Le **cercle** dans le **plan**

FIGURE FONDAMENTALE

Le mot « cercle » vient du latin *circulus*, diminutif de circus (le cirque). Le terme grec *Kuklos*, qui désignait le cercle, a donné quant à lui le mot cycle en français. Dans la langue courante, le cercle est souvent désigné par le terme « rond », il désigne alors tant la circonférence que la surface.
Le cercle est considéré comme la figure géométrique et le symbole le plus fondamental, le plus simple, le plus universel.

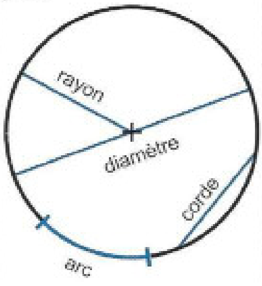
PETITE HISTOIRE DU CERCLE

Très tôt utilisé pour la figuration de nombreux objets naturels ou artificiels comme les astres, les fruits, la tête ou les roues, le cercle possède une symbolique d'une immense richesse comme en atteste sa présence dans l'imagerie religieuse, philosophique ou artistique.
Autant il est difficile d'observer dans la nature des figures géométriques simples et parfaites comme le carré ou le triangle autant il est courant de rencontrer des formes circulaires : train d'ondes quand on lance un caillou dans l'eau, œil, nid d'oiseau, fleurs, fruits, etc.
Très tôt les civilisations ont choisi le cercle comme symbole de la perfection et des divinités. Dès le néolithique le cercle apparaît sur les parois de certaines cavernes à côté des mammouths ou du gibier. Dans la religion chrétienne, le cercle, figure considérée comme parfaite, symbolise Dieu. On représente donc la voûte céleste par une circonférence ou par sa transformation en volume, la sphère ou la coupole. L'histoire raconte ainsi que Giotto, peintre italien du XIIe siècle, afin de convaincre le pape Benoît IX de son talent, traça à l'encre rouge et à main levée un cercle parfait sur une simple feuille de papier. C'est ainsi, qu'il le persuada de lui accorder la décoration de Saint-Pierre de Rome. Aujourd'hui encore de nombreux concours de tracé de cercle parfait à main levée sont organisés, preuve de la fascination que cette figure particulière exerce toujours.
Le cercle représente ainsi souvent le cosmos ou l'unité. Chez les Indiens d'Amérique du Nord par exemple, c'est un symbole dont la place est essentielle. Il symbolise notamment ce que l'on appelle la roue médecine. Roue parce qu'elle tourne sans cesse. Son mouvement représente les cycles de la vie (succession des saisons, mouvement des astres, phases de la vie).

En toute logique, le cercle a donc été l'un des premiers objets mathématiques étudiés attentivement et ce dans toute les grandes civilisations mathématiques.

QUELQUES DÉFINITIONS PRÉALABLES

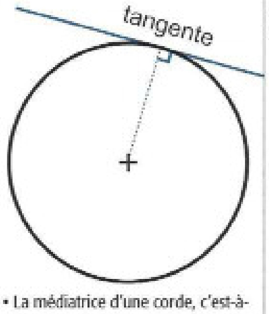
- Le cercle est une figure géométrique très particulière. C'est une courbe, située dans un plan. Cette courbe est constituée de points situés à égale distance d'un point appelé centre. La valeur de cette distance est le rayon du cercle.
- Pour un même centre, il existe une infinité de cercles.
- La portion du plan délimitée par le cercle s'appelle le disque.
- On appelle corde, un segment de droite reliant deux points distincts du cercle. Les cordes qui passent par le centre du cercle sont des diamètres. La longueur du diamètre vaut le double de celle du rayon. On dit qu'il est composé de deux rayons colinéaires. Le diamètre coupe le disque en deux parties égales.
- Un arc de cercle est une portion de cercle délimitée par deux points.
- Une flèche est un segment de droite reliant les milieux d'un arc et d'une corde limités par deux même points.



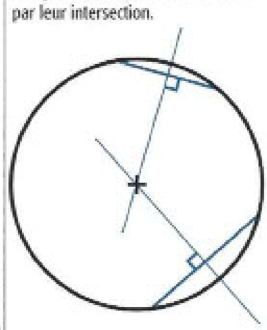
- On appelle cercle trigonométrique ou cercle unité un cercle situé dans un repère orthonormé et dont le centre est l'origine du repère et dont le rayon vaut 1.
- Le cercle est le premier objet mathématique permettant le calcul et la définition du nombre π.

Le nombre π est le rapport constant entre la circonférence d'un cercle et son diamètre. Il est appelé aussi constante d'Archimède, une valeur approchée en est 3,14159. On en déduit donc la circonférence du cercle appelé périmètre qui vaut $2\pi R$ où R est le rayon et l'aire du disque qui vaut πR^2.
On sait déterminer la longueur d'un arc ou d'une corde sous-tendus par un angle α exprimé en radians. La longueur de l'arc vaut αR et celle de la corde $2R\sin(\alpha/2)$.

- On dit qu'une droite est tangente à un cercle donné si elle touche ce cercle en un seul point. La tangente à un cercle en un point a des propriétés particulières. Ainsi, elle est perpendiculaire au rayon passant par le point d'intersection avec le cercle.

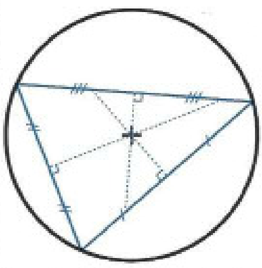


- La médiatrice d'une corde, c'est-à-dire, la demi-droite perpendiculaire à la corde en son milieu a la propriété de passer par le centre du cercle. La connaissance de cette propriété permet notamment de trouver le centre d'un cercle en traçant la médiatrice de deux cordes non parallèles. Le centre sera défini par leur intersection.

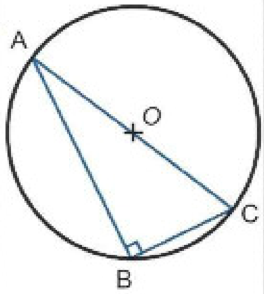


ANGLE, TRIANGLE ET CERCLE

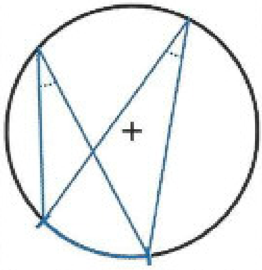
La propriété concernant les médiatrices est aussi à la base de la construction du cercle circonscrit à un triangle. En effet, les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes et leur point de rencontre est le centre du cercle qui passe par les trois sommets.



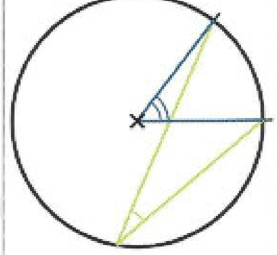
Les cercles et les triangles rectangles ont des relations géométriques qui ont été beaucoup étudiées. Ainsi, il est utile de savoir que :
un triangle ABC dont les trois sommets sont situés sur un cercle et dont l'un des côtés, par exemple AC est un diamètre du cercle est rectangle en son sommet opposé, c'est-à-dire ici B.
Cette propriété possède évidemment sa réciproque : le cercle circonscrit à un triangle ABC rectangle en B a un diamètre qui vaut AC.



Par ailleurs, plusieurs théorèmes reliant le cercle et les angles ont été établis. Les plus connus sont le théorème de l'angle inscrit et le théorème de l'angle au centre.
Un angle est inscrit dans un cercle si son sommet appartient au cercle. Ce faisant il définit un arc de cercle.
- Deux angles inscrits distincts, définissant le même arc de cercle ont la même mesure (théorème de l'angle inscrit).



On appelle angle au centre, l'angle dont le sommet est le centre du cercle et défini par deux points situés sur le cercle.
- La mesure de l'angle inscrit est la moitié de celle de l'angle au centre qui intercepte le même arc (théorème de l'angle au centre).

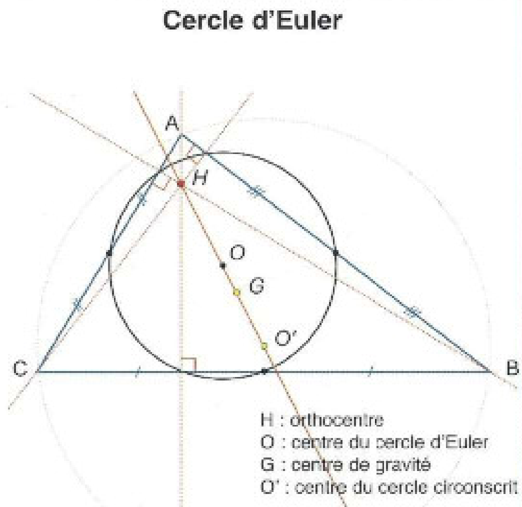


Certains cercles ont des propriétés particulières, notamment vis-à-vis des triangles. On a ainsi défini le cercle des neufs points, aussi appelé cercle d'Euler, de Feuerbach ou de Terquem. Ce cercle très particulier est un cercle qui passe par chacun des milieux des trois côtés du triangle, par le pied de chacune des trois hauteurs du triangle ainsi que par le milieu de chacun des trois segments reliant l'orthocentre à un sommet du triangle. Son rayon vaut la moitié du rayon du cercle circonscrit. Son centre est sur la droite d'Euler (droite rejoignant l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité du triangle). Ce cercle que l'on appelle souvent cercle des 9 points a en fait 43 points remarquables.

PUISSANCE D'UN POINT, AXE ET CENTRE RADICAL

Puissance d'un point

La notion de puissance d'un point est une notion très importante qui permet de définir de manière plus formelle les relations entre les cercles, les points et les autres figures d'un espace plan.
La puissance d'un point par rapport à un cercle est définie par la relation



Chiffres ronds

0

Chiffre attribué au cercle parfait par les mathématiciens indiens. Le vide étant associé en Inde à un élément immuable, éternel, excluant tout mélange, il est aussi la plénitude, la totalité et est alors associé au cercle.

1 000

Nombre de pages de l'ouvrage de Grégoire de Saint-Vincent sur la quadrature du cercle. Il pensait à tort l'avoir résolu !

2

C'est le nombre de points distincts par lequel ne passe qu'un seul grand cercle terrestre (cercle de même diamètre et de même centre que la Terre, comme les méridiens par exemple).

43

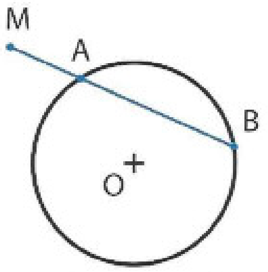
Nombre de points particuliers trouvés à ce jour sur le cercle d'Euler, dit aussi cercle des neuf points.

Le nombre **le plus étudié**

π

3,14159
environ

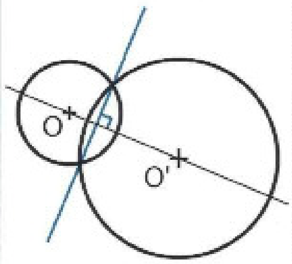
mathématique suivante : soit C un cercle de rayon R et de centre O et M un point quelconque. On considère une droite passant par M et coupant le cercle en A et B.
On a alors $\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2$
Cette quantité qui peut être notée $P_C(M)$ est appellée puissance du point M. Couramment, on utilise les valeurs algébriques pour exprimer $\overline{MA}$ et $\overline{MB}$
On en déduit que M est extérieur au cercle C si et seulement si $P_C(M) > 0$; M appartient au cercle C si et seulement si $P_C(M) = 0$; M est intérieur au cercle C si et seulement si $P_C(M) > 0$.



Cette quantité permet par exemple d'étudier la cocyclicité de quatre points. Ainsi soit deux droites sécantes en M. Prenons A, B, C et D, respectivement deux points sur chacune des deux droites :
Si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ alors il existe un cercle passant par ces quatre points. On dit qu'ils sont cocycliques.

Axe radical

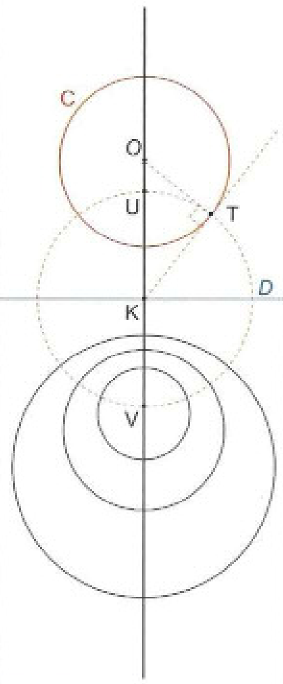
L'axe radical de deux cercles est l'ensemble des points ayant la même



puissance par rapport à deux cercles. Cet axe est une droite perpendiculaire à la droite reliant les centres des deux cercles. Si les deux cercles sont sécants, leur axe radical est la droite passant par les deux points d'intersection. Si les deux cercles sont tangents en un point, leur axe radical est la tangente commune qui les sépare.
Dans le cas de deux cercles non sécants, l'axe radical, est aussi l'ensemble des points desquels on peut mener des segments tangents de même longueur vers les deux cercles. S'ils sont sécants, seuls les segments de droites non inclus dans les cercles vérifient cette propriété. L'axe radical de deux cercles dont l'un est intérieur à l'autre sera donc à l'extérieur de ceux-ci.
Théorème des axes radicaux : soit trois cercles définissant trois axes radicaux. Leurs trois axes sont soient confondus, soit parallèles soit concourants.
Quand les trois axes radicaux sont concourants (trois cercles non alignés), ils définissent un point appelé centre radical des cercles. Quand les trois axes sont parallèles, c'est que les centres sont alignés et les cercles forment alors un faisceau de cercles.

RELATIONS ENTRE LES CERCLES

On définit deux cercles comme orthogonaux si en chacun des deux points d'intersection, les tangentes à l'un et à l'autre sont orthogonales.
En fait, pour des raison de symétrie, il suffit que les tangentes soit orthogonales en un seul des deux points d'intersection pour que cela soit vrai sur le deuxième. On observe que chaque tangente à l'un des cercles passe par le centre de l'autre cercle.
Par ailleurs, le triangle formé par les deux centres et l'un des points d'intersection est un triangle rectangle en ce point. Soit A ce point et O et R et O' et R', respectivement les deux centres et les deux rayons des cercles, on vérifie donc le théorème de Pythagore sur ce triangle :
$OO'^2 = AO^2 + AO'^2$ soit
$OO'^2 = R^2 + R'^2$
Quand les centres de plusieurs cercles sont alignés sur une même droite, l'ensemble des cercles considérés constitue ce que l'on appelle un faisceau de cercles.
Lorsque les cercles d'un faisceau se coupent en deux points, la droite reliant les centres de ces cercles est la médiatrice du segment reliant les deux points d'intersection. Ces deux points sont appelés points de base.
Les cercles constituent un faisceau de cercles tangents lorsqu'ils sont tangents en un point situé sur l'axe radical.
• Faisceau à points limites : soit un cercle C quelconque et une droite D quelconque mais non sécants. La projection du centre O de C sur D définit le point K. Une tangente à C passant par K défini le point T sur le cercle. Si l'on trace un cercle de centre K passant par T, il coupe OK en U et V. L'ensemble des cercles admettant D comme axe radical correspond à l'ensemble des cercles dont les extrémités d'un diamètre coupent harmoniquement le segment UV. Ces cercles forment un faisceau à points limites déterminé par C et D.

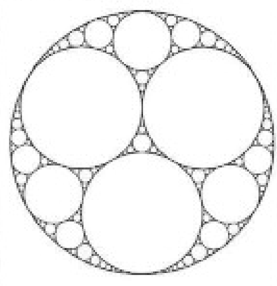


• Faisceaux orthogonaux : soit C et C1, deux cercles non concentriques. Il existe une infinité de cercles G orthogonaux à C et C1. Tous ces cercles sont orthogonaux à tous les cercles du faisceau déterminé par C et C1. L'axe radical d'un des faisceaux est la droite des centres de l'autre. Si l'un des faisceaux est formé de cercles tangents, il en est de même de l'autre. Sinon si l'un des faisceaux est à points de base, l'autre est à point limites, et il y a identité entre ces couples de points.

Tangence et constructions particulières

Théorème de Descartes et cercles de Soddy
Le théorème de Descartes établit la relation entre quatre cercles tangents. Plus exactement, il permet de connaître le rayon (voire la position du centre) d'un cercle tangent à trois autres cercles tangents entre eux. L'équation accepte deux réponses. L'une correspond à un cercle plus petit coincé entres les trois autres, la seconde correspond à un cercle plus grand que les trois autres et qui les englobe.
Descartes le décrit en 1646 et Soddy le redécouvrira en 1936. C'est pourquoi on appelle souvent cette construction cercles de Soddy.

Cercles d'Apollonius



Avant Descartes et Soddy, Appolonius de Perga avait déjà découvert de manière empirique cette construction. Ainsi, il construisait un fractal engendré à partir de trois cercles dont deux au moins de ceux-ci sont tangents à un troisième. Il découvrit qu'il existait deux cercles tangents aux trois premiers et que l'on pouvait continuer ainsi la construction, les deux nouveaux cercles ayant eux-mêmes leurs cercles d'Apollonius.

Quelques propriétés amusantes

De nombreuses relations ont été mises en évidence entre les cercles, leurs surfaces et leurs points d'intersections. En voici quelques exemples amusants et parfois étonnants.

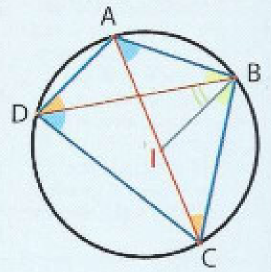
Cercles concentriques
Prenons cinq cercles concentriques de rayon respectifs 1, 2, 3, 4 et 5. La surface couverte par le cercle 3 est égale à la surface comprise entre le cercle de rayon 4 et le cercle de rayon 5. En effet, si on compare les aires cela donne :
$\pi 3^2 = \pi 5^2 - \pi 4^2$

Théorème de Johnson (1916)
Si trois cercles de même rayon r sont concourants en un point P, alors leurs trois autres points d'intersection appartiennent à un cercle de même rayon r. La démonstration peut se faire grâce à la géométrie dans l'espace en montrant que les points d'intersection des cercles et les centres des cercles forment sept sommets d'un cube et que le cercle passant par les points d'intersection est un cercle circonscrit à ce cube. Son rayon est donc bien r aussi.

LE THÉORÈME DE PTOLÉMÉE

Claude Ptolémée (85-165) est un mathématicien, astronome et géographe grec. Son livre phare, l'*Almageste* aussi intitulé grande syntaxe mathématique contient l'ensemble des connaissances astronomiques de l'époque et va dominer l'astronomie jusqu'à Copernic (1543).
Le théorème de Ptolémée permet de démontrer qu'un quadrilatère convexe est inscriptible dans un cercle. Cette propriété est vérifiée si et seulement si la somme des produits des côtés opposés est égale au produit des diagonales.
Ainsi, si l'on considère un quadrilatère ABCD, alors on a l'égalité AB x CD + BC x DA = AC x BD.
Ce théorème se démontre grâce au théorème des angles inscrit et des propriétés des triangles semblables.
Démonstration :
Posons I, un point de [AC] tel que les angles ABI et CBD soient égaux.

• Les angles BAC et BDC interceptent la même corde [BC], ils sont donc égaux.
• De même BCA = BDA (arc BA).
• Les triangles CBD et IBA sont donc semblables et on vérifie donc CD/IA= BD/AB d'où (1) AB x CD = IA x BD
• De même, les triangles ABD et IBC étant semblables, on obtient (2) AD x BC = IC x BD
• En faisant la somme de (1) et (2), on a AB x CD + AD x BC = IA x BD + IC x BD ce qui correspond à (IA + IC) x BD soit AC x BD, l'égalité de Ptolémée.



ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DU CERCLE

Le cercle peut être défini par plusieurs types d'équations.
Dans un repère orthonormé, on obtient l'équation cartésienne du cercle suivante :
$y = b \pm \sqrt{r^2-(x-a)^2}$
Cette équation est obtenue en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle formé par le point du cercle et sa projection sur les deux rayons parallèles aux axes.
Pour un cercle unité, cela donne
$x^2 + y^2 = 1$
Les équations paramétriques du cercle sont :
$x = a + r\cos\alpha$
$y = b + r\sin\alpha$
Soit pour le cercle unité :
$x = \cos\alpha$
$y = \sin\alpha$

LE CERCLE, LA RÈGLE ET LE COMPAS

C'est Euclide (IVe-IIIe siècle av. J.-C.) qui fonde les bases de la géométrie qui prendra son nom sur un système d'axiomes. Il pense ainsi qu'il est toujours possible de tracer une droite passant par deux points donnés et qu'il est toujours possible de tracer un cercle de centre donné passant par un point donné. C'est pourquoi la géométrie euclidienne est la géométrie des droites et des cercles et donc de la règle et du compas. Pour Euclide, tout nombre peut être construit avec la règle et le compas. C'est ainsi que l'on va ajouter aux nombres rationnels, une autre catégorie de nombres, constructibles, non rationnels mais résultat d'une équation algébrique, tels que $\sqrt{2}$, la diagonale du carré. On les appelera nombres algébriques. On montrera par la suite que l'on peut même se passer de la règle pour construire tous les nombres rationnels et algébriques connus alors. Jusqu'à ce que l'on comprenne que certains nombres ne sont ni rationnels, ni algébriques et donc non constructibles (voir quadrature du cercle). La construction au compas seul a été étudiée notamment par l'italien Lorenzo Mascheroni. Mais c'est à Napoléon Ier que l'on attribue l'un des problèmes les plus fameux : la construction du centre d'un cercle donné au compas seul.

LA QUADRATURE DU CERCLE

La quadrature du cercle est l'un des grands problèmes mathématiques qui a traversé plusieurs siècles et plusieurs civilisations avant de trouver une réponse claire et démontrée. Le problème consiste à construire un carré de même aire qu'un cercle donné ou de même périmètre et ce à l'aide d'un compas et d'une règle.
Les premières traces de ce problème date de –1650 av. J.-C. Il s'agit d'un texte égyptien, le Papyrus Rhind écrit par le scribe Ahmès. Les Grecs dont notamment Archimède s'attaquent ensuite au problème en pensant l'avoir résolu, mais en fait ils ne font que trouver de bonnes approximations.
Tout au long du développement des mathématiques occidentales, le problème reste sans solution. De nombreux mathématiciens ont proposé des solutions, mais elles ont toujours été réfutées par leurs collègues. En 1837, Pierre-Laurent Wantzel établit un théorème qui exprime la forme des équations des problèmes impossibles à résoudre à la règle et au compas. Mais, il faudra attendre l'allemand Ferdinand von Lindemann, en 1882, pour l'appliquer à la quadrature du cercle et pour démontrer que ce problème est impossible à résoudre en raison de la transcendance de π. La transcendance d'un nombre est le fait qu'il ne soit pas algébrique. Or on ne peut construire avec la règle et le compas que des nombres algébriques.