# Les **coniques**

## UN PEU D'HISTOIRE

Les coniques constituent une famille de courbes géométriques (ellipse, parabole, hyperbole) qui peuvent être définies de plusieurs façons. Les premiers travaux significatifs sur les coniques remontent au IIIe siècle av. J.-C. Ces courbes ont été étudiées par Ménechme en 400 av. J.-C. puis par ***Archimède*** avant d'être très largement décrites par Apollonius de Perga, l'un des trois grands géomètres de l'Antiquité (avec Euclide et Archimède). C'est lui qui a systématisé les connaissances antérieures sur les coniques et qui a nommé les trois types de coniques propres :

• ellipse, du grec *elleipein* : manquer (à noter que le cercle est un cas particulier d'ellipse) ;
• parabole, du grec *parabolé* (para = à coté, ballein = lancer)
• hyperbole, du grec *huperbolé* (huper = au dessus ; ballein = lancer).

Il faut noter qu'Apollonius fut aussi l'un des fondateurs de l'astronomie grecque qui utilisait des modèles géométriques pour expliquer la théorie planétaire. Il faut ensuite attendre le XVIIe siècle pour que les coniques connaissent de nouveaux développements. Les études sont alors menées dans deux directions : avec ***Descartes***, d'une part, qui mit en évidence les équations des coniques et reconnut qu'elles constituaient des courbes du second degré et, d'autre part, avec Pascal et Desargues qui donnèrent une impulsion nouvelle à la géométrie pure en inaugurant l'étude projective des coniques.

Aujourd'hui, les coniques sont définies de façon analytique par une seule et même équation :
$Q(x, y, t) = 0$
On parle alors de quadriques de coordonnées x, y, t. C'est la seule définition qui contienne tous les cas particuliers et elle s'étend en dimension supérieure aux quadriques et hyperquadriques (paraboloïde, hyperboloïde, ellipsoïde qui sont en quelque sorte des paraboles, hyperboles et ellipses en trois dimensions). Au delà de l'aspect mathématique, on rencontre souvent les coniques dans notre vie quotidienne. Les coniques ont passionné les mathématiciens grecs de l'Antiquité et on en trouve de nombreux vestiges dans notre patrimoine : les arènes de Nîmes, dont la forme est elliptique, ou le plafond elliptique de l'abbaye de la Chaise de Dieu en Haute Loire par exemple. Les coniques interviennent beaucoup dans les problèmes de géométrie pure et en mécanique. Elles ont été d'une grande utilité dans de nombreux travaux scientifiques (en astronomie par exemple avec le calcul des orbites des planètes par Kepler) et leurs propriétés sont largement utilisées en sciences et techniques (forme parabolique des antennes TV, miroir parabolique en optique).

## DÉFINITIONS MATHÉMATIQUES

Historiquement, les coniques sont définies à l'aide d'un cône. Il est donc intéressant de rappeler brièvement qu'un cône est une surface définie par une droite, appelée génératrice, passant par un point fixe S (sommet du cone) et un point M décrivant une courbe plane, appelée courbe directrice. Dans le cadre de l'étude des coniques, on s'intéresse plus particulièrement au cône de révolution pour lequel la courbe directrice est un cercle de centre O situé dans le plan perpendiculaire à SO. Ce cône est appelé cône de révolution car il peut être généré simplement par la rotation d'une droite autour d'un axe auquel appartient le point S. Si la droite génératrice fait un angle θ avec l'axe de rotation, on montre facilement que l'équation du cône s'écrit :
$x^2 + y^2 = z^2(\tan\theta)^2$

### Définition géométrique des coniques

La première définition des coniques a été donnée par les Grecs : « *Une conique est une courbe plane définie par l'intersection d'un plan avec un cône de révolution à deux nappes* ». En fonction de l'orientation relative de ces deux objets géométriques, l'intersection du plan avec le cône pourra être :
• un cercle, lorsque le plan est perpendiculaire à l'axe du cône,
• une ellipse, lorsque le plan est incliné par rapport à l'axe du cône et ne coupe qu'une seule des nappes du cône,
• une hyperbole lorsque le plan est incliné ou parallèle à l'axe et coupe les deux nappes du cône,
• une parabole lorsque le plan est parallèle à un plan tangent au cône.
Il existe des cas particuliers et ces définitions historiques, données par les Grecs, peuvent être précisées. On distingue en fait trois types de coniques : les coniques propres (ellipse, hyperbole, parabole), les coniques partiellement dégénérées (cercle et hyperbole équilatère) et les coniques totalement dégénérées (droite ou point).
• Les coniques propres sont obtenues lorsque le plan n'est pas perpendiculaire à l'axe du cône et ne passe pas par son sommet. Il faut alors considérer l'angle d'inclinaison de ce plan par rapport à l'axe du cône :
- si l'angle d'inclinaison du plan est égal à l'angle d'ouverture du cône, on obtient une parabole
- si l'angle d'inclinaison du plan est supérieur à l'angle d'ouverture du cône, on obtient une ellipse ;
- si l'angle d'inclinaison du plan est inférieur à l'angle d'ouverture du cône, on obtient une hyperbole.
• Les coniques partiellement dégénérées :
- dans le cas particulier où le plan est perpendiculaire à l'axe du cône et non confondu avec son sommet, on obtient un cercle ;
- lorsque l'inclinaison du plan est inférieure de 45 ° par rapport à l'angle d'ouverture du cône, on obtient une hyperbole équilatère (hyperbole d'excentricité égale à √2 et dont les asymptotes sont perpendiculaires).
• Les coniques totalement dégénérées :
On parle de coniques complètement dégénérées lorsque le plan contient le sommet du cône. On distingue trois cas :
- le plan contient le sommet du cône et son inclinaison est inférieure à l'angle d'ouverture du cône : on obtient alors des droites sécantes ;
- le plan contient le sommet du cône et son inclinaison est confondue avec l'angle d'ouverture du cône : on obtient alors une seule droite ;
- le plan contient le sommet du cône et son inclinaison est supérieure à l'angle d'ouverture du cône : l'intersection se réduit alors à un point.

### Visualisation des sections coniques

Pour visualiser et comprendre le principe des sections coniques, il suffit de réaliser dans la pénombre une expérience simple à l'aide d'une lampe et d'un abat-jour. La lampe munie de son abat-jour permet de créer un cône de lumière que l'on peut projeter sur un mur. Celui-ci sert alors de plan de coupe pour le cône lumineux. Si toutes les génératrices du cône interceptent le mur, on visualise une ellipse et dans le cas particulier où l'axe du cône est perpendiculaire au mur, on obtient un cercle. Si l'une des génératrices est parallèle au mur le cône de lumière se projette alors en une parabole. Enfin, si des génératrices ne rencontrent pas le mur, de sorte qu'un deuxième cône de lumière intercepte aussi le mur, les deux cônes de lumière permettent de visualiser une hyperbole.

### Définition projective ou monofocale

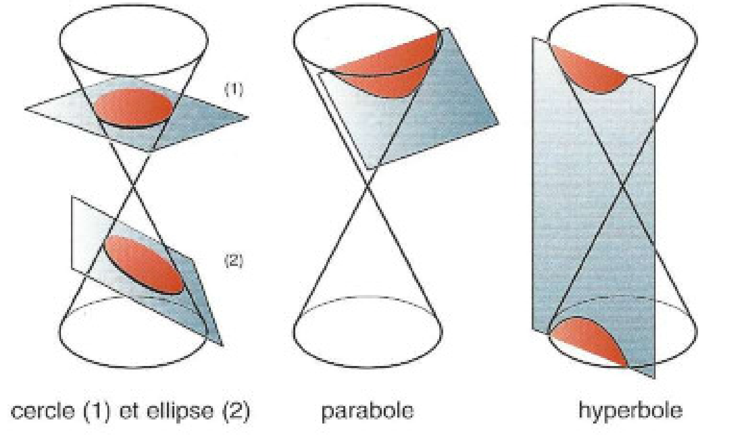
On peut donner une définition géométrique moderne des coniques (à partir des travaux de ***Blaise Pascal*** et de Girard Désargues avec son traité projectif des coniques). On considère alors une droite D du plan, un point F n'appartenant pas à cette droite et un nombre réel e strictement positif. L'ensemble des points M du plan tels que : MF/MH=e où H est le projeté du point M sur la droite D, définit une conique d'excentricité e, de foyer F et de droite directrice D.

MF mesure la distance du point M au point F : c'est la définition monofocale de la conique.
La courbe obtenue dépend de la valeur de l'excentricité e :
- si $e<1$ : ellipse ;
- si $e=1$ : parabole ;
- si $e>1$ : hyperbole.
La droite Δ perpendiculaire à la directrice D et passant par F est un axe de symétrie pour la conique : c'est l'axe focal de la conique.
Remarquons également qu'ellipses et hyperboles possèdent un centre de symétrie : on les appelle donc coniques à centre et on peut en donner une seconde définition géométrique dite définition bifocale.

### Première mise en équation

À partir de cette première définition mathématique on peut proposer une première mise en équation des coniques. Il peut être intéressant de montrer comment on peut expliciter de façon analytique la définition géométrique des coniques. On se place pour cela dans le repère orthonormé particulier de centre F et admettant pour axe des abscisses l'axe perpendiculaire à la droite D (axe focal). On note alors d la distance de F à D. Si (x, y) sont les coordonnées du point M tel que MF/MH = e, on peut écrire dans ce repère particulier :
$MF = \sqrt{(x^2+y^2)}$
$MH = |d-x|$
et donc :
$(MF/MH)^2 = e^2 = (x^2+y^2)/(x-d)^2$
ce qui donne :
$x^2+y^2 = e^2d^2+e^2x^2 - 2de^2x$
en posant p = e.d (p : paramètre de la conique), on obtient :
$(1-e^2)x^2+y^2+2pex-p^2 = 0$
Si $0 < e < 1$ on a une ellipse.

Exemples de sections coniques




cercle (1) et ellipse (2)    parabole    hyperbole

## Quelques grands noms

*Ménechme*
*(380 av. J.-C. 320 av. J.-C.)*
*Premier homme à s'être intéressé aux sections coniques.*

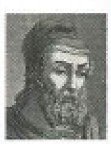
*Apollonius de Perga*
*(262 av. J.-C. 190 av. J.-C.)*
*C'est à lui que nous devons les termes d'ellipse, d'hyperbole et de parabole.*

*Johannes Kepler*

*(1571 - 1630)*
*Astronome, auteur des lois de Kepler. Il a découvert que le mouvement des planètes était elliptique.*

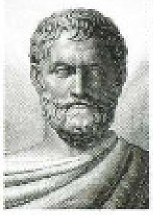
*Blaise Pascal*
*(1623 - 1662)*
*Mathématicien, auteur d'un traité de géométrie projective sur les coniques.*

**Archimède**
Le géomètre **le plus célèbre**



*(287 av. J.-C. 212 av. J.-C.)*
Il s'est intéressé en particulier à l'étude de la parabole.

Si $e = 1$ on a une parabole.
Si $e > 1$ on a une hyperbole.
Cette expression n'est pas la seule équation décrivant une conique. On peut également donner une équation polaire, c'est-à-dire une équation donnant la distance MF en fonction de l'angle $\theta$ que fait MF avec un axe particulier. Pour cela, plaçons nous dans un repère orthonormé de centre F (F, r, $\theta$) où r mesure la distance du point M au foyer F (r=FM) et $\theta$ est l'angle que fait la droite (FM) avec un axe de référence passant par F. On note $\theta_0$ l'angle que fait l'axe focal avec l'axe de référence. d étant toujours la distance



de F à la droite directrice D, A étant le point d'intersection de la droite FM avec la droite directrice, le théorème de ***Thalès*** nous permet d'écrire :

$AM/AF = MH/d$
On a par ailleurs :
$AM = AF\text{-}MF = AF\text{-}r$
$AF = d/\cos(\theta\text{-}\theta_0)$
et $MH = r/e$
ce qui permet d'écrire :
$AM/AF = MH/d$
$(AF\text{-}r)/AF = MH/d$
$1 - r/AF = r/ed$
$1\text{-} (r.\cos(\theta\text{-}\theta_0)/d) = r/ed$
et donne finalement :
$r = p/(1+e.\cos(\theta\text{-}\theta_0))$
(où $p = e.d$ est le paramètre de la conique). Remarquons qu'il n'existe pas de définition du cercle par foyer et par directrice. On peut cependant remarquer que si $p = r$ et si e tend vers 0, l'ellipse se rapproche d'un cercle de centre F et de rayon r.
Jusqu'à présent on a considéré que F n'appartenait pas à la droite D : on est dans le cas des coniques propres.
Lorsque F appartient effectivement à la droite D, on est alors dans le cas des coniques dégénérées.

### Définition comme ensemble de points (bi-focale)

Nous avons déjà remarqué qu'ellipse et hyperbole possèdent un centre de symétrie (contrairement à la parabole). Ceci permet de donner une seconde définition, appelée définition bifocale de l'ellipse et de l'hyperbole : c'est l'ensemble des points M du plan qui sont centre d'un cercle C passant par un point donné F et tangent à un autre cercle C' de centre F'. C' est le cercle directeur de rayon 2a, et $FF' = 2c$
Par hypothèse $2c \neq 2a$ ($F \not\subset C'$)
Selon que $c<a$ ou $c>a$, on a respectivement une ellipse ou une hyperbole.
• $c<a$, alors F est intérieur au cercle directeur C' et la courbe est le lieu des points M tel que :
$MF + MF' = 2a$ (ellipse).
• $c>a$, alors F est extérieur au cercle C' et la courbe est le lieu des points M tel que :
$|MF\text{-}MF'| = 2a$ (hyperbole).
L'hyperbole obtenue est composée de deux parties convexes et connexes :
$MF - MF' = 2a$
$MF' - MF = 2a$
a est appelé demi-grand axe respectivement de l'ellipse ou de l'hyperbole.

Définition bifocale de l'ellipse :
$M_1F_1+M_1F_2 = M_2F_1+M_2F_1 = 2a$
Définition bifocale de l'hyperbole :
$| M_1F_1 - M_1F_2 | = | M_2F_1 - M_1F_2 | = 2a$
Le mathématicien belge Germinal Pierre Dandelin (XIXe siècle) a démontré l'équivalence entre les deux définitions métriques des coniques (à partir des foyers et de l'excentricité) et leur définition géométrique à partir de l'intersection d'un plan avec un cône (théorème de Dandelin). Les développements mathématiques de cette démonstration seraient un peu longs à aborder ici et on se contente de mentionner l'existence de cette relation entre les différentes définitions des coniques.

### Définition analytique

Une définition plus « moderne » des coniques peut être donnée à partir d'une approche analytique. Cette définition est très utile puisqu'elle permet de faire facilement des calculs sur les coordonnées (x, y) du point M appartenant à une conique si on connaît les caractéristiques de celle-ci. Cette définition exprime le fait qu'une conique est une courbe algébrique du deuxième degré, c'est-à-dire que les coordonnées cartésiennes x et y des points appartenant à la conique sont solutions d'une équation polynomiale du seconde degré :
$a.x^2+b.x.y+c.y^2+d.x+e.y+f=0$
Au moins un des trois coefficients a, b ou c est non nul et l'expression de l'équation dépend du repère utilisé. On parle d'équation réduite lorsque le repère choisit permet d'obtenir la forme la plus simple de l'équation. Cette définition englobe tous les cas de dégénérescence et permet d'affirmer que les coniques sont les sections planes de quadriques.

### Équations cartésiennes réduites

Dans un repère orthonormé d'origine O (milieu de FF') et admettant l'axe focal FF' comme axe des abscisses et l'axe non focal comme axe des ordonnées, les équation réduites des ellipses et des hyperboles prennent les formes suivantes.

**Ellipse**
$(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$
En posant $c = \sqrt{(a^2\text{-}b^2)}$ on a $FF' = 2c$ et $e = c/a$
La droite directrice D a pour équation $x = a^2/c$
Notons que lorsque $a = b$ on obtient l'équation du cercle de centre O et de rayon $R = a = b$ : $x^2+y^2 = R^2$
On peut également donner une représentation paramétrique de l'ellipse en fonction de l'angle $\theta$ que fait la droite OM avec l'axe des abscisses :
$x = a.\cos\theta$
$y = b.\sin\theta$
$\theta \in [0 ; 2\pi[$
Dans le cas où $a=b=R$ on a bien la représentation paramétrique du cercle de centre O et de rayon R :
$x = R\cos\theta$
$y = R\sin\theta$
$\theta \in [0 ; 2\pi[$

**Hyperbole**
$(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = \pm 1$
On a $SS' = 2a$ et comme dans le cas de l'ellipse $FF'=2c$, $e = c/a$ et la droite directrice D a pour équation $x = a^2/c$
Les asymptotes (c'est-à-dire les droites vers lesquelles les deux branches de la courbe tendent à l'infini) ont pour équation $y = (b/a)x$ et $y = -(b/a)x$
Lorsque $a = b$ (soit $e = \sqrt{2}$ ) l'hyperbole est dite équilatère, c'est-à-dire que les asymptotes sont perpendiculaires.
On peut également donner une représentation paramétrique de l'hyperbole :
$x = a.\mathrm{ch}\theta$
$y = b.\mathrm{sh}\theta$
$\theta \in \Re$

**Parabole**
Dans le cas de la parabole l'équation réduite de la conique est obtenue dans le repère d'origine S (sommet de la parabole) et admettant l'axe focal comme axe des abscisses.
L'équation de la parabole s'écrit alors :
$y^2=2px$
Où p est le paramètre de la parabole et F a pour coordonnées (p/2; 0)
La droite directrice D a pour équation $x = -p/2$
Notons que si l'axe focal est pris comme axe des ordonnées, l'équation de la parabole s'écrit alors : $x^2=2py$
F a pour coordonnées (0 ; p/2) et la droite directrice D a pour équation $y = -p/2$.

## PROPRIÉTÉS DES CONIQUES

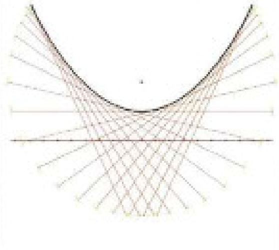
Les coniques présentent de nombreuses propriétés remarquables qui permettent notamment de construire point à point les différentes courbes. Bien que très intéressantes, il serait long et fastidieux de faire le tour de toutes ces propriétés. Arrêtons-nous cependant sur un théorème important et sur quelques propriétés des tangentes.

### Théorème de Pascal

Si on prend six points sur une conique (décomposée ou non), que l'on note A, B, C, A', B' et C' et que l'on note F l'intersection de BC' et CB', G l'intersection de CA' et AC', H l'intersection de AB' et BA', alors les points F, G, H sont alignés. Cet important résultat projectif est connu sous le nom de Théorème de Pascal. Il permet de construire point par point la conique passant par cinq points donnés A, B, C, A' et B'.

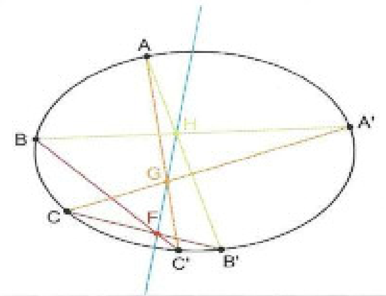
### Tangente

**Tangente à une parabole**



En chaque point M d'une parabole il existe une droite tangente. Celle-ci est la bissectrice de l'angle formé par MF et la parallèle à l'axe. La tangente intercepte l'axe focal en un point T. Si H' est le projeté orthogonal de M sur l'axe focal, alors le sommet S de la parabole est le milieu du segment.

Illustration du théorème de Pascal




Les trois points d'intersection sont alignés. La droite que forme cet alignement est appelée droite de Pascal.

**Tangente à une conique à centre (ellipse, hyperbole)**
En chaque point M d'une conique à centre il existe une tangente. Celle-ci est la bissectrice de l'angle géométrique $\widehat{FMF'}$ (bissectrice extérieure dans le cas de l'ellipse, bissectrice intérieure dans le cas de l'hyperbole). On ne peut mener deux tangentes distinctes à la conique (MT et MT') qu'à partir d'un point M extérieur à la courbe et défini par la relation $MF>e.MH$
Sur la conique elle-même ($MF=e.MH$), il y a une tangente unique. Pour un point M intérieur à la courbe ($MF<e.MH$) on ne peut pas mener de tangente. L'hyperbole possède en plus quelques propriétés particulières à cause de ses asymptotes. Nous n'aborderons pas ici tous les développements relatifs aux asymptotes, ce qui nous amènerait dans des développements un peu longs et parfois un peu ardus. Notons néanmoins que l'angle des asymptotes, noté 2z, est défini par la relation $\cos z = 1/e$. Les asymptotes sont des tangentes très particulières (tangente à l'infini) et comme nous l'avons vu précédemment, dans le cas de l'hyperbole équilatère les asymptotes sont orthogonales.

## EXEMPLE D'APPLICATION DES CONIQUES

Les coniques ne sont pas que des objets mathématiques, mais elles trouvent également des applications dans des domaines très différents : en mécanique (cinématique du point par exemple), en optique, en astronomie (mouvement des planètes), en électronique (courbe de Lissajous observé à l'oscilloscope). On trouve des applications dans la vie de tous les jours. En optique par exemple, un rayon lumineux émis par une source lumineuse située au foyer d'une parabole est réfléchi par celle-ci parallèlement à son axe focale : c'est le principe du phare de voiture. Le trajet inverse de la lumière est lui à la base du four solaire : les rayons lumineux provenant du soleil, et ayant une direction parallèle à l'axe focale d'un miroir parabolique, sont focalisés en un seul point (le foyer de la parabole). L'énergie solaire peut ainsi être concentré en un seul point et permettre de chauffer le four. Cette propriété de focalisation peut aussi être mise à profit dans le domaine des ondes radar pour réaliser les antennes paraboliques de télévision. En cinématique (étude des mouvements d'un point soumis à un champ de force), la chute d'un corps, lancé avec une vitesse initiale non perpendiculaire au sol, décrit une trajectoire parabolique. Pour s'en convaincre il suffit de résoudre l'équation classique de la cinématique au temps t appliqué à un corps de masse m, soumis à la pesanteur (accélération g) et lancé avec une vitesse initiale $\vec{v_0} = v_{0x}\vec{e_x}+v_{0z}\vec{e_z}$
La somme des forces (ici le poids mg du à la pesanteur) auxquelles est soumis le corps est égale à son accélération multipliée par sa masse. En se plaçant dans un repère orthonormé (x, y, z), on peut écrire :
$mg\vec{e_z} = m(d\vec{v}/dt)$
$d^2x/dt^2 = 0$
$d^2z/dt^2 = g$

$dx/dt = v_{0x}$
$dz/dt = g(t\text{-}t_0)+v_{0z}$

$x(t) = v_{0x}(t\text{-}t_0)+x_0$ (1)
$z(t) = (g(t\text{-}t_0)^2)/2+v_{0z}(t\text{-}t_0)+z_0$ (2)

Si on substitue t dans l'équation (1) en utilisant l'équation (2), on obtient l'équation suivante qui est bien celle d'une parabole :
$z(t)\text{-}z_0 = (g/2)((x\text{-}x_0)/v_{0x})^2)+x\text{-}x_0$
Les propriétés de l'ellipse peuvent également être utilisées de façon judicieuse. Ainsi, un signal (lumineux, acoustique) émis par une source se situant au foyer d'une ellipse est réfléchi à l'autre foyer. C'est le principe du confessionnal pour Lépreux que l'on trouve à l'Abbaye de la Chaise de Dieu en Haute-Loire et dont le plafond est elliptique. En se plaçant aux foyers de l'ellipse, deux personnes suffisamment éloignées peuvent converser aisément en murmurant tout en conservant leur intimité (des personnes placées en d'autres points ne pourront pas entendre leur conversation). En se réfléchissant sur le plafond de forme elliptique, les ondes sonores se propagent d'un foyer à l'autre.
L'ellipse intervient également en astronomie. Tout point attiré par un autre point F suivant la loi de Newton décrit une conique de foyer F. Les planètes ont ainsi un mouvement périodique décrivant des ellipses (l'ellipse étant la seule conique a être bornée c'est-à-dire décrivant une courbe fermée) : ce sont les lois de

***Kepler*** découlant de l'observation du mouvement des astres et donnant une description cinématique de leur mouvement. Kepler, qui a énoncé ses deux premières lois en 1609, indiqua notamment que chaque planète décrit, dans le sens direct, une ellipse dont le soleil occupe l'un des foyers.