



Le calcul différentiel

UN LANGAGE RÉVOLUTIONNAIRE

Fondé sur l'utilisation de grandeurs infinitésimales, le calcul différentiel peut paraître éloigné de la réalité de tout un chacun. Cependant, il a été crucial dans la résolution de nombreux problèmes mathématiques, auparavant insolubles, liés à des approches pratiques telles que le calcul de vitesses et d'accélération. Utile dans un ensemble de domaines (optique, mathématiques, astronomie...), le calcul différentiel intervient chaque fois qu'un certain nombre de grandeurs physiques varient les unes par rapport aux autres, c'est-à-dire tout le temps. Sans lui, il est certain que la révolution scientifique et industrielle n'aurait pas eu lieu.

UNE HISTOIRE CONTROVERSÉE

Dans l'Antiquité, deux types généraux de problèmes géométriques se sont posés, pour lesquels il ne semblait exister que des solutions particulières : le calcul des tangentes et le calcul des quadratures (à la base, calcul de surfaces et volumes).



Bien longtemps après, l'astronome **Johannes Kepler** se trouve

confronté à un problème similaire qui paraît insoluble. En effet, après avoir découvert que la trajectoire des planètes est elliptique, il tente de calculer la surface d'un secteur elliptique mais n'arrive qu'à une approximation. Il lance, dans son ouvrage « Astronomie nouvelle », un appel aux géomètres pour trouver un nouvel outil mathématique afin de résoudre ce problème. Des savants comme Pierre de Fermat, Blaise Pascal, Isaac Newton, Gottfried Leibniz et bien d'autres se lancent dans cette recherche. C'est finalement Leibniz qui découvre le calcul différentiel et intégral. Cependant, il existe une polémique à ce sujet, certains pensant que Newton aurait inventé un calcul équivalent à celui de Leibniz, appelé calcul des fluxions. Certes, Leibniz a le premier publié ses résultats en 1684, mais Newton l'avait accusé de plagiat. Toutefois, cette accusation n'est pas très vraisemblable, car le calcul des fluxions évacue l'aspect essentiel du calcul différentiel – en l'occurrence l'utilisation de grandeurs infinitésimales, les différentielles – pour n'y laisser

subsister que des grandeurs finies, ce qui lui impose de prendre l'une des variables comme référence fixe.

DEUX PROBLÈMES RÉCIPROQUES

Le calcul des tangentes et le calcul des quadratures font surgir certains paradoxes qui seront à la base de la découverte du calcul différentiel.



En leur apportant une solution générale, Leibniz va montrer que chacun de ces deux problèmes était le réciproque de l'autre.

LE CALCUL DES TANGENTES

Considérons une sécante, c'est-à-dire une droite définie par deux points sur une courbe. Imaginons que l'un des points est fixe et que l'autre se déplace le long de la courbe ; on engendre ainsi toute une famille de sécantes. Il existe une singularité dans cette famille : la droite obtenue quand les deux points se confondent. Cette droite tangente, définie pour les points suffisamment réguliers sur une courbe est une caractéristique intrinsèque de la courbe ; elle ne dépend pas de la façon dont on fait tendre les points l'un vers l'autre. Elle a du reste une interprétation bien concrète puisqu'il s'agit de la droite portant la direction de la vitesse instantanée d'un mobile qui se déplacerait le long de cette courbe. Toutefois, malgré des implications mécaniques et sa réalité géométrique, la détermination de la tangente à une courbe requiert des notions dépassant le cadre de la géométrie classique. On obtient cette tangente par un « passage à la limite », c'est-à-dire en faisant tendre vers zéro la distance entre deux points de la courbe ; la tangente est la limite des sécantes joignant ces points. C'est le calcul différentiel qui fournit les outils mathématiques nécessaires à cette opération.

LE CALCUL DES QUADRATURES

Quelle est la surface délimitée par une courbe quelconque ? On peut tenter de résoudre ce problème par la quadrature, c'est-à-dire en disposant une série de rectangles à l'intérieur et à l'extérieur de cette surface. En additionnant les rectangles inscrits et circonscrits, on obtient une surface soit supérieure soit inférieure à celle de la courbe. Si l'on rend la

largeur de tous ces rectangles de plus en plus petite, la surface de la série inscrite va croître et la surface de la série circonscrite va décroître, la première restant toujours inférieure à la seconde. Il existe une valeur commune dont les deux séries vont se rapprocher sans jamais l'atteindre : la surface délimitée par la courbe. On voit qu'en réduisant la largeur des rectangles, on augmente leur nombre. Si l'on imagine que ces rectangles ont une largeur infiniment petite, on conçoit que leur nombre est, pour ainsi dire, infini. Ce calcul de surface fait donc apparaître un nouveau paradoxe du point de vue de la mathématique traditionnelle : une somme infinie. Cette expression est en effet paradoxale car, par définition, une somme est une opération entre un nombre fini de termes. Néanmoins, le calcul intégral permet de redéfinir de manière rigoureuse la notion de somme en lui donnant une portée plus générale.

ARCHIMÈDE ET LA QUADRATURE DU CERCLE

Deux siècles avant notre ère, Archimède calcule une série de tangentes et de quadratures pour certaines courbes connues à l'époque. Il arrive, par exemple, à calculer la quadrature de la parabole. Cependant, un problème semble échapper à la perspicacité du géomètre : quel est le carré qui a la même surface qu'un cercle donné ? Autrement dit, quel est le rapport entre le rayon du cercle et son périmètre ou sa superficie ? Ces questions font apparaître un certain nombre π (le rapport entre le périmètre et le diamètre du cercle). Mais la construction d'un carré de même surface qu'un cercle donné par les règles de la géométrie (utilisant seulement la règle et le compas) semble impossible. C'est le fameux problème de la quadrature du cercle. Bien plus tard, Leibniz prouva que cette impossibilité est liée, en termes arithmétiques, au fait que ce nombre ne peut pas s'exprimer plus simplement que par une somme infinie. Il établit que : $\pi/4 = 1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + 1/13 \dots$ Néanmoins, même si l'on ne sait pas résoudre la quadrature du cercle, on est tout de même capable de calculer certaines surfaces ou certains volumes, ou plutôt certains rapports entre eux. Considérant, par exemple, une sphère inscrite dans un cylindre et un cône de révolution inscrit dans le même cylindre, le calcul de ces trois volumes suppose connue la quadrature du cercle. Or

Archimède montre que le volume du cône est égal à la moitié de celui de la sphère et au tiers de celui du cylindre.

L'APPEL DE KEPLER

En 1609, Kepler publie son « Astronomie nouvelle », dans lequel il montre que les planètes tournent autour du Soleil selon un mouvement non uniforme. Il établit alors sa « loi des aires » qui énonce que si l'on considère un rayon géométrique entre le Soleil et la planète, alors la surface balayée par ce rayon pendant un certain déplacement de la planète est proportionnelle à la durée de ce déplacement. Cette loi est en fait une condition nécessaire pour déterminer la trajectoire de la planète. Si cette trajectoire était circulaire uniforme, le problème de sa détermination serait très facile. Cependant, Kepler montre que la trajectoire est une ellipse dont l'un des foyers est occupé par le Soleil. Il n'existe pas de relation simple entre un secteur d'une ellipse et la portion correspondante de son périmètre. Dans son ouvrage, Kepler donne une approximation pour un calcul de secteur elliptique tout en reconnaissant que cela n'est pas satisfaisant. Il lance alors un appel aux géomètres de son temps pour trouver un nouveau calcul permettant de résoudre ce problème dans sa généralité. De nombreux savants se lancent dans cette recherche au cours des décennies qui suivent.

FERMAT ET LE CALCUL DES MINIMA-MAXIMA

Le Hollandais Willebrord Snell avait découvert vers 1621, dans le

domaine de l'optique, la célèbre loi des sinus connue depuis sa mort sous le nom de « loi de Descartes ». Selon cette loi, si l'on considère un rayon lumineux qui change de milieu, passant par exemple de l'air dans l'eau, le rapport des sinus des angles incident et réfracté est une constante qui ne dépend que de la nature des milieux concernés, mais pas des angles eux-mêmes.



S'interrogeant sur le principe physique dont dépend cette loi, Fermat arrive à la conclusion que, pour se rendre d'un point à un autre, la lumière « choisira », entre toutes les trajectoires possibles, celle pour laquelle le temps est le moindre (minima). Il en déduit que le rapport des sinus des angles est égal au rapport des vitesses de la lumière dans les milieux concernés. Pour pouvoir traduire ce principe physique en langage mathématique, Fermat développe un calcul de minima-maxima. Imaginons plusieurs trajectoires possibles pour le rayon lumineux qui ne dépendent que du point X sur la surface de contact entre les deux milieux. Pour chacune de ces trajectoires, on peut calculer le temps mis par la lumière pour aller d'un point à un autre, si l'on suppose connues les vitesses de la lumière dans les deux milieux. Si l'on représente alors, sur une courbe, différentes valeurs de ce temps en fonction de la position du point X par rapport aux points de départ et d'arrivée de la lumière alors, d'après le principe de moindre temps de Fermat, cette courbe présentera un minimum pour la bonne valeur de X, c'est-à-dire celle qui donnera le rapport des

Leibniz et Newton

1684
Leibniz publie le premier texte présentant un algorithme de calcul différentiel.

1686
Newton affirme qu'il a, quelques années auparavant, inventé le calcul des fluxions, semblable au calcul différentiel de Leibniz.

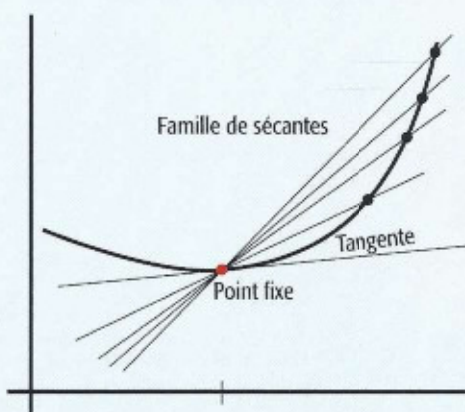
1699
Le mathématicien suisse Fatio de Duillier, et ami de Newton, accuse Leibniz de plagiat.

1712
La Royal Society, présidée par Newton, attribue à Newton l'invention du calcul différentiel.

1714
Le duc Georg-Ludwig, électeur de Hanovre, accède au trône d'Angleterre sans moter Leibniz à le suivre, en raison de la controverse.

1716
Mort de Leibniz. La querelle durera 6 ans avec J.Bernoulli lequel prendra parti pour le savant allemand.

Le calcul des tangentes



Archimède



il y a **2000** ans

sinus correspondant aux milieux considérés. Comme Fermat l'avait remarqué, la détermination d'un minimum (ou d'un maximum) se ramène à un calcul de tangente. Pour l'exprimer plus précisément, la tangente d'une courbe est « horizontale » en ses points extrêmes.

PASCAL ET LE TRIANGLE ARITHMETIQUE



Pascal a donné une impulsion décisive pour l'invention du calcul intégral, en étudiant les rapports réciproques entre différentes séries de

nombre et ce qui en découle pour le calcul de la somme d'un nombre quelconque de termes de ces séries. C'est pour cette raison que Leibniz s'est intéressé au Traité du triangle arithmétique de Pascal. Ce « triangle » a en réalité une base infinie. Il s'agit d'un ordonnancement d'une série de séries de nombres où l'on place tout d'abord, au sommet de ce triangle, un nombre quelconque, par exemple 1. À droite de ce nombre, on dispose une infinité de 1 sur la même ligne. On dispose ensuite sous le sommet, une infinité de 1. Pour remplir toutes les autres cases du triangle, on procède toujours de la même manière : le nombre inscrit dans une case est égal à la somme du nombre immédiatement au-dessus et du nombre immédiatement à gauche. Il apparaît ainsi sur la seconde ligne, la série des nombres entiers : 1, 2, 3, 4, 5, 6... Sur la troisième ligne, on obtient la série des nombres « triangulaires » : 1, 3, 6, 10, 15, 21... Sur la quatrième ligne, on obtient la série des nombres « pyramidaux » : 1, 4, 10, 20, 35, 56... Et ainsi de suite. Il apparaît que ce triangle permet de donner immédiatement le résultat de la somme d'une série quelconque de termes consécutifs sur une ligne. Pour cela, il suffit de faire la différence entre le terme de la ligne suivante de même rang que le dernier terme de la série, et

le terme de la ligne suivante de rang immédiatement inférieur que le premier terme de la série (si le premier terme de la série vaut 1, on prendra 0 pour le terme correspondant). Par exemple, en utilisant la cinquième et la sixième ligne du triangle, on peut vérifier que $15 + 35 + 70 + 126$ est égal à la différence $252 - 6$, c'est-à-dire 246. Il en résulte qu'une somme d'un nombre de termes aussi grand que l'on veut peut se calculer par une simple différence de deux nombres. S'inspirant de cette découverte de Pascal, Leibniz montrera par la suite que l'on peut même calculer des sommes infinies par des procédés du même type. Construisant ce qu'il appelle le « triangle harmonique » obtenu en inversant tous les termes du « triangle de Pascal », Leibniz montre que : $1/1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + 1/15 + \dots = 2/1$
 $1/1 + 1/4 + 1/10 + 1/20 + 1/35 + \dots = 3/2$
 $1/1 + 1/5 + 1/15 + 1/35 + 1/70 + \dots = 4/3$
 Et ainsi de suite. Par ailleurs, ces triangles suggèrent à Leibniz que les opérations de somme (calcul intégral) et de différence (calcul différentiel) sont réciproques l'une de l'autre.

L'APPORT DE LEIBNIZ

LA NOTATION

Si l'on considère un certain ensemble de variables mathématiques x, y, z , etc., on peut associer à chacune des quantités infinitésimales – ou « plus petites que n'importe quelle valeur donnée » – que l'on note en utilisant le préfixe « d », ce qui donne : dx, dy, dz , etc. Ceci étant posé, Leibniz énonce un certain nombre de règles de différentiation. Les plus connues sont : $d(x + y) = dx + dy$
 $d(A) = 0$ (si A est une constante)
 $d(xy) = xdy + ydx$
 $d(1/x) = -dx/x$
 L'expression mathématique d'une courbe étant donnée, il devient alors possible de calculer directement sa tangente en un point quelconque : il suffit de différentier l'expression de la courbe. Imaginons une fonction y de la variable x , dont on veut déterminer la tangente pour un point d'abscisse x_0 : la pente de cette tangente est

déterminée par le rapport dy/dx calculé pour la valeur x_0 de la variable x . La plupart du temps, le rapport de ces deux valeurs infinitésimales est une grandeur finie. Par ailleurs, le calcul inverse des tangentes, ou calcul intégral, utilise la même notation ainsi que le signe de « sommation » \int . Imaginons que l'on veuille calculer une surface délimitée par une courbe déterminée par la fonction f d'une variable x , et deux valeurs extrêmes x_0 et x_1 . La notation fait apparaître une « somme d'une infinité » de rectangles infinitésimaux de largeur dx et de longueur $f(x)$, cette longueur prenant toutes les valeurs possibles lorsque x varie entre x_0 et x_1 . D'une manière similaire à ce qui a été signalé à propos du triangle de Pascal, cette « somme infinie » se calcule à partir d'une différence entre deux termes, calculés eux-mêmes à partir d'une certaine expression déterminée par l'application des règles du calcul intégral à l'expression initiale de la courbe. Les règles du calcul intégral sont elles-mêmes déterminées comme réciproques des règles de différentiation. Par exemple :

$$\int dx = x$$

$$\int (y + z) dx = \int y dx + \int z dx$$

$$\int y dx = xy - \int x dy$$

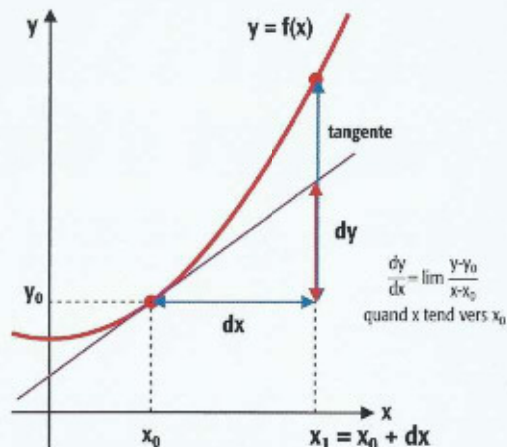
LES COURBES TRANSCENDANTES

Toutes ces règles permettent de rassembler sous une seule notation tous les résultats des problèmes de tangentes et de quadratures résolus depuis Archimède. Cependant, le principal intérêt de ce calcul ne se trouve pas là. En effet, les problèmes de quadratures de certaines courbes comme le cercle et l'hyperbole ont révélé l'existence de certaines courbes dites « transcendantes » ou « mécaniques » (sinus, logarithme, exponentielle, etc.). Ce qui gêne certains géomètres, c'est que ces courbes ne peuvent pas s'exprimer sous la forme algébrique habituelle, c'est-à-dire à partir d'additions, de soustractions, de produits, de rapports et d'élevations à la puissance. Descartes propose purement et simplement de les exclure de sa géométrie ! Le calcul différentiel permet de clore ce débat, car il s'avère que même si certaines fonctions ne peuvent pas être déterminées par l'ancienne mathématique, en revanche le nouveau calcul permet de connaître leurs propriétés les plus remarquables. Par exemple, même si l'on ne connaît pas d'expression algébrique pour la quadrature de l'hyperbole, que l'on appelle « logarithme » et note \log , on peut néanmoins prouver que : $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$
 Aidé des frères Bernoulli, Leibniz se lance alors dans une étude de ces fonctions qui ne rentrent pas dans l'ancienne mathématique, mais qui néanmoins s'imposent par la réalité de certains phénomènes physiques, comme la cycloïde (roulette) et la chaînette.

DIFFÉRENTIATIONS SUCCESSIVES

L'opération de différentiation d'une courbe, ou plus généralement d'une fonction, fait apparaître une nouvelle fonction, la dérivée. Cette dernière est à

Différentiation et tangente



son tour éventuellement susceptible de différentiation, et ainsi de suite. L'un des exercices classiques pour étudier une courbe consiste en général à faire deux différentiations successives : la première mettant en évidence les minima et les maxima, la seconde permettant de calculer les rayons de courbure. La notation de Leibniz est parfaitement adaptée à tous ces problèmes de différentiations successives. Dès le XVII^e siècle, les progrès fulgurants de la physique ont posé de plus en plus de problèmes faisant intervenir des équations différentielles, c'est-à-dire des équations liant certaines fonctions avec leur dérivées successives. Parmi les exemples les plus connus figurent l'équation de la chaleur établie par Joseph Fourier et permettant d'exprimer la propagation de la chaleur dans un corps. On peut encore mentionner les équations elliptiques pour lesquelles de nombreuses approches ont été données, notamment par Niels Abel et Bernhard Riemann (le problème de Kepler a donc eu beaucoup de conséquences bien au-delà de Leibniz). On vit ainsi apparaître de plus en plus de fonctions transcendentes ne pouvant s'exprimer autrement que par les équations différentielles dont elles sont les solutions. Bien qu'il soit impossible

d'exprimer ces fonctions autrement qu'en leur donnant un nouveau nom, par exemple les fonctions de Bessel, ces équations permettent néanmoins d'en déterminer les propriétés.

DIFFICULTÉS CONCEPTUELLES

Bien que les géomètres aient appris à manipuler le calcul différentiel et résoudre les équations à la perfection, ils ont toujours eu des difficultés à comprendre les fondements eux-mêmes de ces opérations. L'utilisation de grandeurs non finies dans les calculs a toujours été un point difficile. Ce n'est pas sans ironie que Lazare Carnot rend compte de ce problème en 1797 dans ses « Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal », dans lequel il mentionne le faux débat entre ceux qui prétendent que le calcul de Leibniz est rigoureux, mais qu'il ne donne qu'un résultat approximatif, et ceux qui disent que le calcul donne un résultat exact, mais par des moyens non rigoureux. Joseph Louis de Lagrange a, par exemple, essayé de prendre pour point de départ la formule de Taylor. Quant à Augustin Cauchy, il a fait reposer l'ensemble du calcul sur le théorème des limites. L'approche de Cauchy est celle qui est enseignée aujourd'hui dans les écoles.

Triangle de Pascal

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	6	10	15	21	28	36	45	
1	4	10	20	35	56	84	120		
1	5	15	35	70	126	210			
1	6	21	56	126	252				
1	7	28	84	210					
1	8	36	120						
1	9	45							
1	10								
1									

Intégration et surface sous la courbe

