Chapitre 5

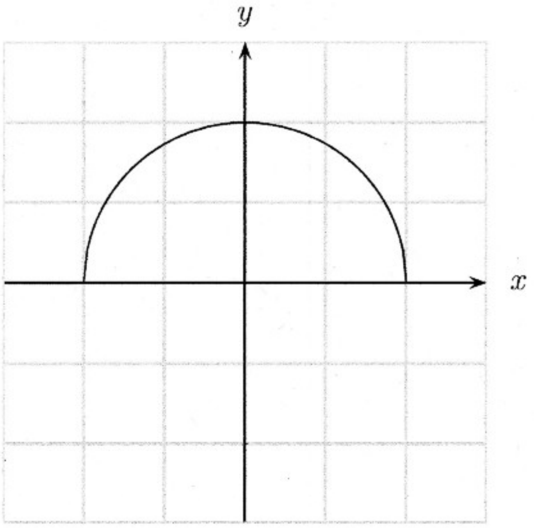
Courbes paramétrées

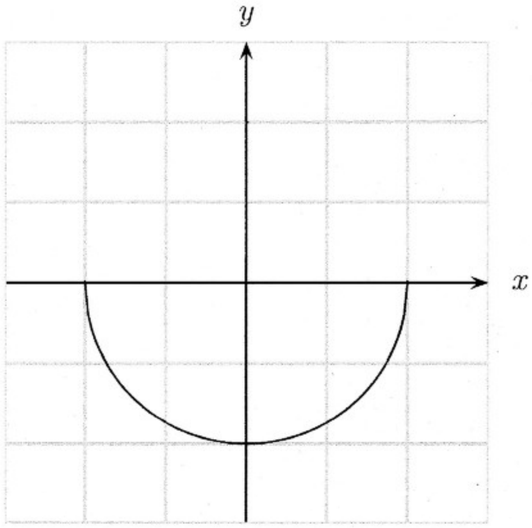
5.1 Introduction

Les limitations des fonctions

Lorsqu'on désire dessiner des courbes dans le plan, on a envie d'avoir la possibilité de dessiner des courbes qui ne respectent pas le test de la droite verticale cher aux fonctions. C'est-à-dire, une courbe qui peut couper une droite verticale plusieurs fois (ce qu'une fonction ne doit jamais faire).

Par exemple, le cercle trigonométrique ne peut pas être décrit comme étant le graphe d'une fonction. On aurait besoin de deux fonctions au minimum.



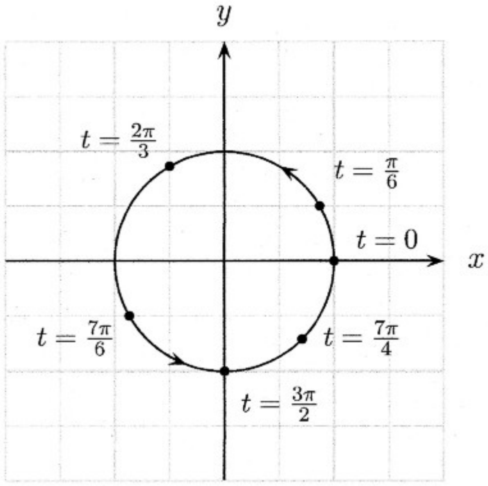


$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $\qquad$ $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$

avec $x \in [-1, 1]$

Courbes paramétrées

On sait que le cercle trigonométrique est l'ensemble des points du plan qui se trouvent à distance 1 de l'origine du plan. On sait aussi qu'un point du cercle a les coordonnées $(\cos(t); \sin(t))$.



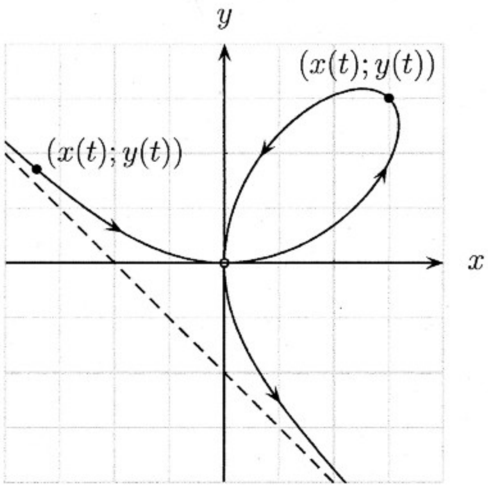
Ainsi pour dessiner le cercle trigonométrique, on dessine les points $(\cos(t); \sin(t))$ en faisant varier t dans $[0, 2\pi[$. On obtient une fonction f dont la variable t vit dans le domaine de définition $[0, 2\pi[$ et dont le domaine d'arrivée est le plan $\mathbb{R}^2$ (le domaine image est le cercle trigonométrique).

$$f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2;\ t \mapsto (\cos(t); \sin(t))$$

Définitions

On considère deux fonctions réelles

$$x : D_x \to \mathbb{R}$$
$$\text{et}$$
$$y : D_y \to \mathbb{R}$$



La fonction ci-dessous est appelée *fonction paramétrée*. Son domaine de définition est évidemment $D_f = D_x \cap D_y$.

$$f : D_f \to \mathbb{R}^2;\ t \mapsto (x(t); y(t))$$

La *courbe paramétrée* associée est l'ensemble des points du plan suivant.

$$\mathcal{C}_f = \{(x(t); y(t)) : t \in D_f\}$$

Cas particuliers

1. **Les droites sont des courbes paramétrées.**

   Une droite est une courbe paramétrée dont les fonctions x et y sont données par les équations paramétriques de cette droite.

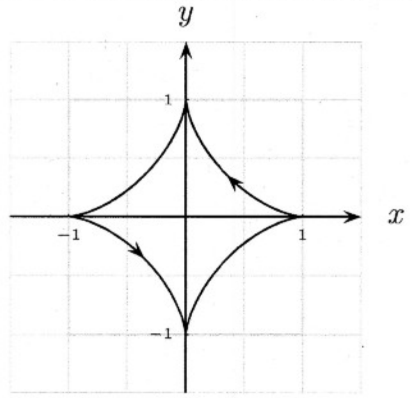
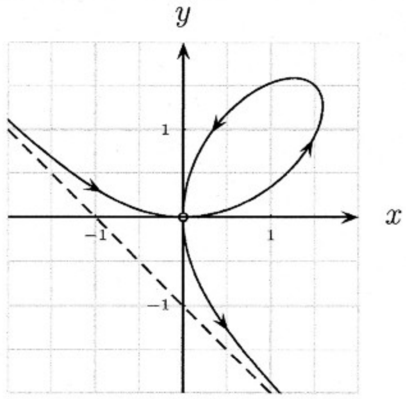
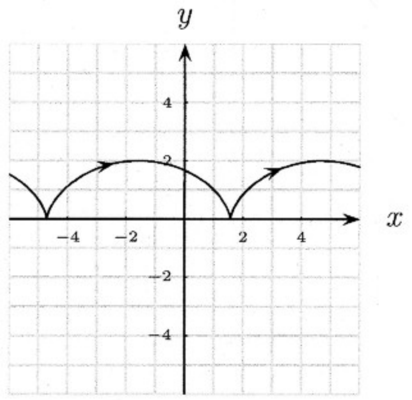
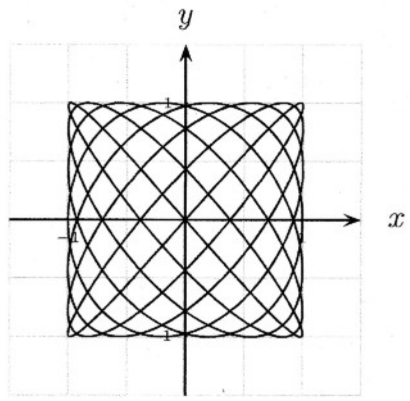
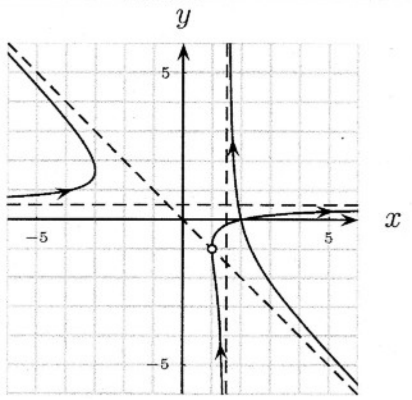
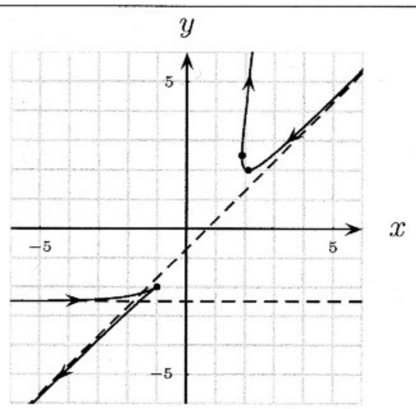
$$d : \begin{cases} x = x_0 + \lambda d_1 \\ y = y_0 + \lambda d_2 \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t); y(t)) \end{aligned} \quad \text{où} \quad \begin{cases} x(t) = x_0 + t d_1 \\ y(t) = y_0 + t d_2 \end{cases}$$

2. **Les fonctions réelles sont des courbes paramétrées.**

   Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle (c'est-à-dire D, $A \subset \mathbb{R}$). Alors f est aussi une fonction paramétrée.

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t); y(t)) \end{aligned} \quad \text{où} \quad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$

Exemples de courbes paramétrées

Astroïde	Folium de Descartes
$\left\{(\cos^3(t);\sin^3(t)) : t \in [0,2\pi[\,\right\}$	$\left\{(\frac{3t}{1+t^3};\frac{3t^2}{1+t^3}) : t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\right\}$
	
Cycloïde	**Une courbe de Lissajou**
$\left\{(t+\cos(t);1-\sin(t)) : t \in \mathbb{R}\right\}$	$\left\{(\sin(7t+\frac{\pi}{2});\sin(8t)) : t \in \mathbb{R}\right\}$
	
Courbe de la page 299	**Courbe de la page 300**
$\left\{(\frac{t^2+t+1}{t(t+1)};\frac{t^2+t-1}{t(1-t)}) : t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}\right\}$	$\left\{(\frac{\ln(t+2)t+1}{t};\frac{t^2+1}{t}) : t \in \,]-2,+\infty[\, \setminus \{0\}\right\}$
	

5.2 Asymptotes obliques et verticales

Asymptotes verticales

On constate l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = x_0$ lorsqu'il existe $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tel que[1]

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$$

Asymptotes horizontales

On constate l'existence d'une asymptote horizontale d'équation $y = y_0$ lorsqu'il existe $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tel que[1]

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0$$

Asymptotes obliques

On constate que si la courbe paramétrée admet une asymptote oblique, alors il existe $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tel que[1]

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$$

Attention : il est possible qu'il existe un tel t_0 sans que la courbe admette une asymptote oblique.

Théorème Si la fonction f admet une asymptote oblique d'équation $d(x) = mx + h$, alors

$$\boxed{m = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)}} \quad \text{et} \quad \boxed{h = \lim_{t \to t_0} \big(y(t) - mx(t)\big)}$$

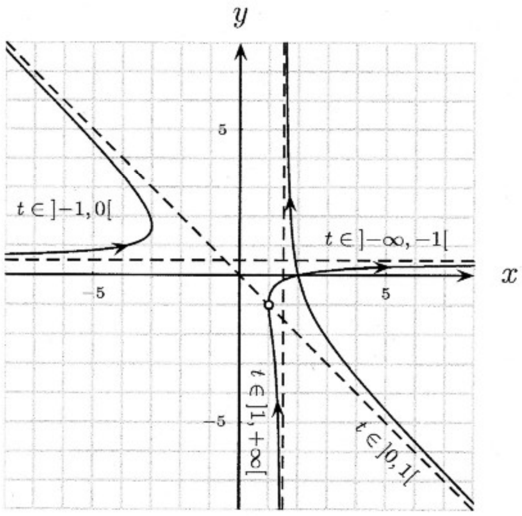
Exemple

La courbe paramétrée ci-contre est décrite par la fonction paramétrée suivante.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \left(\frac{t^2+t+1}{t(t+1)} ; \frac{t^2+t-1}{t(1-t)}\right) \end{array}$$

On a

1. une asymptote horizontale en $t = -1$. Son équation est $y = \frac{1}{2}$,
2. une asymptote oblique en $t = 0$. Son équation est $y = -x$.
3. une asymptote verticale en $t = 1$. Son équation est $x = \frac{3}{2}$,



1. On utilise la vision d'Alexandrov de la droite réelle

5.3 Pente en un point et points particuliers

La pente de la tangente à une courbe paramétrée en un point

Comme pour la dérivée, on calcule la pente moyenne entre les points correspondant à t et à $t + \Delta t$ et on fait tendre Δt vers 0.

Notons $m(t)$ la pente de la tangente à la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ en t. On a

$$\begin{aligned} m(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{x(t+\Delta t) - x(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{x(t+\Delta t) - x(t)} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t}{x(t+\Delta t) - x(t)} = y'(t) \cdot \frac{1}{x'(t)} \end{aligned}$$

Donc
$$\boxed{m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}}$$

Point à tangente horizontale

Un point de la courbe $(x(t_0), y(t_0))$ est à tangente horizontale si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$.

Point à tangente verticale

Un point de la courbe $(x(t_0), y(t_0))$ est à tangente verticale si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$.

Point singulier

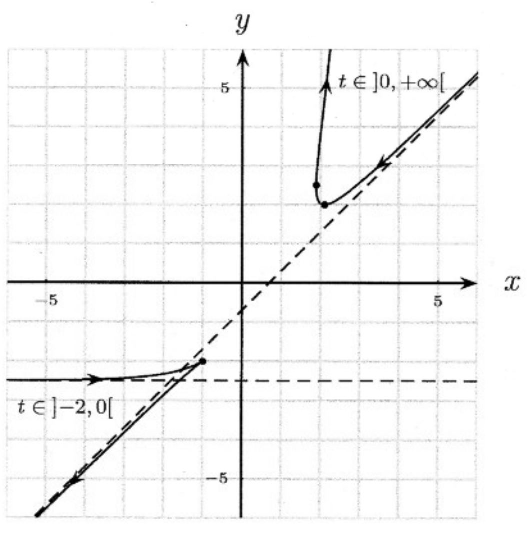
Un point de la courbe $(x(t_0), y(t_0))$ est appelé *point singulier* si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) = 0$.

Important : il faut toujours calculer $\lim\limits_{t \to t_0} m(t)$ pour un point singulier afin de pouvoir le dessiner correctement.

Exemple

La courbe paramétrée ci-contre est décrite par la fonction paramétrée suivante.

$$\begin{aligned} f: \ ]-2, +\infty[\setminus \{0\} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\tfrac{\ln(t+2)t+1}{t}; \tfrac{t^2+1}{t}\right) \end{aligned}$$



On a

1. un point singulier en $t = -1$. Ce point est $(-1, -2)$. On a $\lim\limits_{t \to -1} m(t) = \frac{2}{3}$.
2. un point non singulier à tangente horizontale lorsque $t = 1$. Ce point est $(\ln(3) + 1; 2)$.
3. un point non singulier à tangente verticale en $t = 2$. Ce point est $(\ln(4) + \frac{1}{2}; \frac{5}{2})$,

5.4 Étude de fonction paramétrique

Marche à suivre

Étudions la fonction $f : D \to \mathbb{R}^2;\ t \mapsto \left(\frac{1}{t(t+2)}; \frac{e^{-t}}{t}\right)$.

1. **Calcul des limites au bord du domaine de définition et des asymptotes**
   Le domaine de définition est $D = D_x \cap D_y$. Ici $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.
   (a) Pour $t \to -\infty$, on a une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
   (b) Pour $t \to -2$, on a une asymptote horizontale d'équation $y = -\frac{e^2}{2}$.
   (c) Pour $t \to 0$, on a une asymptote oblique d'équation $y = 2x - \frac{1}{2}$.
   (d) Pour $t \to +\infty$, on a $(x(t), y(t)) \to (0, 0)$. Il y a un trou en $(0; 0)$.

2. **Dérivées et tableau de variation**

   On factorise les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$ pour le tableau de variation.

$$x'(t) = \frac{-2(t+1)}{t^2(t+2)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{-(t+1)}{t^2 e^t} \quad \text{donc} \quad m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(t+2)^2}{2e^t}$$

   Contrairement aux études de fonctions, ici on fait le tableau de signes uniquement pour les dérivées. On remplit le reste en se basant sur le point 1.

t	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	$\lightning$	$+$	0	$-$	$\lightning$	$-$	0
$y'(t)$	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$\lightning$	$-$	0
$x(t)$	0	$\rightarrow$	$\pm\infty$	$\rightarrow$	-1	$\leftarrow$	$\pm\infty$	$\leftarrow$	0
$y(t)$	$\pm\infty$	$\uparrow$	$-\frac{e^2}{2}$	$\uparrow$	$-e$	$\downarrow$	$\pm\infty$	$\downarrow$	0
comportement	A.V.	$\nearrow$	A.H.	$\nearrow$	point sing.	$\swarrow$	A.O.	$\swarrow$	trou

3. **Points particuliers**
   Les points particuliers sont :
   (a) Pour $t = -1$, on a le point singulier $(-1; -e)$. On a $\lim\limits_{t \to -1} m(t) = \frac{e}{2}$.
   (b) Pour $t \to +\infty$, on a le point singulier $(0; 0)$. On a $\lim\limits_{t \to +\infty} m(t) = 0$.

4. **Graphe**