x) = -x^4 - x^3 + 10x^2 - 6x + 9$$
$$p(x) - q(x) = -7x^4 + x^3 - 6x^2 - 6x + 23$$

1.3.4 MULTIPLICATION

Lorsque l'on multiplie des polynômes entre eux, il est primordial de se rappeler que la ***multiplication est distributive sur l'addition***, c'est-à-dire que tous les termes de la parenthèse de droite sont multipliés par tous les termes de la parenthèse de gauche. On multiplie les coefficients entre eux et les parties littérales entre elles en n'oubliant pas la règle des puissances qui nous dit que l'on doit additionner les exposants. Finalement on regroupe les termes de même partie littérale. Le degré du polynôme produit est la ***somme*** des degrés de chaque polynôme du produit.

Exemple

Considérons les polynômes

$p(x) = -4x^4 + 2x^2 + 16$ et $q(x) = 2x^2 - 1$. Alors

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= (2x^2 - 1)(-4x^4 + 2x^2 + 16) \\ &= -8x^6 + 4x^4 + 32x^2 + 4x^4 - 2x^2 - 16 \\ &= -8x^6 + 8x^4 + 30x^2 - 16 \end{aligned}$$

1.3.5 DIVISION EUCLIDIENNE

Le problème que l'on doit résoudre est par exemple diviser ***le dividende*** $A(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + x - 7$ par ***le diviseur*** $B(x) = x + 2$. Pour cela on va « imiter » la division euclidienne de deux nombres.

Divisons 67 par 5 :

$$\begin{array}{r|l} 67 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{-(65)} & 13 = \textit{quotient} \\ 2 = \textit{reste} & \end{array}$$

On peut donc écrire : $67 = 5 \cdot 13 + 2$

De manière analogue, on peut diviser $A(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + x - 7$ par $B(x) = x + 2$. On obtient :

$$\begin{array}{l|l} 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + x - 7 & x+2 \\ \cline{2-2} -(\underline{2x^4 + 4x^3}) & 2x^3 - 7x^2 + 19x - 37 \leftarrow \mathrm{Q(x)} \\ \quad -7x^3 + 5x^2 + x - 7 & \\ \quad -(\underline{-7x^3 - 14x^2}) & \\ \qquad 19x^2 + x - 7 & \\ \qquad -(\underline{19x^2 + 38x}) & \\ \qquad\quad -37x - 7 & \\ \qquad\quad -(\underline{-37x - 74}) & \\ \qquad\qquad 67 \leftarrow \mathrm{R(x)} & \end{array}$$

R(x) est le ***reste*** de la division alors que Q(x) est le ***quotient* . *Dans toutes les divisions, on a la relation suivante :***

$$\boxed{\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}}$$

Ici, cette relation devient:

$$\frac{2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + x - 7}{x + 2} = 2x^3 - 7x^2 + 19x - 37 + \frac{67}{x + 2}$$

$$2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + x - 7 = (x + 2) \cdot (2x^3 - 7x^2 + 19x - 37) + 67$$

On peut vérifier la réponse obtenue en calculant :

$$quotient \cdot diviseur + reste \,.$$

On doit alors obtenir le polynôme initial, c'est-à-dire $2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + x - 7$.

Ici : $\left(2x^3 - 7x^2 + 19x - 37\right) \cdot (x+2) + 67 = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + x - 7$ ***OK !***

<u>Deux résultats importants.</u>

- Lorsqu'un polynôme $p(x)$ est divisé par un ***diviseur*** non constant $d(x)$, le ***quotient*** $q(x)$ et le ***reste*** $r(x)$ sont définis par l'égalité :

$$\boxed{p(x) = d(x)q(x) + r(x)}$$

où le degré de $r(x)$ est inférieur au degré de $d(x)$.Lorsque le reste $r(x)$ est nul, on dit que $p(x)$ ***est divisible par*** $d(x)$.

- Soit un polynôme $p(x)$. En faisant la division euclidienne de $p(x)$ par $x - a$ (avec $a \in \mathbb{R}$), on obtient une relation $p(x) = (x-a)q(x) + r(x)$ .Donc $p(a) = (a-a)q(a) + r(a) = r\left(a\right)$ .Comme $\deg(R(x)) < 1$, le reste $R(x)$ est un polynôme constant qui ne dépend pas de la valeur attribuée à x, donc

$$R(x) = R(a) = P(a).$$

Le reste de la division euclidienne d'un polynôme $p(x)$ par $x - a$ (avec $a \in \mathbb{R}$) est le polynôme constant $R(x) = P(a)$ Il en découle l'équivalence :

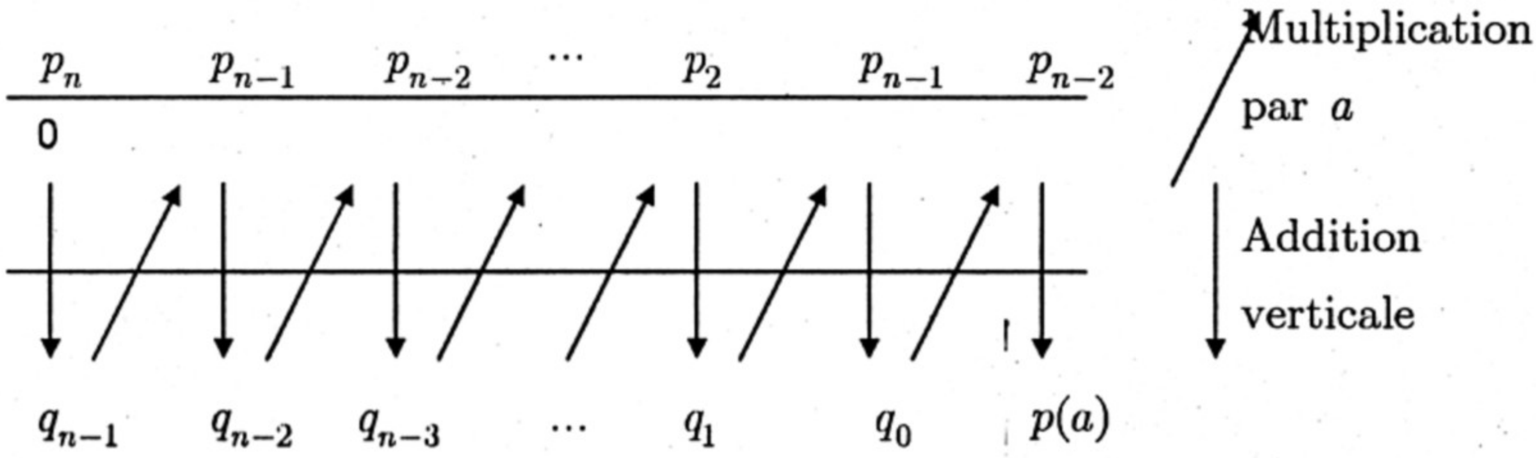
$$p(x) \text{est divisible par } \left(x-a\right) \longleftrightarrow P(a) = 0$$

1.3.6 *SCHEMA DE HORNER*

Pour diviser un polynôme

$$p(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0 \text{ par } x - a$$

Horner a proposé le schéma suivant :



Le quotient de la division euclidienne est alors

$$q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \ldots + q_1 x + q_0$$

et le reste est le polynôme constant $r\left(x\right) = p(a)$

Preuve :

On peut écrire $p(x) = q(x)(x-a) + p(a)$ avec $Deg\left(q(x)\right) = n-1$. Ainsi

On peut écrire $q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \ldots + q_1 x + q_0$ .Donc

$$\begin{aligned} p(x) - p(a) &= q(x)\cdot(x-a) \\ &= q_{n-1}x^n + (q_{n-2} - aq_{n-1})\cdot x^{n-1} \\ &\quad +(q_{n-3} - aq_{n-2})\cdot x^{n-2} + \ldots + (q_0 - aq_1)\cdot x - aq_0 \end{aligned}$$

Mais on peut également écrire $p(x) - p(a)$ de la manière suivante

$$p(x) - p(a) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0 - p(a)$$

En identifiant, on a: $\begin{cases} p_n = q_{n-1} \\ p_{n-1} = q_{n-2} - aq_{n-1} \\ p_{n-2} = q_{n-3} - aq_{n-2} \\ \cdots \\ p_1 = q_0 - aq_1 \\ p_0 - p(t) = -aq_0 \end{cases}$ donc $\begin{array}{l} q_{n-1} = p_n \\ q_{n-2} = p_{n-1} + aq_{n-1} \\ q_{n-3} = p_{n-2} + aq_{n-2} \\ \cdots \\ q_0 = p_1 + aq_1 \\ p(t) = p_0 + aq_0 \end{array}$.

On obtient donc les coefficients de $q(x)$ et le reste $p(a)$ de manière itérative. Le tableau suivant nous aide à effectuer ces opérations.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
\boxed{a} & 0 & a \cdot q_{n-1} & \cdots & a \cdot q_1 & a \cdot q_0 \\
\hline
 & a_n & a_{n-1} + a \cdot q_{n-1} & \cdots & a_1 + a \cdot q_1 & a_0 + a \cdot q_0 \\
 & = q_{n-1} & = q_{n-2} & & = q_1 & = p(a)
\end{array}$$

La $\nearrow$ signifie multiplication par a et $\downarrow$ addition verticale.

Exemple

Utiliser le schéma de Horner pour diviser

$p(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 + 4x - 11$ par $(x + 3)$.

	3	2	−1	1	4	−11
−3	0	−9	21	−60	177	−543
	3	−7	20	−59	181	−554

Ainsi

$$\frac{3x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 + 4x - 11}{x + 3} = 3x^4 - 7x^3 + 20x^2 - 59x + 181 - \frac{554}{x + 3}$$

1.4 EQUATIONS

Une équation polynomiale énonce une égalité entre deux éléments de $\mathbb{R}[x]$, qui peut être vérifiée ou non selon la valeur attribuée à x. On appelle solution toute valeur de x pour laquelle l'équation est vérifiée. Par exemple, l'équation $x^2 - 3x + 7 = 2x + 1$ admet les solutions $x_1 = 2$. et $x_2 = 3$ Pour résoudre une équation (c'est-à-dire trouver toutes ses solutions), on utilise le résultat suivant :

> On ne change pas l'ensemble des solutions d'une équation lorsque
>
> - on additionne un même polynôme aux deux membres de l'équation
> - on multiplie les deux membres de l'équation par un même nombre non nul.

Ces règles permettent de simplifier les membres d'une équation étape par étape pour obtenir des équations de plus en plus simples et aboutir à des solutions plus évidentes.

1.4.1 EQUATIONS DU PREMIER DEGRE

Lorsqu'une équation polynomiale $P(x) = Q(x)$ peut s'écrire sous la forme $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$, ***on dit que l'équation est du premier degré.*** Une équation du premier degré $ax + b = 0$, $(a \neq 0)$ ***admet une unique solution*** x_1

1.4.2 EQUATIONS RATIONNELLES

On appelle ***équation rationnelle*** une équation ayant la variable au dénominateur. Avant de résoudre une telle équation, on doit d'abord trouver les **exclus** de l'équation, c'est-à-dire les x pour lesquels cette dernière n'existe pas. Il s'agit des valeurs de x qui conduisent à une

division par zéro. Par conséquent, on doit trouver les zéros du/des dénominateur(s). Traitons un exemple.

Exemple

Résoudre l'équation : $\quad \dfrac{2}{4x-1}=\dfrac{-3}{2x+5}$

Les exclus de cette équation sont les zéros des dénominateurs. On les trouve en résolvant :

1) $\quad 4x-1=0 \qquad \Rightarrow x_1=\dfrac{1}{4}$

2) $\quad 2x+5=0 \qquad \Rightarrow x_2=-\dfrac{5}{2}$

Résolvons l'équation en éliminant les fractions :

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{2}{4x-1}=\dfrac{-3}{2x+5} & \cdot(4x-1) \\
2=\dfrac{-12x+3}{2x+5} & \cdot(2x+5) \\
4x+10=-12x+3 & +12x-10 \\
16x=-7 & :16 \\
x=-\dfrac{7}{16} \Rightarrow \text{ OK car } x=-\dfrac{7}{16}\notin\left\{\dfrac{1}{4};-\dfrac{5}{2}\right\} &
\end{array}$$

1.4.3 SYSTEMES DE DEUX EQUATIONS A DEUX INCONNUES

Lorsqu'on veut résoudre un tel système, on cherche la valeur de x et y qui satisfont les deux équations. Cela revient à chercher le point d'intersection de deux droites. Pour cela, nous avons trois différentes méthodes à disposition : ***addition***, ***substitution*** et ***graphique***. Voyons ces trois méthodes avec un exemple.

On considère le système suivant : $\begin{cases} 5x - 2y = 5 & (1) \\ 3x - y = 2 & (2) \end{cases}$

1) ***ADDITION***

Le but est d'avoir le même nombre de x ou y dans les deux équations, mais avec le signe opposé. Pour cela, on multiplie l'équation (2) par –2 et on obtient :

$$\begin{array}{ll} 5x - \mathbf{2}y = 5 & \\ -6x + \mathbf{2}y = -4 & + \\ \hline -x = 1 \Rightarrow x = -1 & \end{array}$$

On remplace x dans l'équation (2) et on trouve y :

$3 \cdot (-1) - y = 2 \Rightarrow y = -5$

2) ***SUBSTITUTION***

Le but est d'exprimer x en fonction de y ou y en fonction de x. On modifie l'équation (2) pour avoir $y = 3x - 2 \quad (3)$. On remplace ensuite y dans l'équation (1) par l'expression (3) pour obtenir :

$5x - 2(3x - 2) = 5$

$5x - 6x + 4 = 5$

$-x = 1 \Rightarrow x = -1$

On remplace x par -1 dans l'équation (3)

d'où $y = 3 \cdot (-1) - 2 = -5$

3) ***GRAPHIQUE***

Le but est de représenter les deux droites dans un système d'axes. Le point d'intersection nous donne la solution. La première chose à faire est d'exprimer y en fonction de x et ensuite de dessiner les deux droites :

(1) devient $y = \dfrac{5x - 5}{2}$

(2) devient $y = 3x - 2$

Cette dernière méthode est la moins utilisée. En effet, elle est relativement longue et, de plus, si le point d'intersection n'est pas à coordonnées entières, il est très difficile, voire impossible de lire précisément ses coordonnées et donc de trouver la solution.

Regardons maintenant un autre exemple un peu plus difficile.

Exemple Résoudre $\begin{cases} \dfrac{-1}{2}(2x-1)+3y=-2 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{-1}{2}(2x-1)+3y=-2 \\ 2x-3y=4 \end{array}\right\} \overset{\cdot(-2)}{\Rightarrow} \begin{Bmatrix} 2x-1-6y=4 \\ 2x-3y=4 \end{Bmatrix}$$

$$\overset{+1 \text{ et } \cdot(-1)}{\Rightarrow} \begin{cases} -2x+6y=-5 \\ 2x-3y=4 \end{cases} \oplus$$

$$3y=-1 \Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{3}}$$

On remplace y dans la seconde équation

pour trouver x : $2x-3\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)=4 \Rightarrow \boxed{x=\dfrac{3}{2}}$

Remarques

1. Deux équations multiples l'une de l'autres sont dites ***équivalentes***. Le système a alors une infinité de solutions.
2. Si le système ne possède aucune solution (la résolution mène à une impossibilité) les équations sont ***incompatibles***.

1.4.4 SYSTEMES DE TROIS EQUATIONS A TROIS INCONNUES

Pour résoudre un système $3x3$ on élimine une des variables en utilisant la méthode d'addition ou de substitution deux fois de suite. En d'autres termes, on élimine la variable de notre choix à l'aide de deux des trois équations, puis on répète l'opération en utilisant la troisième équation encore non utilisée. On se ramène ainsi à un système $2x2$. Voyons cela avec un exemple : on considère le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 7 & (1) \\ -2x - y - z = -1 & (2) \\ 5x - 3y + 4z = -20 & (3) \end{cases}$$

On additionne les équations (1) et (2) afin d'éliminer les x :

$$\begin{array}{rl} 2x - y - 2z = 7 & \\ -2x - y - z = -1 & + \\ \hline (4) \quad -2y - 3z = 6 & \end{array}$$

On élimine une fois encore x mais avec les équations (2) et (3) :

$$\begin{array}{lrl} (2) & -2x - y - z = -1 & \cdot 5 \\ (3) & 5x - 3y + 4z = -20 & \cdot 2 \\ \hline & -10x - 5y - 5z = -5 & \\ & 10x - 6y + 8z = -40 & + \\ \hline (5) & -11y + 3z = -45 & \end{array}$$

On a maintenant un système 2x2, formé des équations (4) et (5), à résoudre :

$$\begin{array}{lrl} (4) & -2y - 3z = 6 & \\ (5) & -11y + 3z = -45 & + \\ \hline & -13y = -39 \Rightarrow \boxed{y = 3} & \end{array}$$

On trouve z en replaçant $y = 3$ dans l'équation (5) :

$-11 \cdot 3 + 3z = -45 \Rightarrow \boxed{z = -4}$

Finalement, on trouve la valeur de x en replaçant $y = 3$ et $z = -4$ dans une des équations (1), (2), ou (3) : $2x - 3 - 2 \cdot (-4) = 7 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

1.4.5 EQUATIONS DU DEUXIEME DEGRE - FORMULE DE VIETE

Une équation est dite du deuxième degré (ou quadratique) si elle peut être ramenée sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

De manière générale, un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) peut se réécrire

$$P(x) = a\left(\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).$$

si bien que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est vérifié lorsque

$$\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Pour résoudre une équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ on calcule tout d'abord le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solutions
- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution x_1

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Si $\Delta \geq 0$, on a la factorisation $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

ainsi que les relations qui en découlent $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

(Relations de Viète - François Viète 1540 – 1603).

1.4.6 *EQUATIONS BICARREES*

Une équation bicarrée est une équation du type $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $ax^6 + bx^3 + c = 0$, ... On résout une telle équation à l'aide d'une substitution, en se ramenant à une équation du deuxième degré. Voyons cela sur un exemple.

Exemple

Trouver les solutions de l'équation : $x^4 - 45x^2 - 196 = 0$

On substitue : $t = x^2$ car $x^4 = (x^2)^2$. L'équation devient alors

$t^2 - 45t - 196 = 0$

A l'aide de la formule deux deuxième degré, on obtient

$$t_1 = 49 \text{ et } t_2 = -4$$

Comme $t = x^2$, on a $x = \pm\sqrt{t}$ et donc

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1} = \pm\sqrt{49} = \pm 7$$
$$x_{3,4} = \pm\sqrt{t_2} = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$$

Il n'y a donc que deux solutions : $x_{1,2} = \pm\sqrt{49} = \pm 7$

1.4.7 *EQUATIONS IRRATIONNELLES*

Leur nom provient du fait qu'elles contiennent une ou des racines carrées de la variable. La stratégie pour résoudre de telles équations est d'isoler la racine d'un côté de l'équation et ensuite d'élever au carré. Il est primordial de ***vérifier les solutions obtenues*** à la fin, car le fait d'élever au carré peut créer des solutions parasites.

Exemple

$x + \sqrt{x+1} - 1 = 0$	isoler la racine
$\sqrt{x+1} = -x + 1$	$(\quad)^2$
$x + 1 = x^2 - 2x + 1$	$-x - 1$
$x^2 - 3x = 0$	factorisation
$x(x-3) = 0$	
$x_1 = 0$ et $x_2 = 3$	

Contrôle :

$0+\sqrt{0+1}-1=0 \Rightarrow$ OK

$3+\sqrt{3+1}-1 \neq 0 \Rightarrow$ solution parasite

1.4.8 *EQUATIONS IMPLIQUANT UNE VALEUR ABSOLUE*

Définition

La ***valeur absolue*** de x, notée $\left| x \right|$, est définie de la façon suivante :

$$\left| x \right| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples $\left| 5 \right| = 5$ $\left| -5 \right| = -(-5) = 5$

Pour résoudre ce type d'équations, on utilise la même stratégie que pour les équations irrationnelles. On isole la valeur absolue d'un côté de l'équation. Ensuite on doit résoudre deux équations :

a) la première en changeant la valeur absolue en parenthèses
b) la seconde en changeant la valeur absolue en parenthèses **et** le signe de l'autre côté de l'équation.

Finalement il faut vérifier les solutions obtenues.

Exemple

$-5+2\cdot\lvert 2x-2\rvert$		$=11$	$+5$
$2\cdot\lvert 2x-2\rvert$		$=16$	$:2$
$\lvert 2x-2\rvert$		$=8$	
a)	$2x-2$	$=8$	sans changement de signe
	$2x$	$=10$	
	$x=x_1$	$=5$	
b)	$2x-2$	$=-8$	avec changement de signe
	$2x$	$=-6$	
	$x=x_2$	$=-3$	
Vérifications:		$-5+2\cdot\lvert 2\cdot 5-2\rvert=11$	OK
		$-5+2\cdot\lvert 2(-3)-2\rvert=11$	OK

1.4.9 EQUATIONS DE DEGRE SUPERIEUR A DEUX

Comme pour les équations quadratiques (Viète), il existe des formules pour résoudre des équations de degré 3 (Cardan-Tartaglia) et 4 (Ferrari) mais elles sont plus compliquées et d'un emploi peu fréquent. Evariste Galois a permis de montrer en 1843 qu'il n'y a aucune formule générale pour résoudre les équations de degré plus grand ou égal à 5.

On appelle ***racine (ou zéro)*** d'un polynôme $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, toute valeur $a \in \mathbb{R}$ qui vérifie $P(a)=0$. Dès qu'une racine $a \in \mathbb{R}$ est connue, on peut factoriser $P(x)=Q(x)\cdot(x-a)$ par l'algorithme de division euclidienne puis on essaie de factoriser le polynôme $Q(x)$ d'une manière ou d'une autre (identité remarquable, formule de Viète, recherche d'une racine,...)

> ***Théorème de factorisation :*** Tout polynôme $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ est un produit de polynômes du premier degré et du deuxième degré avec discriminant négatif.

Ceci montre qu'un polynôme de degré n admet au maximum n racines réelles différentes. Etant donné un polynôme $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ on appelle ***multiplicité d'une racine*** $a \in \mathbb{R}$, la puissance à laquelle apparaît $(x-a)$ dans la factorisation complète de $P(x)$

Exemple 1 : Factoriser $p(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

Les solutions entières plausibles sont $\{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$. On a $p(-1) = 0$. On divise $p(x)$ par $(x-(-1))$, on trouve

$$p(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x+1)(x^2-4) = (x+1)(x-2)(x+2)$$

La deuxième égalité étant obtenue par une identité remarquable. Le polynôme $p(x)$ admet donc les racines $x_1 = -1$, $x_2 = -2$ et $x_3 = 2$, toutes de multiplicité 1.

Exemple 2 : Factoriser $p(x) = 2x^3 - 5x - 6$

Les solutions plausibles sont $\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$. On a $p(2) = 0$ On divise $p(x)$ par $(x-2)$, on obtient

$$p(x) = 2x^3 - 5x - 6 = (x-2)(2x^2 - 4x + 3)$$

Comme le discriminant de $2x^2 - 4x + 3$ est $\Delta = -8 < 0$ cette factorisation est complète. Le polynôme $p(x)$ n'admet donc qu'une seule racine réelle : $x = 2$, de multiplicité 1.

1.5 INEQUATIONS

Une inéquation est une équation où le signe « $=$ » a été remplacé par l'un des signes suivants : « $\leq, \geq, <, >$ ». La solution n'est plus un nombre mais un ***intervalle.*** Chaque fois que l'on ***multiplie*** ou que l'on ***divise*** une inéquation par un nombre ***négatif***, on doit impérativement ***changer la direction de l'inégalité.*** En effet, $2 < 5$ mais $-2 > -5$. Les symboles « $<$ » et « $>$ » sont appelés inégalités ***strictes***, « $\leq$ » et « $\geq$ » sont des inégalités ***larges***.

Exemples

a) $-4x + 7 < -13$

$-4x < -20$  division par -4

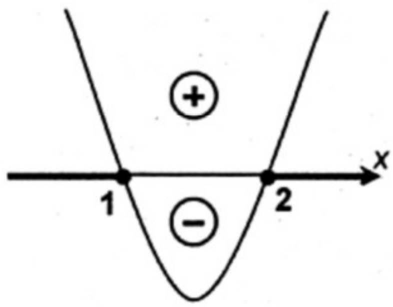
$x > 5$

$\boxed{x \in \left]\, 5;\infty \,\right[}$ (intervalle ouvert car c'est une inégalité stricte)

b) On commence par mettre tous les x et les nombres du même côté :

$$x^2 - 3x + 7 \geq 5 \;\overset{-5}{\Rightarrow}\; x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

Une parabole ne change de signe que lorsqu'elle traverse l'axe des x, on a donc besoin de ses zéros : $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$. On doit maintenant trouver les valeurs de x de sorte que la parabole soit positive. Pour cela on peut soit esquisser cette dernière, soit en dresser ***le tableau des signes :***



x		1		2	
$x^2 - 3x + 2$	+	0	−	0	+

Grâce à ce tableau, on obtient : $\boxed{x \in \left]-\infty;1\right] \cup \left[\,2;\infty\,\right[}$

1.6 SYSTEMES D'INEQUATIONS

Un système d'inéquations est un groupe de plusieurs inéquations que l'on doit satisfaire simultanément. On résout un tel système graphiquement, en commençant par représenter dans le plan les droites du système en question. Ensuite, on hachure la zone du plan qui contient les points $(x\,;\ y)$ qui satisfont le système.

Exemple

Résoudre graphiquement le système

$$\begin{cases} y \leq 2x - 3 \\ 2y + x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 2x - 3 \\ y > -\dfrac{1}{2}x + 2 \end{cases}$$

On représente graphiquement les deux droites du système $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 2 \end{cases}$

On hachure maintenant les points $(x\,;\,y)$ qui satisfont les deux inéquations du système. Les couples $(x\,;\,y)$ qui satisfont $y \leq 2x - 3$ se situent au-dessous **et** sur cette dernière ($\leq$).

Les couples $(x\,;\,y)$ qui satisfont $y > -\dfrac{1}{2}x + 2$ se situent au-dessus de cette dernière (vérifier si l'origine $O(0;0)$ satisfait l'inéquation). On obtient finalement comme solution, la zone grisée ainsi que la ligne en gras.