Calorimétrie

Dans un récipient de capacité thermique négligeable on met en contact thermique de l'eau à $\theta_1 > 0$ °C et de la glace à $\theta_2 < 0$ °C. Déterminer les caractéristiques de l'équilibre thermique, les échanges de chaleur avec l'air ambiant sont négligés.

Commentaires et précisions sur ce problème :

La situation ressemble à celle de l'exemple du cours, mais elle est moins évidente. En effet, selon les masses et les températures initiales de l'eau et de la glace, trois possibilités d'état final sont à envisager:

1°) Si la masse de glace n'est pas trop importante et si sa température n'est pas trop basse, on se trouve dans les conditions de l'exemple : toute la glace aura fondu et l'état final sera de l'eau à $0 \leq \theta_{éq} < \theta_1$.

2°) Les masses et températures initiales peuvent être telles qu'une *partie* de la glace fondra ou une *partie* de l'eau gèlera. L'état final d'équilibre sera un mélange d'eau et de glace à $\theta = 0$ °C. L'inconnue du problème ne sera donc pas $\theta_{éq}$ mais la masse de glace fondue ou la masse d'eau gelée.

3°) Si la masse d'eau n'est pas trop importante et si sa température n'est pas trop élevée, on se trouve dans les conditions opposées à 1°) : toute l'eau aura gelé et l'état final sera de la glace à $0 \geq \theta_{éq} > \theta_2$.

La question du problème est, les conditions initiales étant 1 kg d'eau à $\theta_1 = 20$ °C et 1 kg de glace à $\theta_2 = -20$ °C, quelle sera la caractéristique de l'état d'équilibre final ?

On va étudier la situation générale où on a m_1 kg d'eau à $\theta_1 > 0°C$ et m_2 kg de glace à $\theta_2 < 0°C$. On a les 3 cas décrits ci-dessous.
On va chercher des conditions sur m_1 et m_2 pour chacun de ces cas.

<u>Conditions sur m_1 et m_2 pour que le cas 1°) soit réalisé:</u> Ici, on a $\theta_{éq} > 0$.

La glace commence par se réchauffer de θ_2 à $0°$. L'énergie à fournir est $Q_1 =$ $= m_2 c_2 (0 - \theta_2) = -m_2 c_2 \theta_2$, où c_2 est la chaleur massique de la glace. On remarque que, comme $\theta_2 < 0$, on a bien $Q_1 > 0$ (ce qui correspond bien à de l'énergie à fournir). Ainsi, $Q_1 = -m_2 c_2 \theta_2$.

La glace à 0°C se transforme ensuite en eau à 0°C. L'énergie à fournir (positive) est $Q_2 = m_2 L_f$, où L_f est la chaleur latente de fusion de l'eau.

Puis, l'eau obtenue est chauffée de 0° à $\theta_{éq}$. L'énergie à fournir est $Q_3 =$ $= m_2 c_1 (\theta_{éq} - 0) = m_2 c_1 \theta_{éq}$, où c_1 est la chaleur massique de la glace.

L'eau au départ à θ_1 degré est refroidie à $\theta_{éq}$. L'énergie qui s'en dégage est donnée par $Q_4 = m_1 c_1 (\theta_{éq} - \theta_1) = m_1 c_1 \theta_{éq} - m_1 c_1 \theta_1$. Cette énergie est négative (ce qui correspond bien à de l'énergie dégagée) puisque $\theta_{éq} < \theta_1$.

L'énergie produite par le refroidissement de l'eau à la température θ_1 est utilisée pour réchauffer la glace à la température θ_2. On a donc $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0$:

$$-m_2 c_2 \theta_2 + m_2 L_f + m_2 c_1 \theta_{éq} + m_1 c_1 \theta_{éq} - m_1 c_1 \theta_1 = 0$$

$$\Rightarrow m_1 c_1 \theta_{éq} + m_2 c_1 \theta_{éq} = m_1 c_1 \theta_1 + m_2 c_2 \theta_2 - m_2 L_f$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) c_1 \theta_{éq} = m_1 c_1 \theta_1 + m_2 c_2 \theta_2 - m_2 L_f$$

$$\Rightarrow \theta_{éq} = \frac{m_1 c_1 \theta_1 + m_2 c_2 \theta_2 - m_2 L_f}{(m_1 + m_2) c_1}$$

Comme $\theta_{éq} > 0$, on a $\dfrac{m_1c_1\theta_1 + m_2c_2\theta_2 - m_2L_f}{(m_1+m_2)c_1} > 0 \Rightarrow m_1c_1\theta_1 + m_2c_2\theta_2 - m_2L_f > 0$

$\Rightarrow m_1c_1\theta_1 > m_2L_f - m_2c_2\theta_2 \Rightarrow m_1c_1\theta_1 > m_2(L_f - c_2\theta_2) \Rightarrow \dfrac{m_1}{m_2} > \dfrac{L_f - c_2\theta_2}{c_1\theta_1}$.

Par conséquent, si $\dfrac{m_1}{m_2} > \dfrac{L_f - c_2\theta_2}{c_1\theta_1}$, on est dans le cas 1°) et on a alors

$$\theta_{éq} = \frac{m_1c_1\theta_1 + m_2c_2\theta_2 - m_2L_f}{(m_1+m_2)c_1}.$$

Conditions pour m_1 et m_2 pour que le cas 3°) soit réalisé : Ici, on a $\theta_{éq} < 0$.

La glace se réchauffe de θ_2 à $\theta_{éq}$. L'énergie à fournir est $Q_1 = m_2c_2(\theta_{éq} - \theta_2) =$
$= m_2c_2\theta_{éq} - m_2c_2\theta_2$.

L'eau à $\theta_1°$ commence par se refroidir jusqu'à 0°C. L'énergie qu'elle fournit est $Q_2 = m_1c_1(0 - \theta_1) = -m_1c_1\theta_1$ (on a bien "−" car l'énergie est fournie par le refroidissement).

L'eau à 0°C se transforme ensuite en glace à 0°C. L'énergie qu'elle fournit (signe "−" !) est $Q_3 = -m_1L_f$.

Puis, la glace obtenue se refroidit à la température $\theta_{éq}$. L'énergie qu'elle fournit est $Q_4 = m_1c_2(\theta_{éq} - 0) = m_1c_2\theta_{éq}$ (on a bien $Q_4 < 0$ puisque $\theta_{éq} < 0$).

L'énergie produite par le refroidissement de l'eau à la température θ_1 est utilisée pour réchauffer la glace à la température θ_2. On a donc $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0$:

$$m_2c_2\theta_{éq} - m_2c_2\theta_2 - m_1c_1\theta_1 - m_1L_f + m_1c_2\theta_{éq} = 0$$

$$\Rightarrow m_1c_2\theta_{éq} + m_2c_2\theta_{éq} = m_1c_1\theta_1 + m_2c_2\theta_2 + m_1L_f$$

$$\Rightarrow (m_1+m_2)c_2\theta_{éq} = m_1c_1\theta_1 + m_2c_2\theta_2 + m_1L_f$$

$$\Rightarrow \theta_{éq} = \frac{m_1c_1\theta_1 + m_2c_2\theta_2 + m_1L_f}{(m_1+m_2)c_2}.$$

Comme $\theta_{éq} < 0$, on a $\dfrac{m_1c_1\theta_1 + m_2c_2\theta_2 + m_1L_f}{(m_1+m_2)c_2} < 0 \Rightarrow m_1c_1\theta_1 + m_2c_2\theta_2 + m_1L_f < 0$

$$\Rightarrow m_1c_1\theta_1 + m_1L_f < -m_2c_2\theta_2 \Rightarrow m_1(L_f + c_1\theta_1) < -m_2c_2\theta_2$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} < -\frac{c_2\theta_2}{L_f + c_1\theta_1}.$$

Par conséquent, si $\dfrac{m_1}{m_2} < -\dfrac{c_2\theta_2}{L_f + c_1\theta_1}$, on est dans le cas 3°) et on a alors

$$\theta_{éq} = \frac{m_1c_1\theta_1 + m_2c_2\theta_2 + m_1L_f}{L_f + c_1\theta_1}.$$

On remarque que $\dfrac{L_f - c_2\theta_2}{c_1\theta_1} > \dfrac{-c_2\theta_2}{c_1\theta_1} > \dfrac{-c_2\theta_2}{L_f + c_1\theta_1}$ puisque $\theta_2 < 0$ et $-c_2\theta_2 > 0$.

Cas 2°) : D'après ce qui a été fait ci-dessus, on en déduit que, si on a $\dfrac{-c_2\theta_2}{L_f + c_1\theta_1} < \dfrac{m_1}{m_2} < \dfrac{L_f - c_2\theta_2}{c_1\theta_1}$, alors on est dans le cas 2°).

Dans ce cas, cela signifie qu'une partie m_1' de m_1 devient solide et qu'une partie m_2' de m_2 devient liquide.

La glace se réchauffe de θ_2 à $0°$. L'énergie à fournir est $Q_1 = m_2 c_2 (0-\theta_2) = -m_2 c_2 \theta_2$.
Puis, une partie m_2' de cette glace se transforme en eau. L'énergie à fournir (positive) est $Q_2 = m_2' L_f$.
L'eau à θ_1 se refroidit à $0°$. L'énergie reçue est $Q_3 = m_1 c_1 (0-\theta_1) = -m_1 c_1 \theta_1$.
Puis, une partie m_1' de cette eau se transforme en glace. L'énergie qu'elle fournit (négative) est $Q_4 = -m_1' L_f$.
L'énergie produite par le refroidissement de l'eau est utilisée pour réchauffer la glace.
On a donc $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0$:
$-m_2 c_2 \theta_2 + m_2' L_f - m_1 c_1 \theta_1 - m_1' L_f = 0 \quad (*)$.

Désignons par m la masse totale de glace obtenue à l'arrivée.
De l'eau, on a obtenu une masse m_1' de glace.
De la glace, il reste une masse de $m_2 - m_2'$ de glace (puisqu'une masse m_2' se transforme en eau).
On a donc $m = m_1' + m_2 - m_2' \Rightarrow m_2' = m_1' + m_2 - m$.
Dans $(*)$, on obtient $-m_2 c_2 \theta_2 + (m_1' + m_2 - m) L_f - m_1 c_1 \theta_1 - m_1' L_f = 0$
$\Rightarrow -m_2 c_2 \theta_2 + \cancel{m_1' L_f} + m_2 L_f - m L_f - m_1 c_1 \theta_1 - \cancel{m_1' L_f} = 0$
$\Rightarrow -m_2 c_2 \theta_2 + m_2 L_f - m L_f - m_1 c_1 \theta_1 = 0$
$\Rightarrow m L_f = m_2 L_f - m_2 c_2 \theta_2 - m_1 c_1 \theta_1$
$\Rightarrow m = \dfrac{m_2 L_f - m_2 c_2 \theta_2 - m_1 c_1 \theta_1}{L_f}$.

Par conséquent, si $-\dfrac{c_2 \theta_2}{L_f + c_1 \theta_1} < \dfrac{m_1}{m_2} < \dfrac{L_f - c_2 \theta_2}{c_1 \theta_1}$, on est dans le cas 2°)
et la masse finale de glace obtenue est $m = \dfrac{m_2 L_f - m_2 c_2 \theta_2 - m_1 c_1 \theta_1}{L_f}$, la masse d'eau obtenue étant $m' = m_1 + m_2 - m$.

<u>En résumé</u> :
Lorsqu'on mélange m_1 kg d'eau à $\theta_1 > 0°C$ et m_2 kg de glace à $\theta_2 < 0°C$, on a 3 équilibres possibles :
1°) si $\dfrac{m_1}{m_2} > \dfrac{L_f - c_2 \theta_2}{c_1 \theta_1}$, alors toute la glace aura fondu et l'état final sera de l'eau à $0 < \theta_{éq} < \theta_1$ avec $\theta_{éq} = \dfrac{m_1 c_1 \theta_1 + m_2 c_2 \theta_2 - m_2 L_f}{(m_1 + m_2) c_1}$, où c_1 est la chaleur massique de l'eau, c_2 celle de la glace et L_f la chaleur latente de fusion de l'eau.

2°) si $-\frac{c_2\theta_2}{L_f+c_1\theta_1} < \frac{m_1}{m_2} < \frac{L_f-c_2\theta_2}{c_1\theta_1}$, alors une partie de la glace fondra et une partie de l'eau gèlera. La température d'équilibre sera $\theta_{éq}=0°C$. La masse finale de la glace obtenue sera $m=\frac{m_2L_f-m_2c_2\theta_2-m_1c_1\theta_1}{L_f}$ et la masse finale d'eau sera $m'=m_1+m_2-m$.

3°) si $\frac{m_1}{m_2} < -\frac{c_2\theta_2}{L_f+c_1\theta_1}$, alors toute l'eau aura gélé et l'état final sera de la glace à $\theta_2<\theta_{éq}<0$ avec $\theta_{éq}=\frac{m_1c_1\theta_1+m_2c_2\theta_2+m_1L_f}{L_f+c_1\theta_1}$.

Application numérique:

On choisit (voir énoncé) $m_1=1\,kg$, $\theta_1=20°C$, $m_2=1\,kg$, $\theta_2=-20°C$.

D'après Formulaires et Tables p. 164 et 165, on a $c_1=4180\,J/kgK$, $c_2=2060\,J/kgK$ et $L_v=3{,}3.10^5\,J/kg$.

On a $\frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{1}=1$.

De plus $\frac{L_f-c_2\theta_2}{c_1\theta_1}=\frac{3{,}3.10^5-2060.(-20)}{4180.20}\cong 4{,}44$ et

$$-\frac{c_2\theta_2}{L_f+c_1\theta_1}=-\frac{2060.(-20)}{3{,}3.10^5+4180.20}\cong 0{,}1.$$

On a ainsi $-\frac{c_2\theta_2}{L_f+c_1\theta_1} < \frac{m_1}{m_2} < \frac{L_f-c_2\theta_2}{c_1\theta_1}$ et on est dans le cas 2°).

Ainsi, la température est $\theta_{éq}=0°C$ et on obtient $m=\frac{m_2L_f-m_2c_2\theta_2-m_1c_1\theta_1}{L_f}=$

$=\frac{1.3{,}3.10^5-1.2060.(-20)-1.4180.20}{3{,}3.10^5}\cong 0{,}87\,kg$ de glace et $m'=m_1+m_2-m$

$\cong 1+1-0{,}87\cong 1{,}23\,kg$ d'eau.