Chapitre 9

Les colorations de Pólya

9.1 Groupes de permutations

Permutations : de l'intuitif au formalisme

On permute cinq objets appelés a, b, c, d et e.

avant permutation	$\boxed{a}$	$\boxed{b}$	$\boxed{c}$	$\boxed{d}$	$\boxed{e}$
après permutation	$\boxed{b}$	$\boxed{a}$	$\boxed{e}$	$\boxed{d}$	$\boxed{c}$

On voit que l'objet $\boxed{a}$ quitte la première position pour aller en deuxième position. Les autres objets vont aussi bouger (même s'il se trouve que $\boxed{d}$ reste à la même place).

Symboliquement, on peut représenter le déplacement ainsi.

$$\begin{array}{lccccccc} \text{position d'un objet avant le déplacement} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \sigma \\ \text{position du même objet après le déplacement} & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & \end{array}$$

On voit qu'une permutation de 5 objets est une *fonction bijective* d'un ensemble de 5 objets dans lui-même. Les mathématiciens utilisent une notation encore meilleure en représentant la permutation σ de la manière suivante.

$$\sigma = (12)(35)(4)$$

L'ensemble de toutes les permutations de 5 objets est appelé $\mathrm{Sym}(5)$ ou S_5. Lorsqu'il y a n objets, on note $\mathrm{Sym}(n)$ ou S_n (on dit « Symétrique n »).

Composition de permutations

Mathématiquement parlant, composer deux permutations revient à faire une permutation, puis une deuxième. Pour voir ce qu'il se passe, superposons deux permutations σ_1 et σ_2.

$$\begin{array}{lccccccc} \text{position d'un objet avant la permutation} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \sigma_1 \\ \text{position du même objet après la première permutation} & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \sigma_2 \\ \text{position du même objet après la deuxième permutation} & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 & \end{array}$$

On voit que la permutation composée est

position d'un objet avant la permutation	1	2	3	4	5	
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\sigma_2 \circ \sigma_1$
position du même objet après les deux permutations	3	5	1	2	4	

C'est en fait une composition de fonctions [1] (d'où la notation $\sigma_2 \circ \sigma_1$).
Quand on travaille avec des permutations, on omet le symbole $\circ$ et on a

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_2 \, \sigma_1 = (15)(234) \circ (12)(35)(4) = (15)(234)(12)(35)(4) = (13)(254)$$

Lorsque l'on compose des permutations, il faut lire de droite à gauche (à cause de la composition de fonctions).

Vocabulaire

1. Dans $\mathrm{Sym}(n)$, la permutation $(1)(2)(3)\cdots(n)$ est appelée id (comme *identité*).
2. Dans une permutation σ écrite en notation simplifiée, une parenthèse contenant n objets est appelée un *n-cycle.*
3. Si une permutation σ est écrite en notation simplifiée et qu'aucun nombre n'apparaît plusieurs fois, on dit que la permutation σ est écrite *en produit de cycles disjoints.*
4. Le *type* d'une permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ est défini par

$$(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

   où t_i est le nombre de i-cycles dans la permutation lorsqu'elle est écrite en produit de cycles disjoints.

Remarque On n'est pas obligé d'écrire les 1-cycles.

Formule intéressante

Si $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est le type d'une permutation, alors on a la formule évidente suivante.

$$t_1 + 2t_2 + 3t_3 + \cdots + nt_n = n$$

1. Rappelons que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. On applique la fonction f à l'élément x, puis la fonction g à l'élément $f(x)$ résultant de la première opération.

9.2 Groupes

Les permutations forment ce qu'on appelle aujourd'hui un groupe.

Définition

Un *groupe* est un ensemble G muni d'une opération, appelée *loi de composition* et notée ici $\star$, qui satisfait les propriétés suivantes.

1. Pour chaque paire d'éléments de G, notés g_1 et g_2, il existe un unique élément $g_1 \star g_2$.
2. Quelque soit g_1, g_2 et g_3 dans G, on a $(g_1 \star g_2) \star g_3 = g_1 \star (g_2 \star g_3)$.
3. Il existe un élément spécial de G, appelé *neutre* et noté e tel que $g \star e = e \star g = g$.
4. Pour chaque $g \in G$, il existe un inverse, noté g^{-1} tel que $g \star g^{-1} = g^{-1} \star g = e$.

Exemples de groupes

1. Les nombres entiers $\mathbb{Z}$, les nombres rationnels $\mathbb{Q}$, les nombres réels $\mathbb{R}$ et les nombres complexes $\mathbb{C}$ sont tous des groupes dont la loi de composition est l'addition. Le neutre est le zéro et les inverses sont les opposés.
2. Les fonctions réelles bijectives, dont le domaine de définition et le domaine d'arrivée sont $\mathbb{R}$, forment un groupe dont la loi de composition est la composition de fonctions. Le neutre est l'application $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto x$. Les inverses sont les fonctions réciproques (c'est pour cette raison que les fonctions ont besoin d'être bijectives).
3. Les permutations de n éléments, noté $\mathrm{Sym}(n)$, forment un groupe à $n!$ éléments pour lequel la loi de composition est la composition (de fonctions).
4. On découvrira en exercices les groupes de rotations et de symétries des polygones à n côtés (appelés aussi n-gones) et les groupes de rotation des cinq solides platoniciens.

9.3 Les actions de groupes

Une action d'un groupe G sur un ensemble E est une application

$$\begin{array}{ccc} G \times E & \longrightarrow & E \\ (g; x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

qui satisfait les propriétés suivantes.

$$e \cdot x = x \text{ pour tout } x \in E \text{ } (e \text{ est l'élément neutre de } G)$$

$$g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x \text{ pour tout } g, h \in G \text{ et } x \in E$$

Exemples d'actions de groupes

1. Le groupe multiplicatif $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ agit sur les vecteurs du plan par multiplication.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (\lambda; \vec{v}) & \longmapsto & \lambda\vec{v} \end{array}$$

2. Les groupes de rotations et de symétries agissent sur les ensembles dont ils sont le groupe de rotations et de symétries.

Définitions

Lorsqu'on a une action d'un groupe G sur un ensemble E, on peut définir deux ensembles.

1. Soit $x \in E$. L'*orbite de x* est l'ensemble

$$\mathrm{Orb}(x) = \{g \cdot x : g \in G\}$$

2. Soit $g \in G$. L'*ensemble des points fixes par g* est l'ensemble

$$\mathrm{Fix}(g) = \{x \in E : g \cdot x = x\}$$

Remarques fondamentales

1. Lorsqu'un groupe G agit sur un ensemble E, chaque élément g de G permute les éléments de E.

   En effet, une action associe à chaque $g \in G$, une bijection de E dans E.

2. Les orbites partitionnent l'ensemble E (en d'autres termes les orbites sont des ensembles disjoints dont la réunion est l'ensemble E).

Notation

Si E est un ensemble, on note $|E|$ le nombre de ses éléments.

Théorème de Burnside (sans preuve)

La moyenne du nombre de points fixes est égale au nombre d'orbites n de l'action.

Autrement dit :

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$

9.4 Les théorèmes de Pólya

L'indicateur des cycles

On considère un ensemble E à m éléments sur lequel un groupe G agit. Par cette action, chaque élément g de G permute les éléments de E avec une permutation de type $(t_1, t_2, \ldots, t_m)$.

On peut ainsi définir l'*indicateur des cycles* de cette action de la manière suivante.

$$\mathcal{Z}(z_1, z_2, \ldots, z_m) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} z_1^{t_1} z_2^{t_2} \cdots z_m^{t_m}$$

Le théorème de Pólya 1

Le nombre de colorations inéquivalentes d'un ensemble E de m objets (sous l'action d'un groupe G) à l'aide de k couleurs est $\mathcal{Z}(k, \ldots, k)$.

Le théorème de Pólya 2

On cherche à colorier un ensemble E de m objets (sous l'action d'un groupe G) à l'aide de k couleurs.

Le coefficient $x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_k^{j_k}$ du polynôme

$$\mathcal{Z}(\ x_1 + x_2 + \cdots + x_k\ ,\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2\ ,\ \ldots\ ,\ x_1^m + x_2^m + \cdots + x_k^m\ )$$

est égal au nombre de colorations inéquivalentes de E qui utilisent j_1 fois la couleur x_1, j_2 fois la couleur x_2, ..., et j_k fois la couleur x_k.

Preuve du théorème de Pólya 1

On considère l'ensemble[2] C de toutes les colorations de E. L'action de groupe de G sur l'ensemble E induit une action de groupe de G sur l'ensemble C dont le nombre de colorations inéquivalentes est exactement le nombre d'orbites de cette action.

Par la formule de Burnside, le nombre d'orbites cherché est égal à

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$

Or, $\mathrm{Fix}(g)$ est l'ensemble des colorations de E qui sont fixes par l'élément $g \in G$. Une coloration est fixe si et seulement si dans chaque cycle de g, les éléments de E ont la même couleur. Par conséquent, si on note $(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ le type de la permutation de g, l'ensemble $\mathrm{Fix}(g)$ contient exactement $k^{t_1+t_2+\cdots+t_m} = k^{t_1} k^{t_2} \cdots k^{t_m}$ éléments (on a k choix de couleurs pour chaque cycle).

Ainsi le nombre de colorations inéquivalentes est

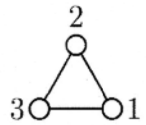
$$\mathcal{Z}(k, \ldots, k) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} k^{t_1} k^{t_2} \cdots k^{t_m}$$

$\square$

2. Il s'agit de l'ensemble des applications de E dans $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$. Chacune de ces applications assigne à un élément de E, une couleur représentée par un nombre.

Exemple

On a deux sortes de perles : les blanches et les noires. On cherche le nombre de colliers à trois perles que l'on peut construire. Afin de faire apparaître un groupe de symétrie pour représenter les différents mouvements que l'on peut faire subir à un tel collier, on le représente à l'aide d'un triangle régulier dont les sommets sont les perles.



L'action du groupe de rotations et de symétries du triangle sur ses sommets permet de tenir compte des colorations inéquivalentes des perles.

Établissons l'indicateur des cycles de cette action.

Élément du groupe	permutation associée	type de la permutation
identité	id	$(3;0;0)$
rotation de $\frac{2\pi}{3}$	(123)	$(0;0;1)$
rotation de $\frac{4\pi}{3}$	(132)	$(0;0;1)$
symétrie de sommet 1	(23)	$(1;1;0)$
symétrie de sommet 2	(13)	$(1;1;0)$
symétrie de sommet 3	(12)	$(1;1;0)$

Ainsi, l'indicateur est

$$\mathcal{Z}(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} z_1^{t_1} z_2^{t_2} z_3^{t_3} = \frac{1}{6}\left(z_1^3 + 2z_3 + 3z_1z_2\right)$$

Astuce : il y a deux moyens pour vérifier que l'indicateur n'a pas l'air d'être faux.

1. La somme des coefficients de chaque monôme doit faire $|G|$ (car $Z(1,\dots,1) = 1$). Ici : $1+2+3=6$.
2. On retrouve la formule $t_1 + 2t_2 + 3t_3 + \cdots + mt_m = m$ concernant le type de chaque permutation sur chaque monôme. Ici, on a bien $1\cdot 3 = 3$ pour z_1^3, $3\cdot 1 = 3$ pour z_3^1 et $1\cdot 1 + 2\cdot 1 = 3$ pour $z_1^1 z_2^1$.

Par Pólya 1, le nombre de colorations à deux couleurs est donné par

$$\mathcal{Z}(2,2,2) = \frac{1}{6}\big(2^3 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2\cdot 2\big) = \frac{1}{6}\cdot 24 = 4$$

En appliquant Pólya 2, on établit l'inventaire des figures.

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(x_1+x_2, x_1^2+x_2^2, x_1^3+x_2^3) &= \tfrac{1}{6}\big((x_1+x_2)^3 + 2(x_1^3+x_2^3) + 3(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)\big)\\ &= \cdots = x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3\end{aligned}$$

Si x_1 correspond aux perles blanches et x_2 aux perles noires. On lit sur l'inventaire des figures qu'il y a 1 collier avec 3 perles blanches et 0 perles noires, 1 collier avec 2 perles blanches et 1 perles noires, 1 collier avec 1 perles blanches et 2 perles noires et 1 collier avec 0 perles blanches et 3 perles noires.