Cônes et cylindres

DES CÔNES ET DES CYLINDRES TOUT AUTOUR DE NOUS

Au quotidien, nous sommes entourés de cylindres et de cônes. Ainsi, nous admirons leur régularité lorsque nous contemplons les colonnes antiques ou nous utilisons leur espace intérieur en mangeant une glace en cornet. Il est parfois très utile de pouvoir manipuler ces objets, par exemple pour calculer la surface occupée au sol par une tour

ou le volume de blé que l'on peut stocker dans un ***silo***.

LES CYLINDRES

CYLINDRE USUEL

Lorsqu'on imagine un cylindre, il peut nous venir à l'esprit le côté pratique des boîtes de conserves facilement empilables, ou bien l'élégance des ***colonnes*** des

bâtiments antiques. La boîte de conserve comme la colonne est ce que l'on appelle un cylindre droit de révolution : deux disques parallèles formant la base du cylindre sont reliés par une surface latérale perpendiculaire au plan du disque. Pour réaliser de nombreux calculs aussi bien théoriques qu'appliqués, il peut être nécessaire de connaître l'aire et la surface d'un cylindre droit de révolution. Si l'on appelle R le rayon (et D le diamètre) du cercle formant la base du cylindre et H sa hauteur, on peut exprimer l'aire de la surface latérale du cylindre de la manière suivante :

$A_L = 2\pi RH = \pi DH$

Cette formule peut être facilement retrouvée si on l'a oubliée : en effet, A_L est égale à la hauteur du cylindre (H) multipliée par le périmètre du cercle de base ($2\pi R$). L'expression de l'aire de la surface latérale peut par exemple servir à calculer l'aire d'une étiquette collée sur une boîte de conserve. Pour connaître l'aire totale du cylindre, il suffit ensuite d'ajouter l'aire des deux bases à l'aire latérale. Or les bases sont des cercles et leur aire vaut $A_B = \pi R^2 = \pi(D^2/4)$

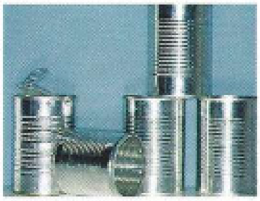
L'aire totale A du cylindre est donc donnée par la formule :

$A = 2\,A_B + A_L$

$A = 2\pi R^2 + 2\pi RH$

$A = 2\pi(D^2/4) + \pi DH$

Cette formule permet, par exemple, de calculer quelle est la quantité de métal nécessaire à la réalisation



d'une ***boîte de conserve***. Outre l'aire du cylindre, on peut avoir besoin de calculer son volume intérieur. En gardant les mêmes notations que pour le calcul de l'aire, le volume V du cylindre est donné par l'expression :

$V = \pi R^2 H = \pi(D^2/4)H$

Cette formule exprime simplement le fait que le volume est égal à l'aire de la base multipliée par la hauteur du cylindre. Il est intéressant de noter deux propriétés des formules exprimant l'aire et le volume du cylindre :

- Pour un volume V fixé, le cylindre qui présente la surface la plus petite est celui dont H = 2R. En d'autres termes, pour réaliser un cylindre avec le moins de matière première possible, il faut que celui-ci ait une hauteur égale au diamètre de la base.
- De la même façon, pour une aire A du cylindre fixée, on obtient le volume le plus grand lorsque la hauteur du cylindre est égale au diamètre, c'est-à-dire H = 2R.

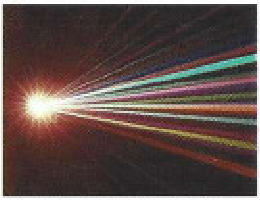
GÉNÉRALISATION

Il est possible de définir un cylindre d'une manière plus large que nous ne l'avons faite jusqu'à maintenant. Tout d'abord, un cylindre n'est pas forcement droit, la caractéristique d'un cylindre droit étant que la direction de sa surface latérale soit perpendiculaire à sa base. Un cylindre qui n'est pas droit serait par exemple une pile d'assiettes que l'on aurait toutes décalées les unes par rapport aux autres de manière régulière. La régularité de ce décalage est ici d'une importance primordiale. Une pile d'assiettes décalées non régulièrement ou plus simplement courbées ne peut pas être appelée cylindre car les droites qui relient les deux bases ne sont pas parallèles. Ensuite, si la base d'un cylindre n'est pas un cercle, alors ce cylindre n'est pas dit de révolution. Ainsi, la base d'un cylindre peut être une ellipse. Dans le cas d'un cylindre qui n'est pas droit ni de révolution, l'aire et le volume se calculent de la même manière que précédemment mais le calcul est un peu plus compliqué. Ainsi, le volume du cylindre est égal au produit de la hauteur et de l'aire de la base : si A est l'aire de la base et H la hauteur du cylindre, alors le volume V du cylindre est V = A x H. Le cylindre peut également être représenté de façon partielle. Dans ce cas on parle de cylindre tronqué et le volume s'obtient grâce à la formule suivante :

$V = \pi R^2(h_1+h_2)/2$

La difficulté est donc de calculer l'aire A de la base, ce qui n'est pas toujours possible de façon mathématique. Si on veut mesurer le volume d'un solide, une solution est de le plonger dans un récipient gradué et de mesurer la différence de volume, qui sera égale au volume du solide immergé. On peut aussi calculer l'aire de la surface latérale du cylindre, qui est égale au produit de la hauteur du cylindre et du périmètre du contour. Ainsi, si P est le périmètre du contour et H la hauteur du cylindre, l'aire latérale A du cylindre est A = H x P.

Une manière encore plus abstraite de définir un cylindre serait d'imaginer un cylindre quelconque qui n'aurait pas de base et qui se prolongerait à l'infini. Une image pertinente de ce cylindre « généralisé » est celle d'un faisceau



de lumière émis par un ***laser*** : ce faisceau garde une taille constante lors de sa propagation qui n'est entravée par aucun obstacle.

La définition la plus large possible d'un cylindre est donc la suivante : un cylindre est généré par une droite (d) qui se déplace dans l'espace « en s'appuyant » sur une courbe fermée (C). La droite (d) est appelée directrice et garde une direction constante au cours de son déplacement suivant le contour (C). Il est important de noter que si l'on « ferme » la surface ainsi formée par deux plans parallèles, on obtient la forme géométrique que nous avons appelée cylindre. La définition générale apporte de nombreux avantages, tels que sa définition par une équation. En effet, si l'on se place dans un repère orthonormé de l'espace, c'est-à-dire un repère aux axes perpendiculaires normés par une même unité, on peut décrire un cylindre par son équation cartésienne :

$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$

Si l'on envisage un cylindre droit de révolution, de rayon 2 centré en l'origine, son équation est $x^2 + y^2 = 4$

Le point de coordonnées (4 ; 0 ; 0) est donc un point de ce cylindre, tout comme celui de coordonnées (√2 ; √2 ; 5). Au contraire, le point de coordonnées (2 ; 3 ; 0) n'appartient pas au cylindre car $2^2 + 3^2 = 12 \neq 4$

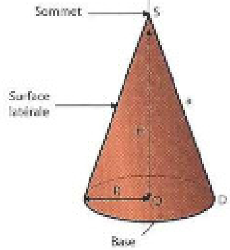
En mathématiques, il est également important de savoir quelles sont les transformations de l'espace qui laissent le cylindre invariant, c'est-à-dire des modifications qui laisseront le cylindre toujours au même endroit, avec les mêmes caractéristiques. Les transformations qui laissent le cylindre invariant sont :

- La translation d'axe z, si le cylindre est d'axe z : un point du cylindre se déplacera vers le haut d'un centimètre si la translation est d'un centimètre.
- La symétrie par rapport à un plan orthogonal – c'est-à-dire perpendiculaire dans l'espace – à une directrice. C'est ce que l'on appelle l'effet miroir : la moitié supérieure du cylindre devient la moitié inférieure, et vice-versa.
- La rotation d'angle quelconque ayant pour centre l'axe du cylindre le laisse invariant si le cylindre est « de révolution ». Cela revient à faire tourner le cylindre selon son axe, comme c'est le cas lors d'une opération de laminage.

LES CÔNES

CÔNE USUEL

Le cône tel qu'on l'entend habituellement est la forme géométrique qu'a un cornet de glace par exemple. Il est donc défini par un sommet et un cercle qui forme sa base. Sa surface latérale est définie par l'ensemble des droites qui relient le sommet à un point du cercle de la base. La particularité du cône est de pouvoir être décrit uniquement par son ouverture et sa hauteur. Pour ce faire, on utilise l'angle solide du cône, noté J. Considérons un cône de sommet S. O est le centre de la base et D un point du cercle formé par la base.



L'angle solide du cône peut s'exprimer en fonction des différents paramètres, en exploitant le fait que le triangle SOD est rectangle en O. Ainsi :

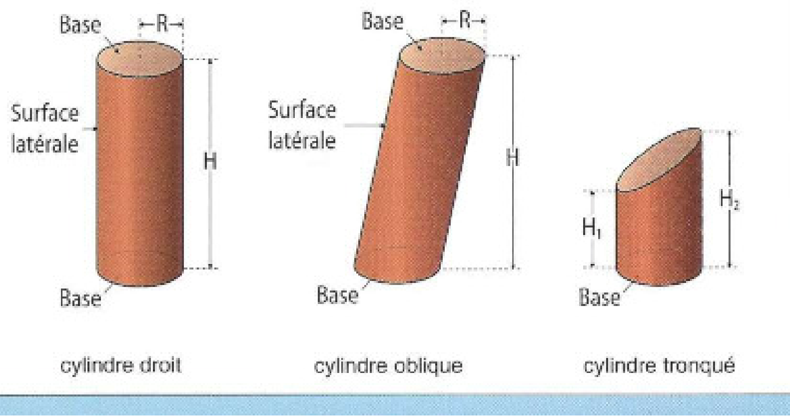
$\cos(J/2) = H/a$

$\sin(J/2) = R/a$

$\tan(J/2) = R/H$

où a = DS, « cos » est le cosinus de l'angle, « sin » son sinus et « tan » sa tangente. Outre l'angle solide J du cône, on peut définir une autre

Quelques cylindres



Mise en perspective

$\pi R^2 H$

Volume du cylindre.

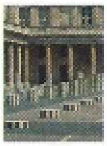
$\pi R^2(h_1+h_2)/2$

Volume du cylindre tronqué

$\pi R^2 H/3$

Volume du cône.

260



Nombre des colonnes de Buren, situées dans le cour d'honneur du Palais Royal, à Paris.

284

Nombre de colonnes sur la place Saint-Pierre, à Rome.

Un cône sombre

Le cône d'ombre de la Terre sur la Lune

responsable des éclipses de Lune

grandeur : l'apothème a. Il s'agit simplement de la longueur d'un segment reliant le sommet au cercle de base. Le théorème de Pythagore permet d'exprimer a. En effet, le triangle SOD est rectangle en O. On a donc $a = \sqrt{(R^2 + H^2)}$.
Grâce à l'utilisation de l'apothème on peut calculer l'aire et le volume du cône tout aussi facilement que pour le cylindre. Si on appelle R le rayon du cercle de base et H la hauteur du cône, l'aire de la base est $A_B = \pi R^2$.
Par ailleurs, l'aire de la surface latérale est $A_L = \pi Ra$.
L'aire totale du cône est donc la somme de l'aire latérale et de l'aire de la base.
$A = A_L + A_B$
$A = \pi Ra + \pi R^2$
$A = \pi R(R+a)$
D'autre part, on peut calculer le volume V du cône en utilisant l'expression suivante :
$V = H(\pi R^2)/3$
Le volume d'un cylindre est donc égal à l'aire de sa base multipliée par π et par la hauteur du cône, le tout étant divisé par trois. La connaissance de ces deux grandeurs, aire et volume, permet de résoudre des problèmes plus complexes. Imaginons une balle de tennis de rayon R. Nous voulons savoir quel est le volume minimal du cône qui

pourra accueillir cette balle. L'hypothèse que nous faisons est que la ***balle de tennis*** est une sphère parfaite et nous voulons que la balle touche les côtés latéraux ainsi que le cercle de base. Notre but est d'obtenir le volume de cône le plus petit possible en ayant fixé R. L'expression de la hauteur du cône qui correspond à un volume intérieur minimum est $H = 4R/3$, le volume du cône étant alors deux fois plus grand que celui de la sphère.

Généralisation

On peut en fait définir un cône de manière plus large : tout d'abord, on peut prolonger « à l'infini » le cône que nous avons étudié précédemment, en ne définissant pas de base qui « limiterait » les côtés. Cette opération peut être réalisée de part et d'autre du sommet : il suffit de prolonger la surface latérale du cône en réalisant une symétrie centrale de centre S.
Mais on peut aller plus loin dans la généralisation d'un cône : sa base peut ne pas être un cercle, ni même être régulière. Ainsi, un cône possédant une base polygonale est une pyramide. Pour différencier les différents types de pyramides réalisées selon leur polygone de base, on parle tour à tour de pyramide à base carrée, rectangulaire, hexagonale... et le sommet de la pyramide se nomme alors l'apex. Lorsqu'au contraire la forme de la base est un cercle, on parle de cône de révolution.
Le seul impératif pour définir un cône est donc que les droites, appelées « génératrices » se coupent en un même point. La définition la plus large que l'on puisse donner d'un cône est donc la suivante : un cône est la réunion de toutes les droites (les génératrices) passant par un même point S (sommet du cône) et rencontrant une même courbe C (sa directrice).
Alors que la définition élargie du cylindre permettait de mettre en équation différents types de cylindres, un cône est facile à mettre en équation à condition qu'il soit de révolution, c'est-à-dire que sa base soit un cercle.
Dans un repère orthonormé (O ; x ; y ; z), l'équation du cône de révolution de rayon 1, centré en O est :
$x^2 + y^2 = z^2 \tan(J/2)$
Pour obtenir un cône dont le centre du cercle de base a pour coordonnées $(x_0 ; y_0)$ et un rayon R, l'équation cartésienne du cône devient :
$(x^2 - x_0^2) + (y^2 - y_0^2) = z^2R^2\tan(J/2)$
Outre le cône lui-même, nous rencontrons également souvent des « troncs de cône » : cette forme géométrique est un cône au sens usuel du terme qui a été « étêté ». Il s'agit de deux cercles de rayons différents R_1 et R_2. La droite qui relie les centres O_1 et O_2 des cercles est perpendiculaire aux rayons. La distance séparant O_1 de O_2 est H. En conséquence, si l'on prolongeait la surface L qui joint ces deux cercles, on obtiendrait un cône de sommet S et de hauteur H+h. C'est cette constatation qui va nous permettre de calculer le volume et l'aire du tronc du cône en imaginant deux cônes imbriqués l'un dans l'autre. Le volume du tronc de cône est donc égal au volume du grand cône C1 moins celui du petit cône C2. On a donc
$V = V1 - V2 = \pi(R_1^2(H+h) - R_2^2h)/3$
$= \pi R_1^2H + \pi R_1^2h - \pi R_2^2h/3$
$= \pi(R_1^2H + h(R_1^2 - R_2^2))/3$
On peut par ailleurs calculer l'aire totale du tronc de cône en additionnant l'aire de la surface latérale et les aires des deux bases. L'aire de la surface latérale s'obtient de la même façon que le volume du tronc de cône : on calcule les aires de la surface latérale du petit cône et du grand cône à l'aide de la formule générale de l'aire de la surface latérale d'un cône, puis on calcule leur différence. On obtient alors :
$A_L = A_1 - A_2$
$= \pi(R_1\sqrt{(R_1^2 + (H+h))} - R_2\sqrt{(R_2^2 + h^2)})$
Les aires des cercles de base sont respectivement $A_{B1} = \pi R_1^2$ et $A_{B2} = \pi R_2^2$
L'aire totale du cône A, qui représenterait la quantité de papier nécessaire pour recouvrir le tronc de cône est donc :
$A = A_L + A_{B1} + A_{B2} = \pi((R_1\sqrt{(R_1^2 + (H+h)^2)} - R_2^2\sqrt{(R_2^2 + h^2)} + R_1^2 + R_2^2)$
Cette expression lourde n'est presque jamais employée en pratique, puisque l'on additionne les aires des cercles de base, que l'on a calculées au préalable avec l'aire de la surface latérale, calculée à l'aide de la formule que nous avons donnée. La définition élargie d'un cône possède également de nombreuses applications dans des domaines scientifiques très différents tel que l'astronomie ou la physique quantique.

L'angle solide

En astronomie, on peut prédire les éclipses en observant le mouvement des planètes par rapport au soleil. Prenons l'exemple d'une ***éclipse de***

Lune. Ce phénomène spectaculaire se produit lorsque le Soleil, la Terre et la Lune sont alignés dans cet ordre. La Terre projette alors son ombre sur la Lune, en formant une tâche sombre. La Lune est ainsi occultée plus ou moins complètement. On peut représenter la forme de l'ombre de la terre dans l'espace par un cône dont les génératrices seraient tangentes à la terre. Plus généralement, en astronomie, on utilise beaucoup le cône. On peut par exemple représenter des angles dans l'espace, on parle alors d'angle solide. Le but de l'angle solide est de déterminer facilement quelle partie de l'espace peut percevoir un phénomène, comme une éclipse de Soleil. Ainsi, lorsqu'on est dans le cône d'ombre de la Terre, plus on s'éloigne de cette dernière, plus il va falloir être proche de l'axe Soleil-Lune pour que la Terre cache le Soleil. L'angle au sommet J du cône qui a pour sommet la Lune et qui est tangent à la Terre est alors appelé angle solide. On le calcule la plupart du temps en radians. Si la Terre se situe exactement dans ce cône et est alignée avec le Soleil, alors la Lune ne voit plus le Soleil. Une formule mathématique simple permet de relier les radians aux degrés, puisque π radians représentent 90°, c'est-à-dire un angle droit. Dans l'espace, un phénomène visible depuis tout l'espace sera représenté par un angle solide de 4π radians (360°). Si seule la moitié de l'espace peut percevoir ce phénomène, l'angle solide correspondant sera de 2π radians.

Le cône de lumière

En physique quantique, on distingue les éléments qui peuvent communiquer, c'est-à-dire avoir une influence l'un sur l'autre à un même instant, de ceux qui ne peuvent pas communiquer. Ce phénomène est lié au fait qu'il faut un certain temps pour que les informations émises par un élément parviennent à un autre. Ainsi, si une étoile très lointaine meurt, nous ne le saurons que dans des milliers d'années car c'est le temps qu'il faudra pour que la lumière qu'elle a émise avant de mourir ne nous parvienne. Ainsi, lorsqu'on reçoit de la lumière émise par une étoile, on peut savoir quel était son état au moment où elle l'a émise, mais nous ne pouvons rien dire sur l'état actuel de l'étoile, ni même si elle existe encore. Cette différence d'interaction entre des événements peut se représenter dans l'espace-temps par un cône de révolution, droit, mais prolongé à l'infini. Le sommet du cône est l'instant présent, tous les éléments situés à l'intérieur du cône mais en dessous du sommet représentent le passé et ceux situés à l'intérieur du cône et au-dessus du sommet représentent l'avenir. C'est ce que l'on appelle le genre temps. Les génératrices du cône représentent le genre lumière, alors que l'extérieur du cône représente le genre espace, qui ne peut pas communiquer avec l'instant présent.

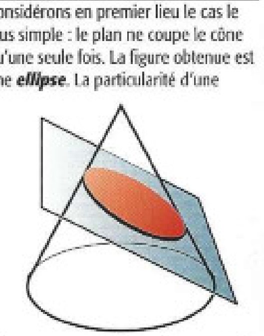
Les coniques

Définition

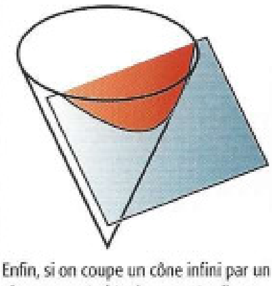
Imaginons maintenant que nous débitons un tronc d'arbre en rondins. Si la machine est bien réglée, les rondins seront des cylindres droits de révolution parfaits. Mais si la machine est imprécise, la section du rondin de bois ne sera plus un cercle mais une ellipse. On peut déterminer toutes les caractéristiques de cette ellipse en fonction du tronc d'arbre initial (son rayon) et de l'angle que fait la lame avec l'arbre quand elle le débite.
Un problème un peu plus complexe est celui de l'intersection d'un cône et d'un plan. Cette question se posa tôt dans l'histoire de l'homme puisque dès l'Antiquité, Apollonius de Perga a étudié en détail la théorie des coniques.
Une conique est l'intersection d'un cône de révolution (infini) et d'un plan. Selon l'angle qu'ils forment, on obtient différentes figures : des ellipses, des paraboles et des hyperboles, qui ont pour caractéristique que tous les points d'une conique se situent à égale distance d'un point, appelé foyer et d'une droite, appelée directrice.

Ellipses, paraboles, hyperboles

Considérons en premier lieu le cas le plus simple : le plan ne coupe le cône qu'une seule fois. La figure obtenue est une ***ellipse***. La particularité d'une



ellipse est que tous les points sont tels que la somme de leur distance à deux points fixes appelés foyers est constante. Il est donc assez facile de tracer une ellipse sur le sol : il suffit de planter deux piquets – les foyers – et d'y attacher une corde. On trace alors une ellipse en tendant la corde avec un troisième piquet, que l'on déplace autour des foyers, en prenant garde que la corde soit toujours tendue. La figure obtenue est un cercle aplati qui, au lieu d'être caractérisé par un unique rayon fait appel à un grand axe et un petit axe. L'aire de l'ellipse varie en fonction de la position et l'inclinaison du plan qui coupe le cône.
L'aire de l'ellipse s'obtient grâce à la relation : $A = \pi ab$. Pour s'en souvenir, on peut faire une analogie avec le cercle, dont l'aire est πR^2. Nous avons vu que l'ellipse est caractérisée par son grand axe a et son petit axe b, brisant la symétrie du cercle, caractérisé par son rayon R. Mais un cercle est un cas particulier de l'ellipse, car si le grand axe et le petit axe ont la même longueur, alors l'ellipse devient un cercle. L'aire de l'ellipse s'obtient donc en remplaçant le rayon R multiplié par lui-même par le produit du grand axe et du petit axe. Lorsque le plan qui coupe le cône est parallèle à un plan tangent au cône, on obtient une ***parabole***.



Enfin, si on coupe un cône infini par un plan, on peut obtenir une autre figure que l'ellipse et la parabole. Ainsi, si le cône est infini dans la direction verticale et que le plan considéré est incliné ou parallèle à l'axe et coupe les deux nappes du cône, alors on obtient une hyperbole.

Conclusion

Les cônes et les cylindres présentent de nombreuses ressemblances de par leur nature mathématique. Néanmoins, leurs différences et propriétés ont été étudiées en détail dès l'Antiquité par Apollonius de Perga qui a élaboré la théorie des coniques.