Combinatoire

Nous allons étudier le dénombrement. Le dénombrement consiste à compter le nombre de scénarios possibles dans différentes situations. Le premier concept à maitriser, **c'est l'ordre**. Est-ce que l'ordre compte ? ou ne compte pas ? Vous prenez un scénario de réponse et vous permutez deux éléments, si le résultat obtenu est le même, cela signifie que l'ordre ne compte pas, sinon l'ordre compte.

► **Exemple :** Si vous devez choisir un comité de 3 personnes A,B,C dans un groupe de 100 personnes, l'ordre ne compte pas. En effet les comités A,B,C ou A,C,B sont identiques. Nous verrons que dans cet exemple, nous avons $161'700$ manières de choisir 3 personnes parmi 100 personnes disponibles. Par contre, si vous devez choisir un comité de 3 personnes avec un président, un vice-président et un secrétaire parmi vos 100 personnes, alors, dans ce cas, l'ordre compte, car si nous avons 3 mêmes personnes avec des fonctions différentes, nous avons des scénarios différents ! Nous verrons que dans cet exemple, nous avons $970'200$ manières de former notre comité.

10.1 Factorielle et coefficients binomiaux

► **Définition** Le symbole $n!$ (lire «n factorielle») est une simplification d'écriture qui représente le produit des entiers positifs entre 1 et n

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

On peut définir $n!$ de manière récursive :$1! = 1$et $n! = n \cdot (n-1)!$. De plus, $0! = 1$.

► **Exemples :**

$$2! = 2 \qquad 3! = 6 \qquad 4! = 24 \qquad 5! = 120 \qquad 6! = 720 \qquad \frac{8!}{6!} = 56$$

► **Définition** Le symbole $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ avec n et k des entiers positifs (avec $k \leqslant n$) est définit par :

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

On appelle ce nombre $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ **coefficient binomial**, car il apparaît de le développement de $(a+b)^n$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k$$

► **Exemples :**

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \qquad \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} = 120 \qquad \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = 120 \qquad \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \end{pmatrix} = 1$$

En ordonnant les coefficients du développement de $(a+b)^n$, on forme **le triangle de Pascal**. Les coefficients obtenus sont justement les coefficients binomiaux. Ce triangle admet des propriétés intéressantes :

a. Le premier et dernier nombre de chaque ligne vaut toujours 1 . La raison est la suivante :

$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$$

b. Le triangle est symétrique, c'est-à-dire

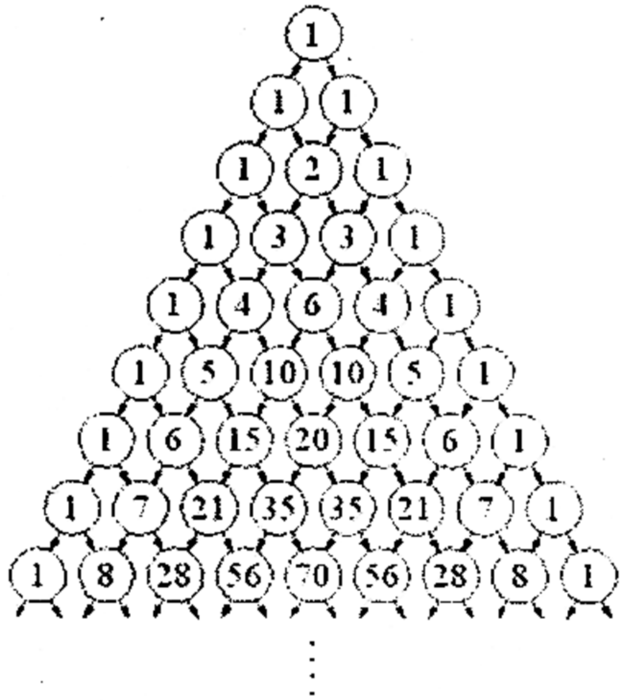
$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$$

c. Le total d'une ligne vaut :

$$\binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

d. Pour construire une nouvelle ligne, il suffit de faire la somme des coefficients situés juste au dessus, sur la ligne précédente. Il s'en suit que

$$\binom{k}{l} + \binom{k}{l+1} = \binom{k+1}{l+1}$$



► **Exemples :**

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

10.2 Permutations

On utilise les permutations lorsqu'on souhaite différencier deux scénarios identiques mais dont l'ordre diffère.

a. Permutations simples

Une permutation simple P_n de n objets différents représente les nombre de groupements que l'on peut former en rangeant ces n objets de toutes les manières possibles. Deux permutations simples diffèrent par **l'ordre des objets.**

► **Exemples :**

a) Pour trouver une formule nous permettant de calculer P_n, imaginons le petit problème suivant : On considère n lettres différentes $a_1, a_2, \cdots, a_n$ .Quel est le nombre total de « mots » à n lettres que l'on peut écrire en permutant ces lettres ?

Liste des permutations de 2 lettres (a et b), 3 lettres (a, b et c) et 4 lettres (a, b, c et d) :

{a,b}, {b,a}

{a,b,c}, {a,c,b}, {b,a,c}, {b,c,a}, {c,a,b}, {c,b,a}

{a,b,c,d}, {a,b,d,c}, {a,c,b,d}, {a,c,d,b}, {a,d,b,c}, {a,d,c,b},
{b,a,c,d}, {b,a,d,c}, {b,c,a,d}, {b,c,d,a}, {b,d,a,c}, {b,d,c,a},
{c,a,b,d}, {c,a,d,b}, {c,b,a,d}, {c,b,d,a}, {c,d,a,b}, {c,d,b,a},
{d,a,b,c}, {d,a,c,b}, {d,b,a,c}, {d,b,c,a}, {d,c,a,b}, {d,c,b,a}.

On constate que P_n le nombre de permutations de n objets satisfait la formule suivante :

$$\boxed{P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

b) De combien de manière peut-on asseoir 7 personnes sur 7 chaises ?
Solution : $P_7 = 7! = 5040$ manières.

b. Permutations avec répétitions

> **Une permutation avec répétitions $\bar{P}_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)}$ de n objets différents dont n_1 sont semblables, n_2 sont semblables,$\cdots$, n_k sont semblables**, représente les nombre de groupements que l'on peut former en rangeant ces n objets de toutes les manières possibles.

► **Exemples :**

a) Pour trouver une formule nous permettant de calculer $\bar{P}_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)}$, imaginons le petit problème suivant : Supposons qu'on a à disposition 5 lettres, 3 lettres a et deux lettres b. Combien de mots différents peut-on écrire avec ces 5 lettres ?

Prenons le mot {a.a.a.b.b}. Supposons que nous voulons reformer tous les mots {a.a.a.b.b} en différenciant les « a ». On obtient alors les 6 mots suivants :

$$\{a_1, a_2, a_3, b, b\} \quad \{a_1, a_3, a_2, b, b\} \quad \{a_2, a_1, a_3, b, b\}$$

$$\{a_2, a_3, a_2, b, b\} \quad \{a_3, a_1, a_2, b, b\} \quad \{a_2, a_2, a_1, b, b\}$$

Comme $a_1 = a_2 = a_3 = a$, ces 6 mots veulent dire la même chose.et donc dans les $P_5 = 5!$ possibilités, on compte $P_3 = 3!$ possibilités pour écrire le mot {a.a.a.b.b}. En procédant de la même manière avec b, on remarque que dans les $P_5 = 5!$ possibilités, on compte $P_2 = 2!$ possibilités pour écrire le mot {a.a.a,b.b}. Au total, on a $\bar{P}_{(3,2)} = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ mots différents
En généralisant on obtient

$$\boxed{\bar{P}_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)} = \frac{P_n}{P_{n_1} \cdot P_{n_2} \cdot \ldots \cdot P_{n_3}} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}}$$

b) Il y a $\bar{P}_{(1,2,3)} = \dfrac{6!}{2! \cdot 3!} = 60$ nombres de six chiffres formés de {2.4.4.4.5.5}

10.3 Arrangements

On utilise les arrangements lorsqu'on souhaite différencier deux scénarios de k objets parmi n ($k \leq n$) identiques mais dont l'ordre diffère.

a. Arrangements simples

> On parle **d'arrangements simples A_n^k**, lorsque l'on considère k objets parmi n ($k \leq n$) . Deux arrangements diffèrent **par la nature ou l'ordre des objets.**

► **Exemples :**

a) Pour trouver une formule nous permettant de calculer A_n^k , considérons le petit problème suivant : On considère n lettres différentes $a_1, a_2, \cdots, a_n$ Cherchons

i) Le nombre de mots avec une lettre. Il y a n mots avec une lettre .

ii) Le nombre de mots avec deux lettres. Il y a $n(n-1)$ mots avec deux lettres.

iii) Le nombre de mots avec trois lettres. Il y a $n(n-1)(n-2)$ mots avec trois lettres.

iv) Le nombre de mots avec k lettres. Il y a $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ mots avec k lettres.

On définit le nombre d'arrangement A_n^k $(k \leq n)$ ainsi

$$
\begin{aligned}
A_n^k &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!}
\end{aligned}
$$

b) Combien de drapeaux de 3 couleurs peut-on former avec les 7 couleurs de l'arc-en-ciel ?
On peut former $A_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$ drapeaux différents.

c) Combien de comité de 3 personnes avec un président, un vice-président et un secrétaire pouvez-vous former dans un groupe de 100 personnes ?
On peut former $A_3^{100} = \frac{100!}{97!} = 98 \cdot 99 \cdot 100 = 970'200$ comités différents.

b. **Arrangements avec répétitions**

Lorsque parmi n objets discernables, nous voulons placer des objets dans k emplacements en **tenant compte de l'ordre**, ces objets pouvant apparaître plusieurs fois, on parle **d'arrangement avec répétition $\overline{A_k^n}$ de n éléments pris k à k**

► **Exemples :**

a) Pour trouver une formule nous permettant de calculer $\overline{A_k^n}$, considérons le petit problème suivant : Supposons qu'une urne contient 4 boules différentes et que l'on tire successivement 3 boules, avec remise. Quel est le nombre de tirage possible ?

Au premier tirage, il y a 4 possibilités.

Au second tirage, il y a 4 possibilités.

Au dernier tirage, il y a 4 possibilités.

Au total, on a $4^3 = 216$ possibilités. Ce nombre correspond au nombre d'arrangements avec répétitions de 3 éléments pris 4 à 4.

De manière générale, $\overline{A_k^n} = n^k$ représente le nombre d'arrangements avec répétitions de n éléments pris k à k.

b) Au Sport Toto, nous avons 13 matchs où il peut y avoir : victoire/nul/défaite. Combien de pronostiques différents y a-t-il ? Au premier match, il y a 3 possibilités. Au second match, il y a 3 possibilités. Au 13ème match, il y a 3 possibilités. Au total, il y a $\overline{A_{13}^3} = 3^{13} = 1'594'323$ possibilités.

10.4 Combinaisons

On utilise les combinaisons lorsqu'on souhaite différencier deux scénarios sans tenir compte de l'ordre.

On appelle **combinaisons C_k^n** de n objets pris k à k, tous les groupements que l'on peut former avec k objets. Deux combinaisons **diffèrent par la nature des objets. L'ordre des objets n'est pas considéré.**

► **Exemples :**

a. Pour trouver une formule nous permettant de calculer C_k^n , considérons le petit problème suivant : On a 20 chevaux $c_1, c_2 \cdots c_{20}$. On doit désigner les 3 premiers. Quel est le nombre de liste possibles ?

a) Dans l'ordre, il y a $A_3^{20} = \frac{20!}{17!} = 6'840$ solutions.

b) Dans le désordre, il faut imaginer qu'avec 3 chevaux c_1, c_2 et c_3, on a $3!$ possibilités d'ordre différents. Autrement dit,

$$\{c_1, c_2, c_3\} \quad \{c_1, c_3, c_2\} \quad \{c_2, c_1, c_3\} \quad \{c_2, c_3, c_2\} \quad \{c_3, c_1, c_2\} \quad \{c_2, c_2, c_1\}$$

sont des solutions dont on ne fait pas la distinction. On obtient donc

$$C_3^{20} = \frac{A_3^{20}}{3!} = \frac{6'840}{6} = \binom{20}{3} = 1'140 \text{ solutions}$$

$$\boxed{\text{De manière générale, } C_k^n = \frac{A_k^n}{k!} = \binom{n}{k}}$$

b. Dans une classe de 21 élèves, on choisit une délégation de 3 élèves. Combien de délégations différentes peut-on former ? On peut former $C_3^{21} = 1'330$ délégations différentes.

c. Au loto, il y a $C_6^{45} = 8'145'060$ grilles différentes.

d. Si vous devez choisir un comité de 3 personnes A, B, C dans un groupe de 100 personnes, vous pouvez former $C_3^{100} = 161'700$ comités différents.