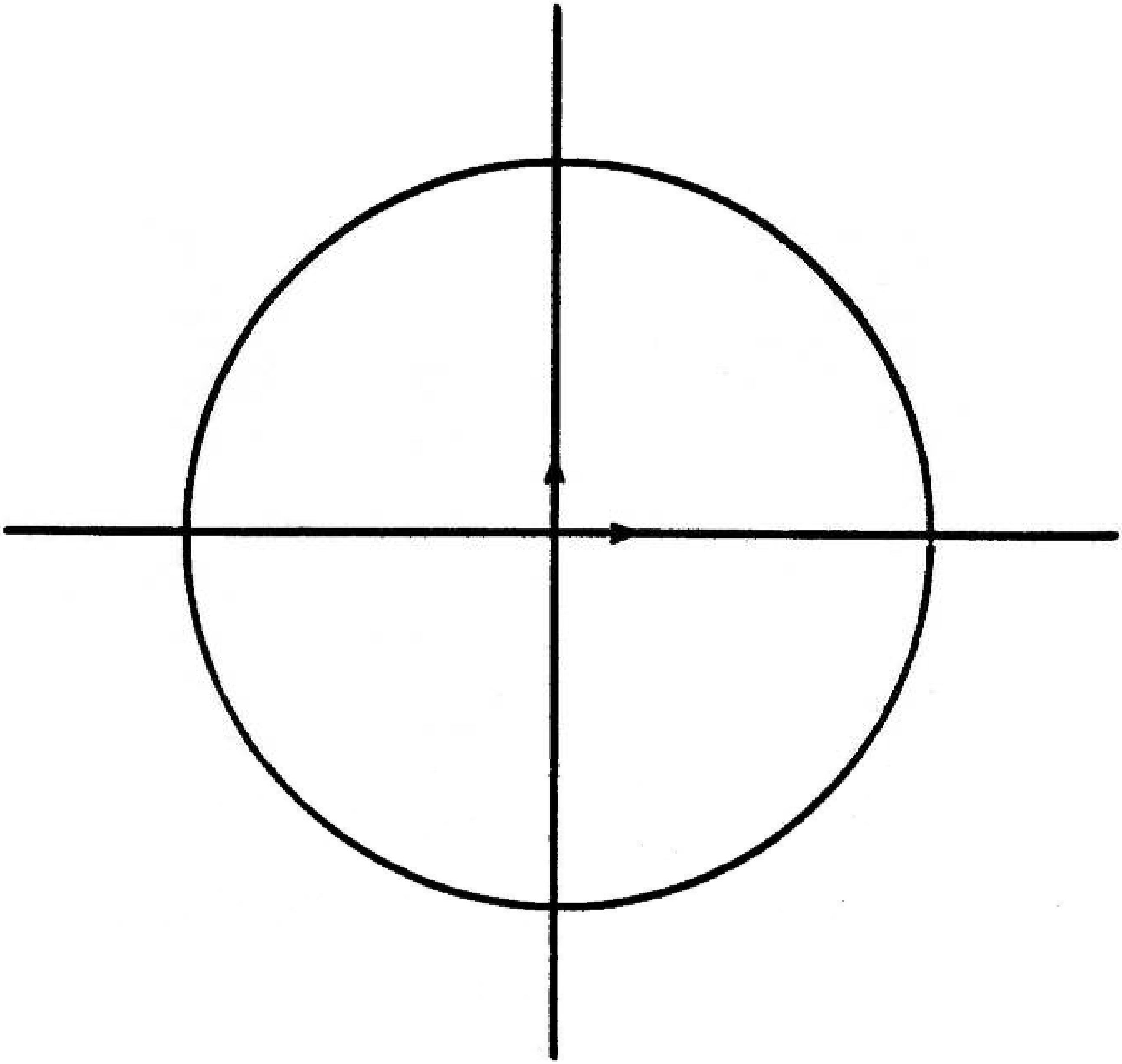
Courbes planes

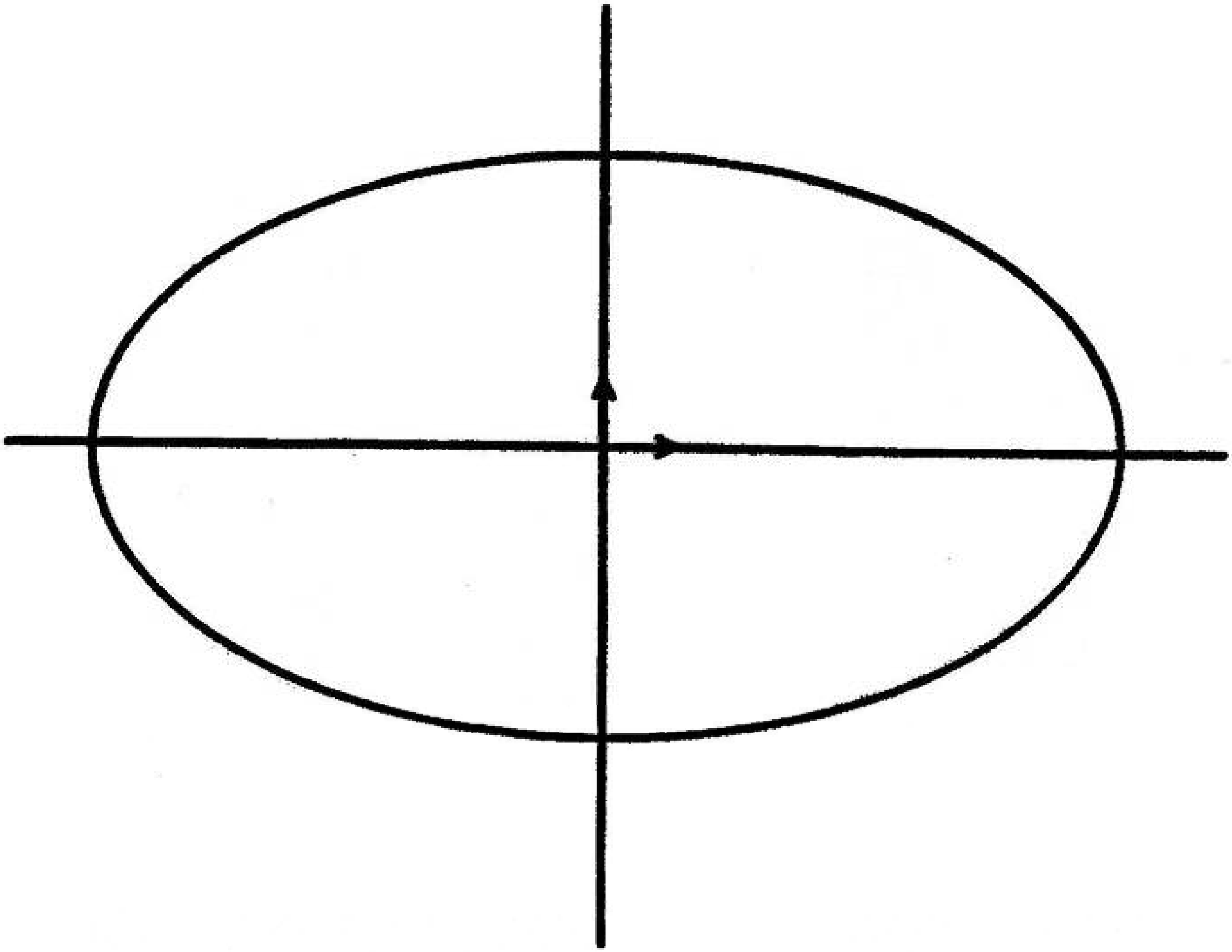
1. LE CERCLE



$X = 5\ \mathrm{SIN}(T)$ $\quad Y = 5\ \mathrm{COS}(T)$ $\quad Z = 0$

$\left[0 < T < 2\pi\right]$

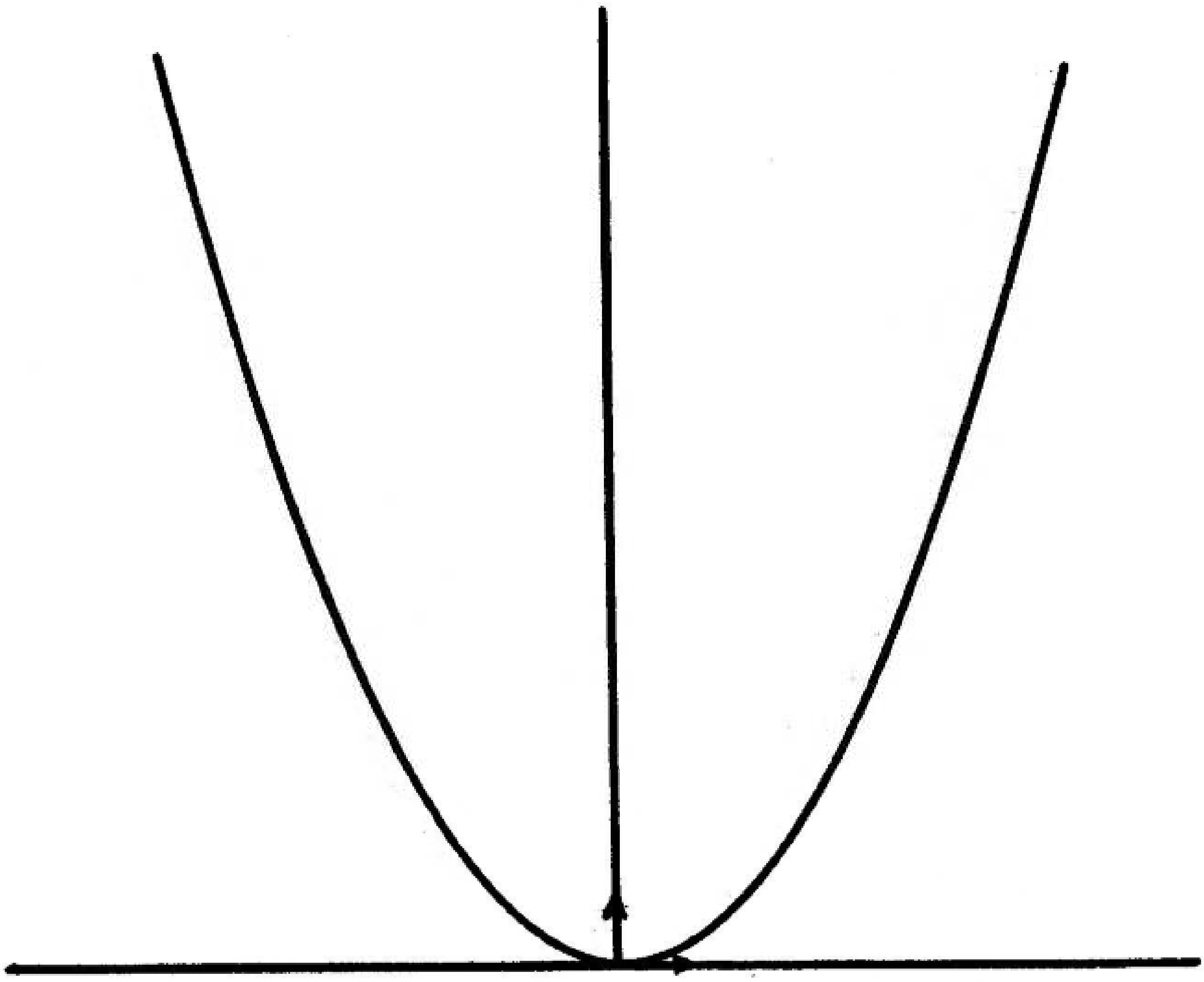
2. L'ELLIPSE



$X = 7 \sin(T)$ $Y = 4 \cos(T)$ $Z = 0$

$\left[0 < T < 6{,}28\right]$

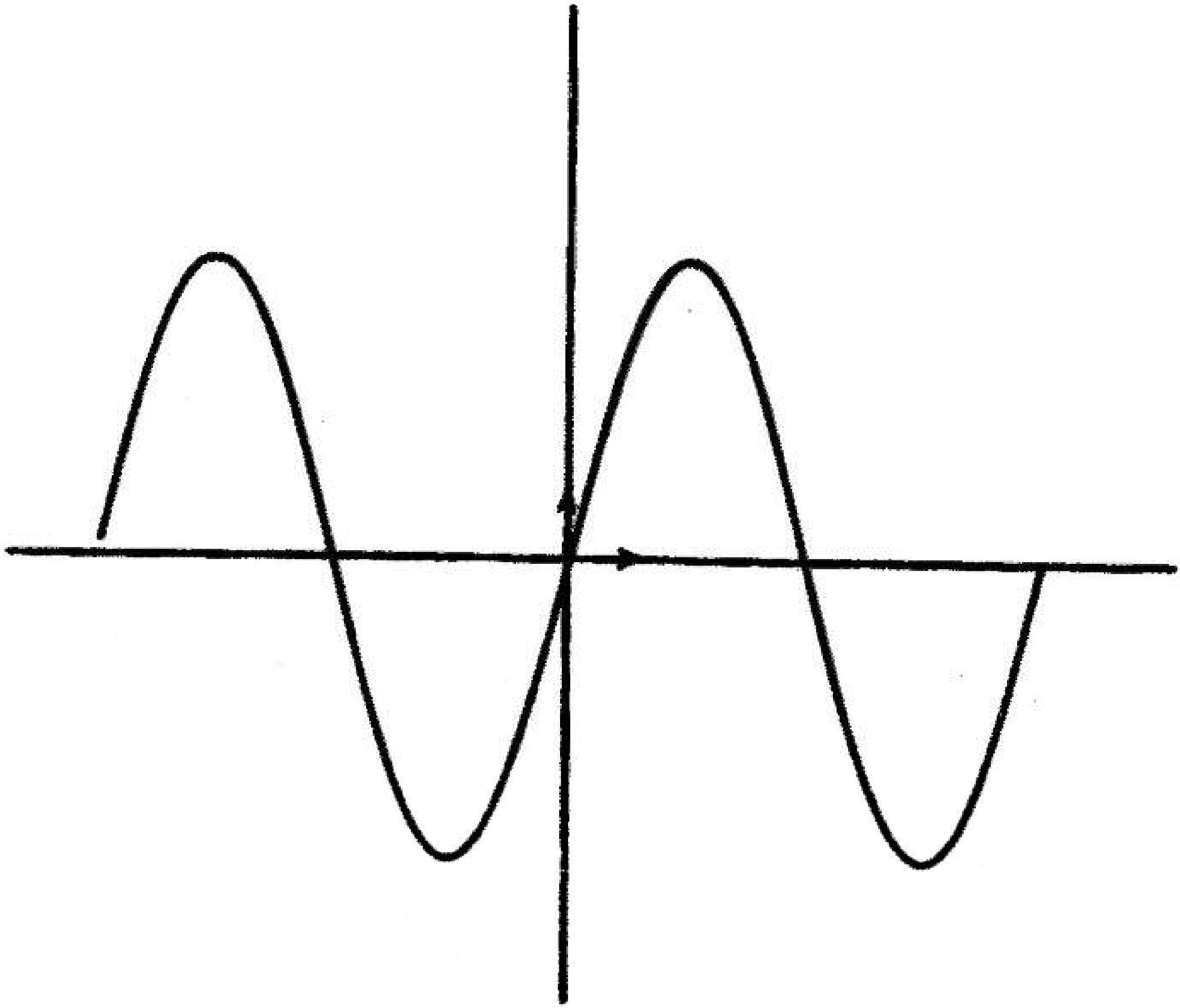
3. LA PARABOLE



$X = T$ $\qquad Y = \frac{1}{3} T^2$ $\qquad Z = 0$

$[-6 \leqslant T \leqslant 6]$

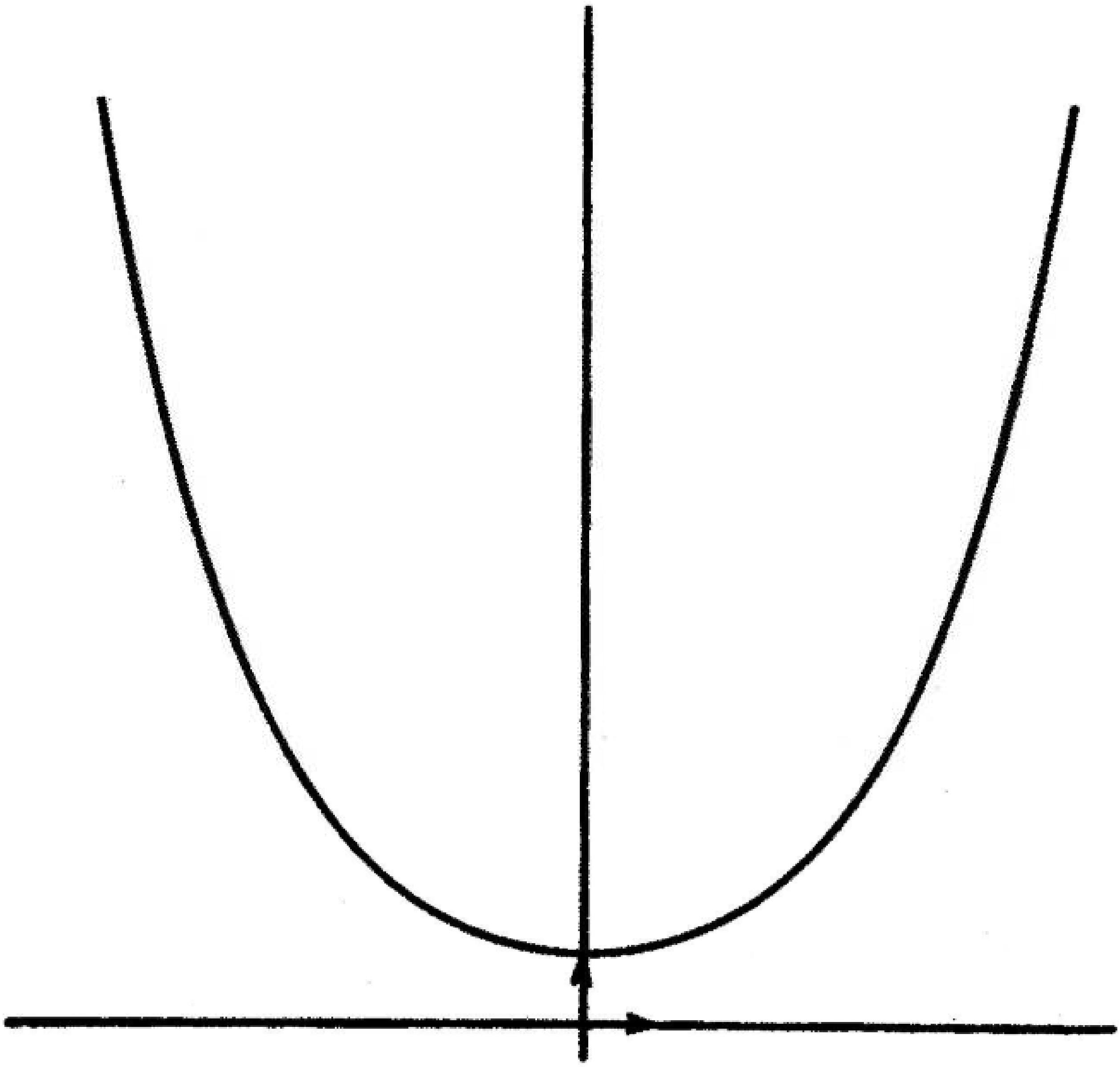
4. LA SINUSOIDE



$X = T$ $\qquad$ $Y = 4\ SIN(T)$ $\qquad$ $Z = 0$

$[0 < T < 6{,}28]$

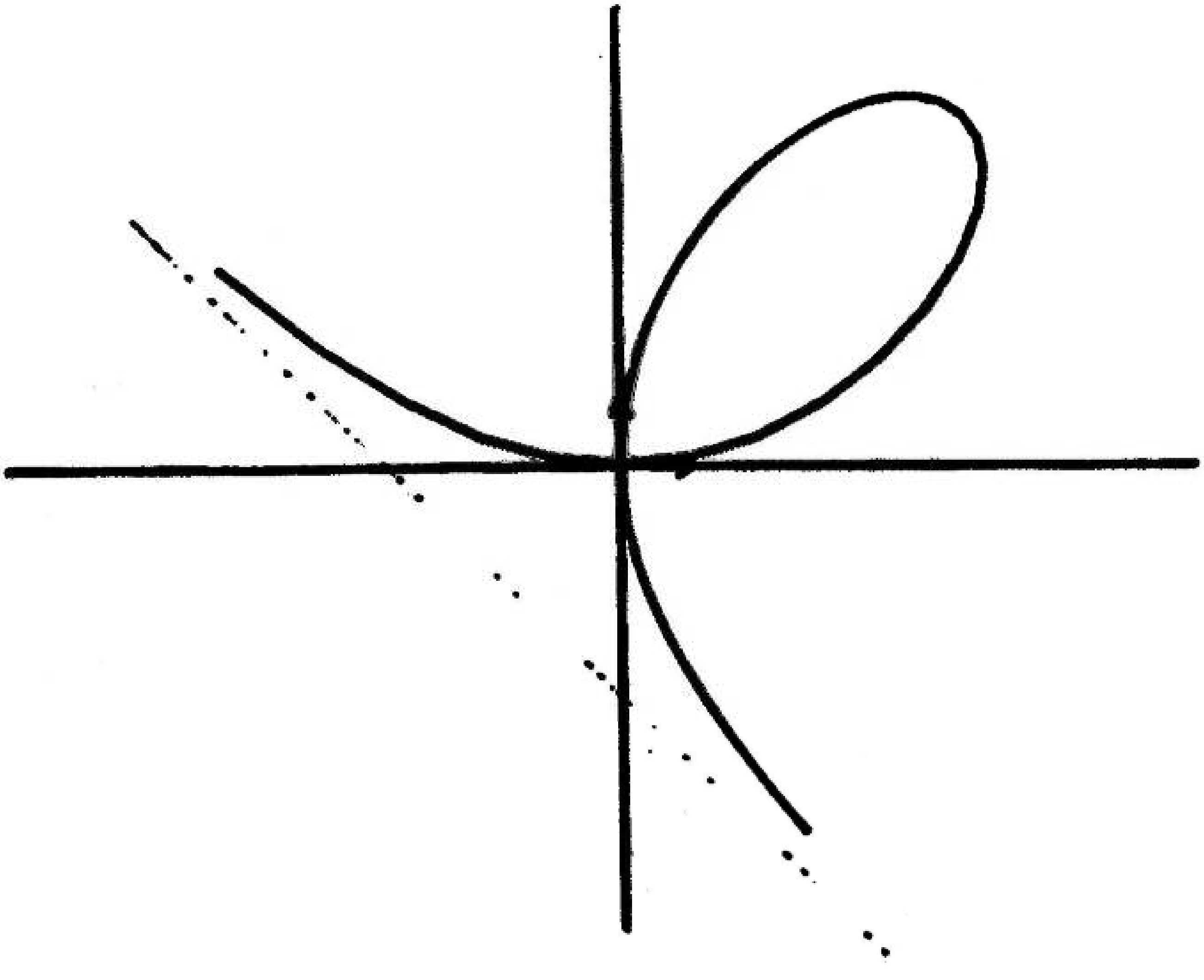
5. LA CHAINETTE



X = T   Y = COSH(T/2)   Z = 0

[-6,5 ⩽ T ⩽ 6,5]

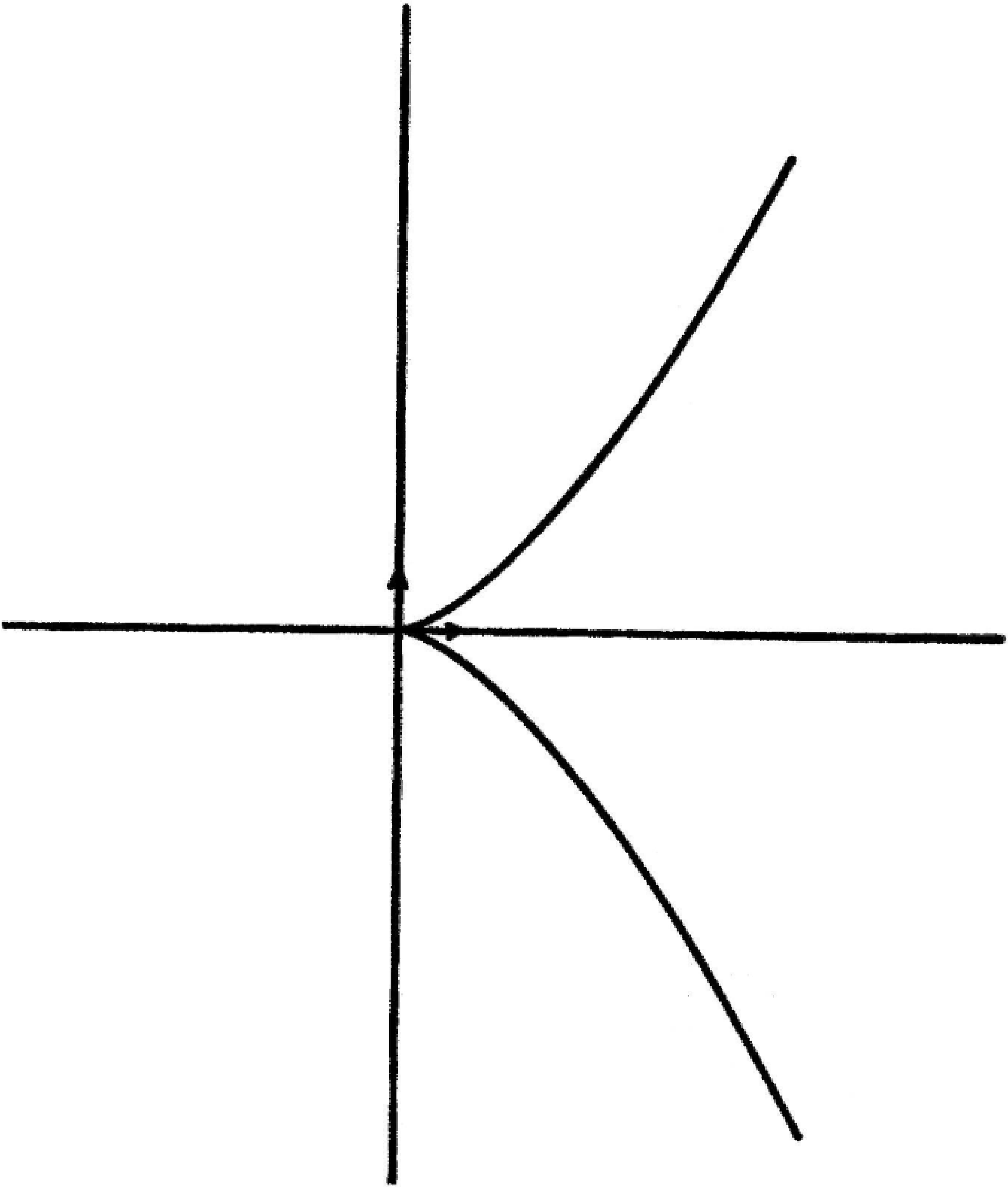
6. FOLIUM DE DESCARTES



$X = 9T/(1 + T^3)$ $\quad$ $Y = 9T^2/(1 + T^3)$ $\quad$ $Z = 0$

$[-30 \leqslant T \leqslant -2] \quad \cup \quad [-0.5 \leqslant T \leqslant 29]$

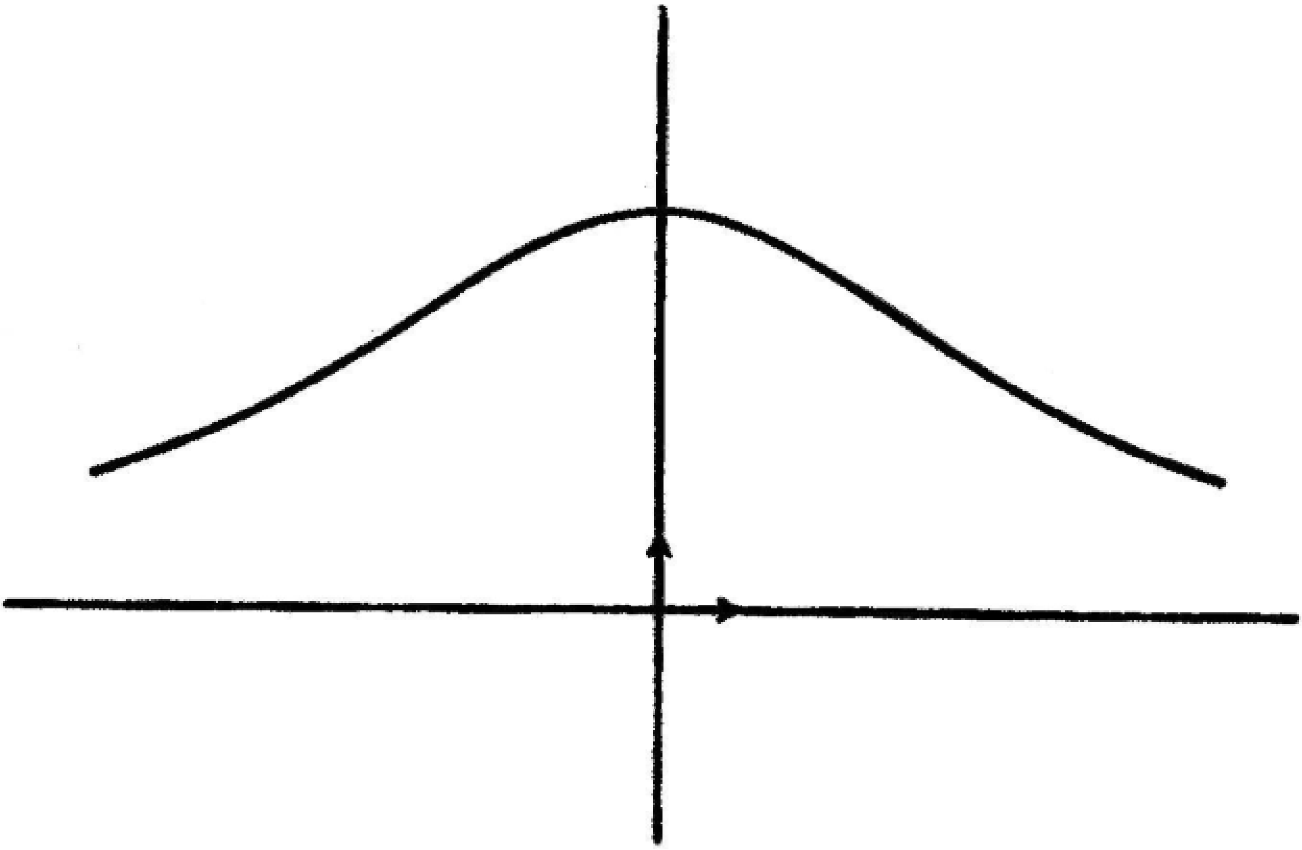
7. PARABOLE SEMI-CUBIQUE



$X = T^2$ $\qquad$ $Y = \frac{1}{2} T^3$ $\qquad$ $Z = 0$

$[-2{,}5 \leqslant T \leqslant 2{,}5]$

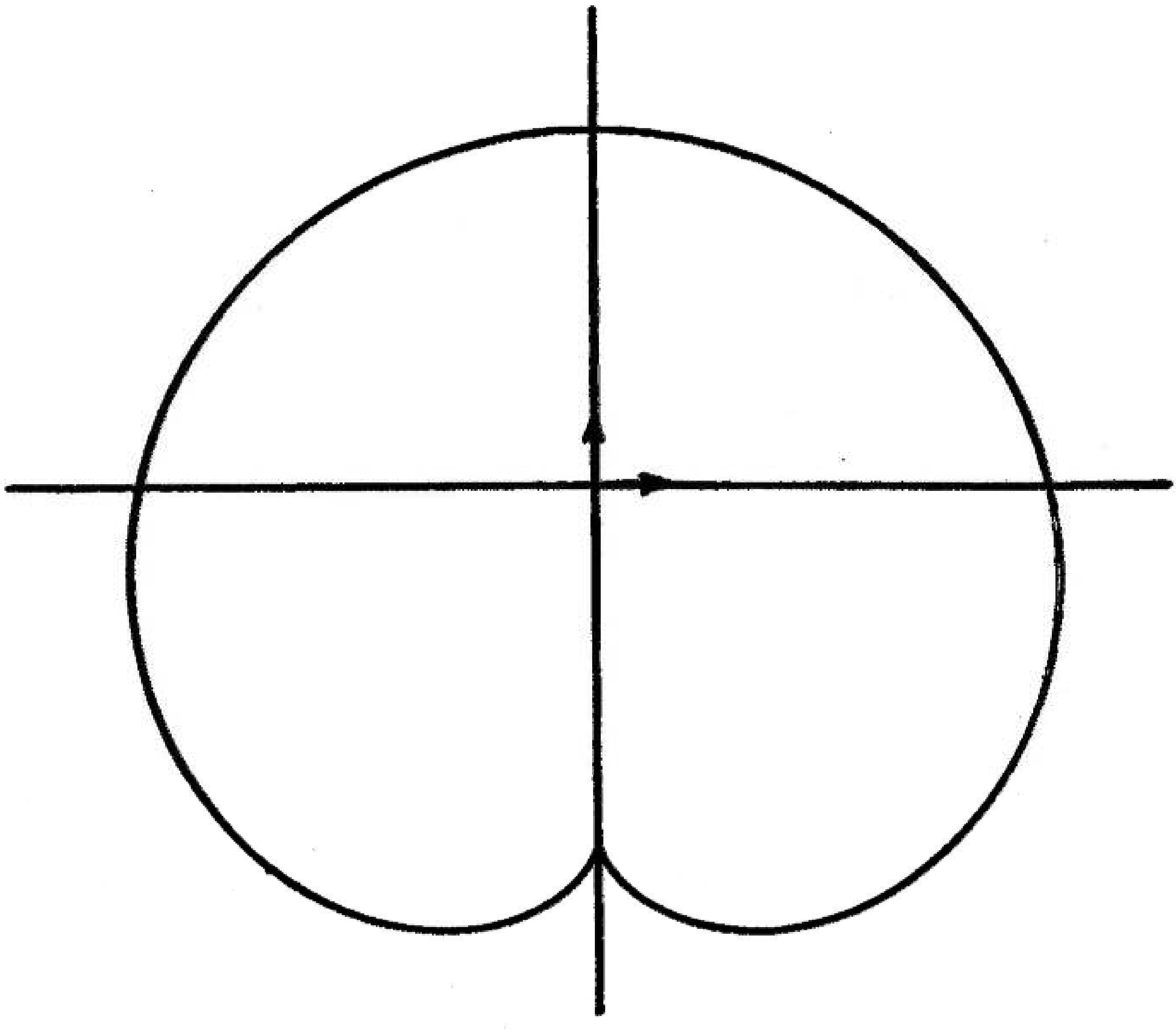
8. BOUCLE D'AGNESI



$X = T$ $\qquad Y = \dfrac{125}{25 + T^2}$ $\qquad Z = 0$

$\left[-7 \leqslant T \leqslant 7\right]$

9. LA CARDIOIDE

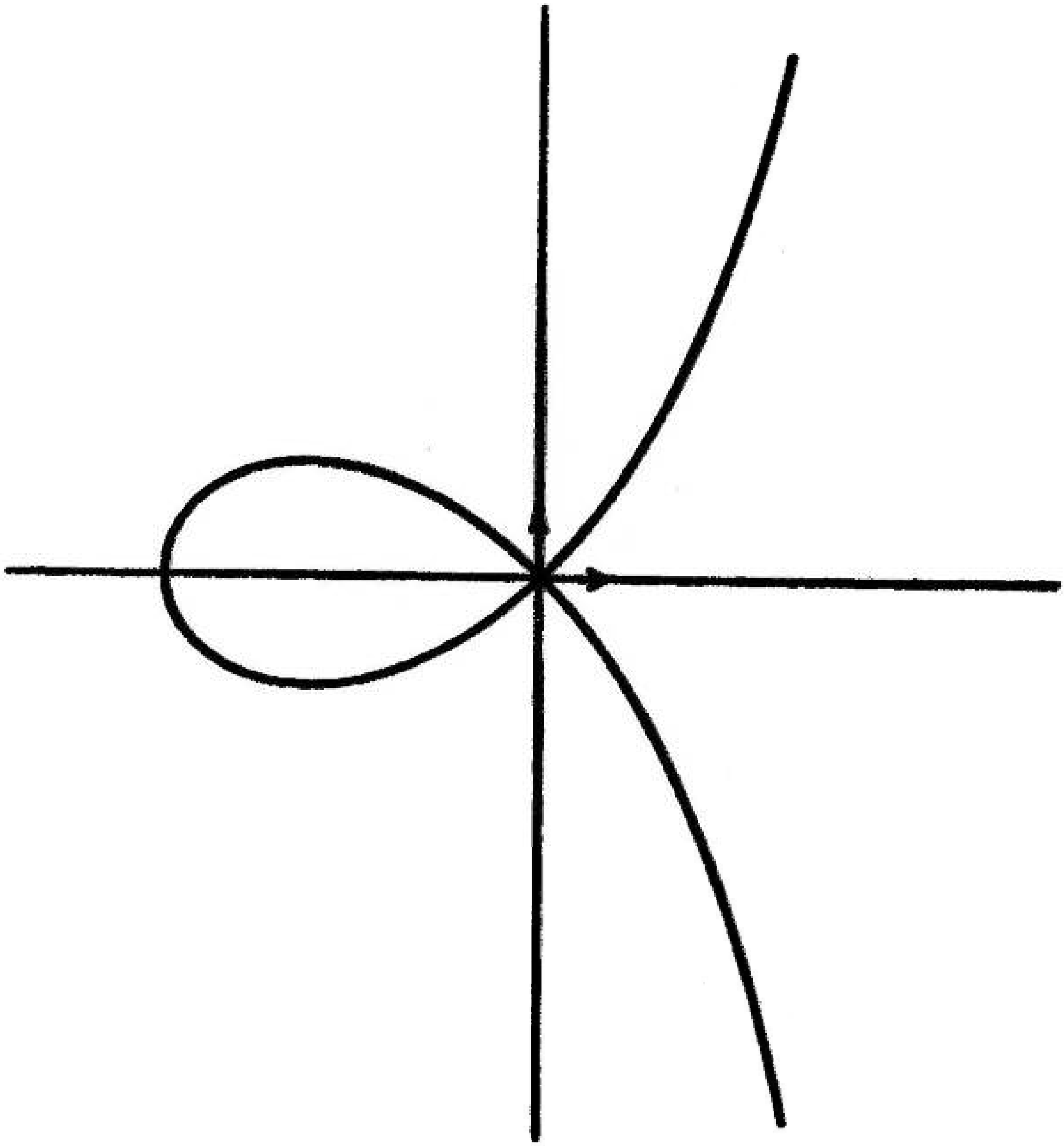


X = -5 SIN(T)(1+COS(T)) , Y = 5 COS(T)(1+COS(T)) - 5

Z = 0

[0 ⩽ T ⩽ 6,28]

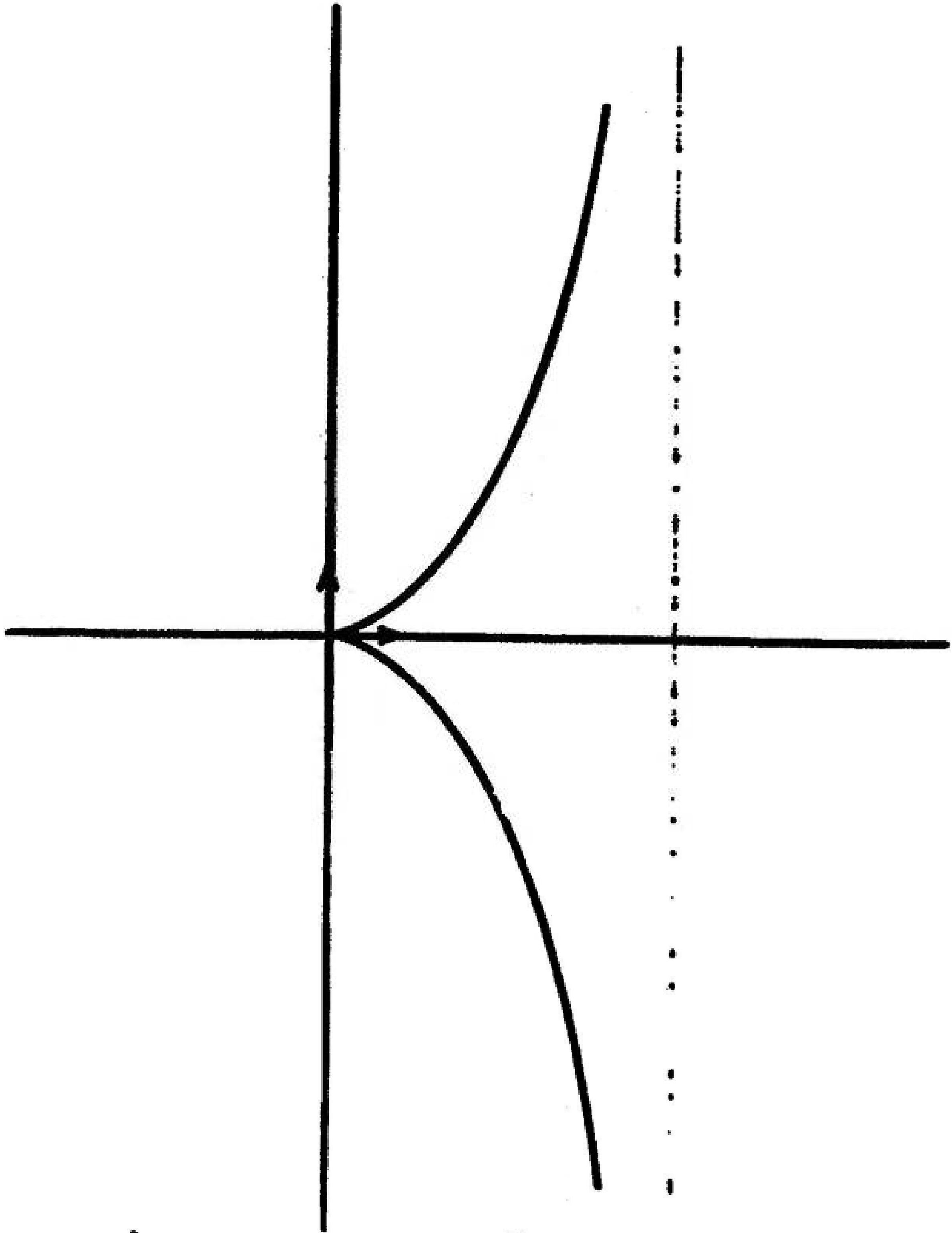
10. LA STROPHOIDE



$$X = 5\frac{T^2 - 1}{T^2 + 1} \qquad Y = 5T\frac{T^2 - 1}{T^2 + 1} \qquad Z = 0$$

$-2{,}2 < T < 2{,}2$

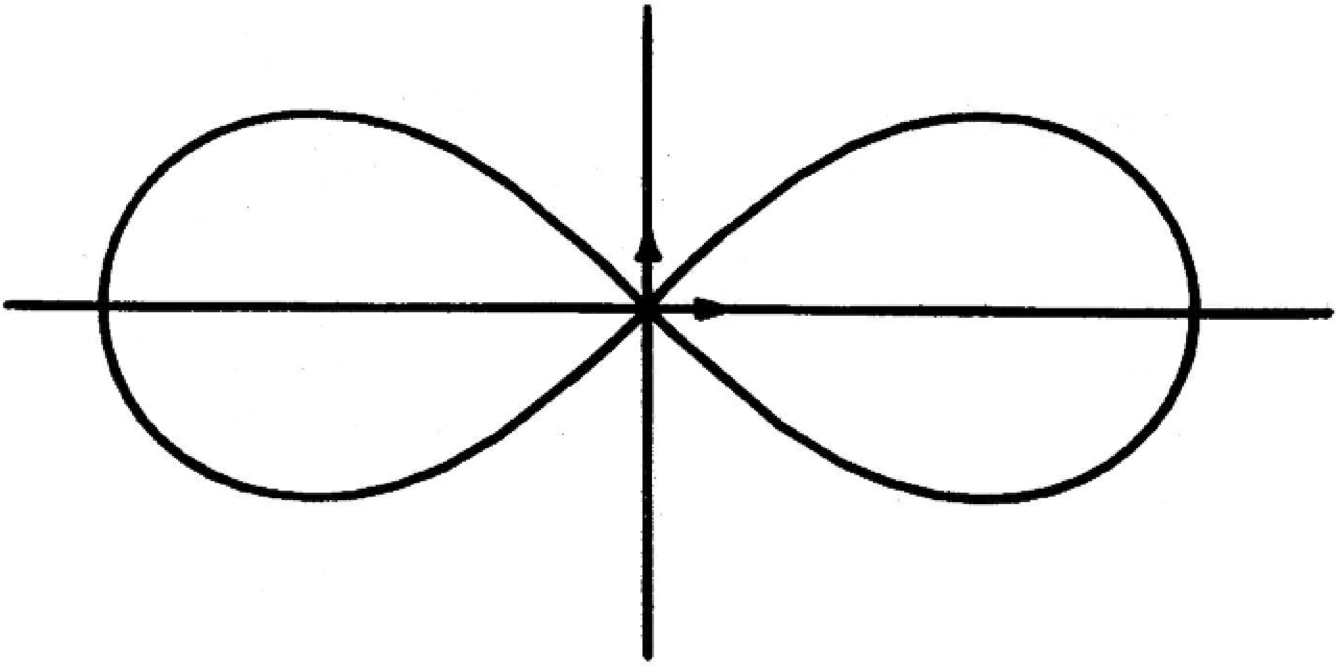
11. LA CISSOIDE DROITE



$$X = \frac{5\,T^2}{1 + T^2} \qquad Y = \frac{5\,T^3}{1 + T^2} \qquad Z = 0$$

$\left[-2 \leqslant T < 2\right]$

12. LEMNISCATE



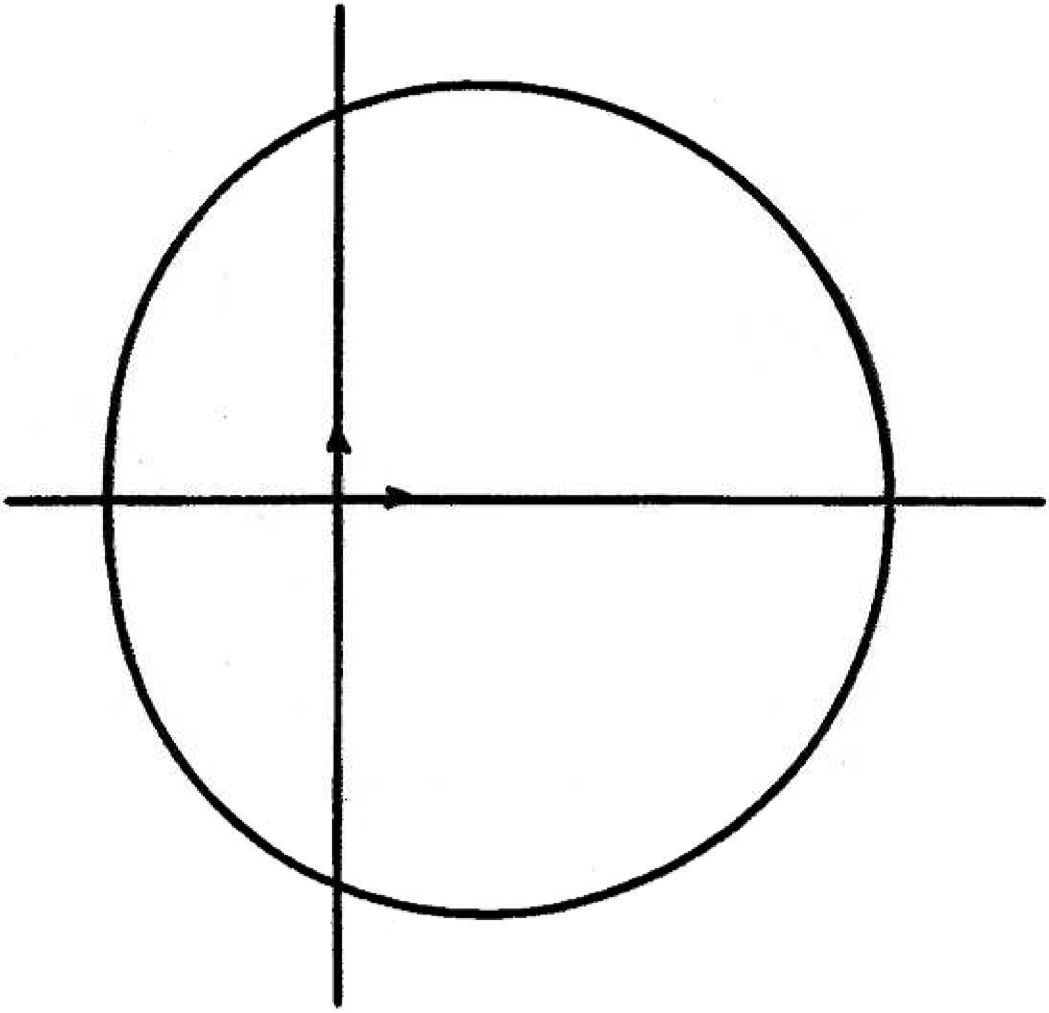
$X = 7 \quad COS(2T) \quad COS(T)$

$Y = 7 \quad COS(2T) \quad SIN(T)$

$Z = 0$

$\left[-0,78 < T < 0,78\right] \quad \cup \quad \left[2,36 < T < 3,92\right]$

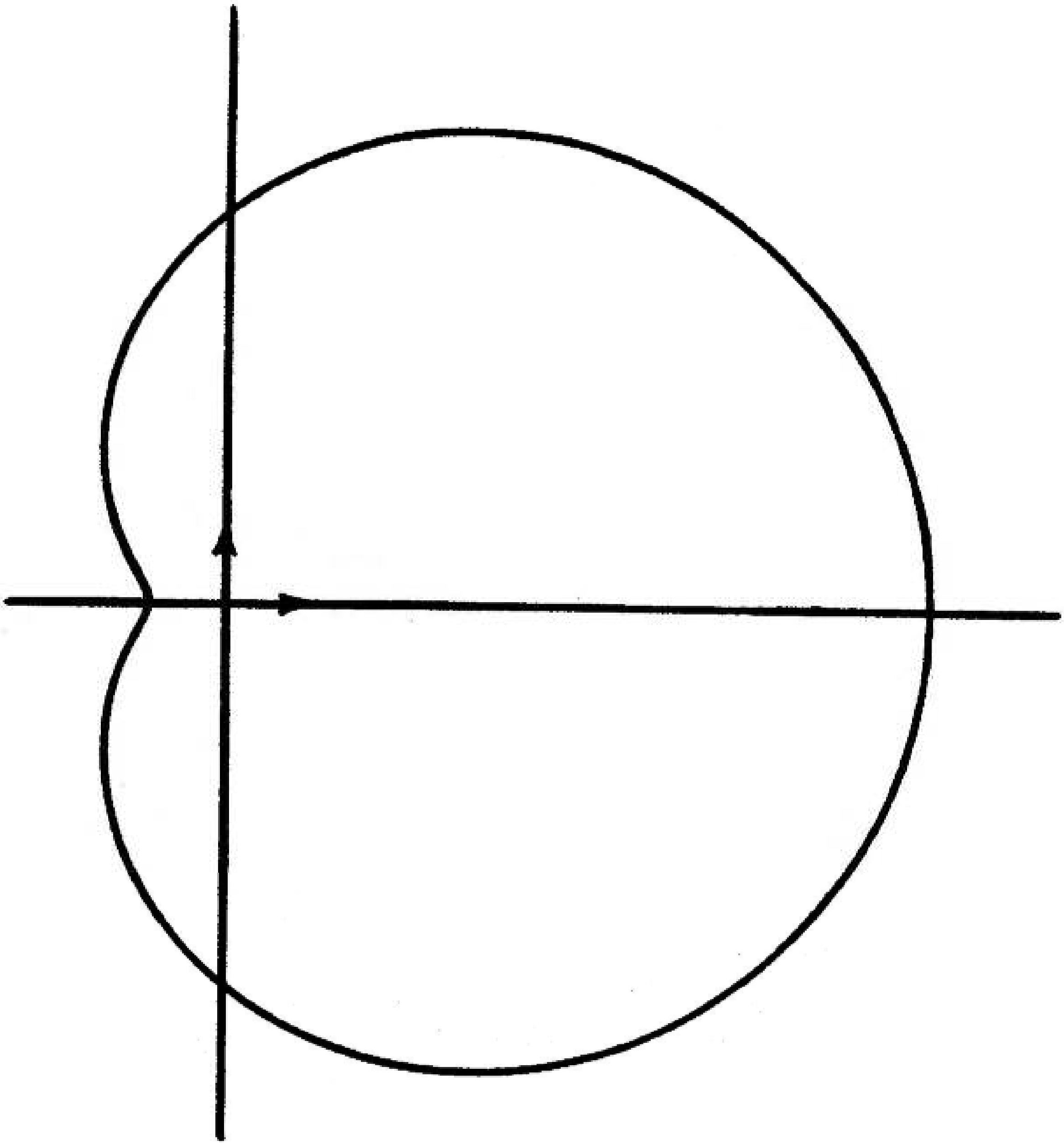
13. LIMACON DE PASCAL



$X = 2COS^2T + 7COS(T)$ $\quad$ $Y = 2COS(T)SIN(T) + 5SIN(T)$ $\quad$ $Z = 0$

$\left[0 \leqslant T < 6{,}28\right]$

14. LE LIMACON DE PASCAL

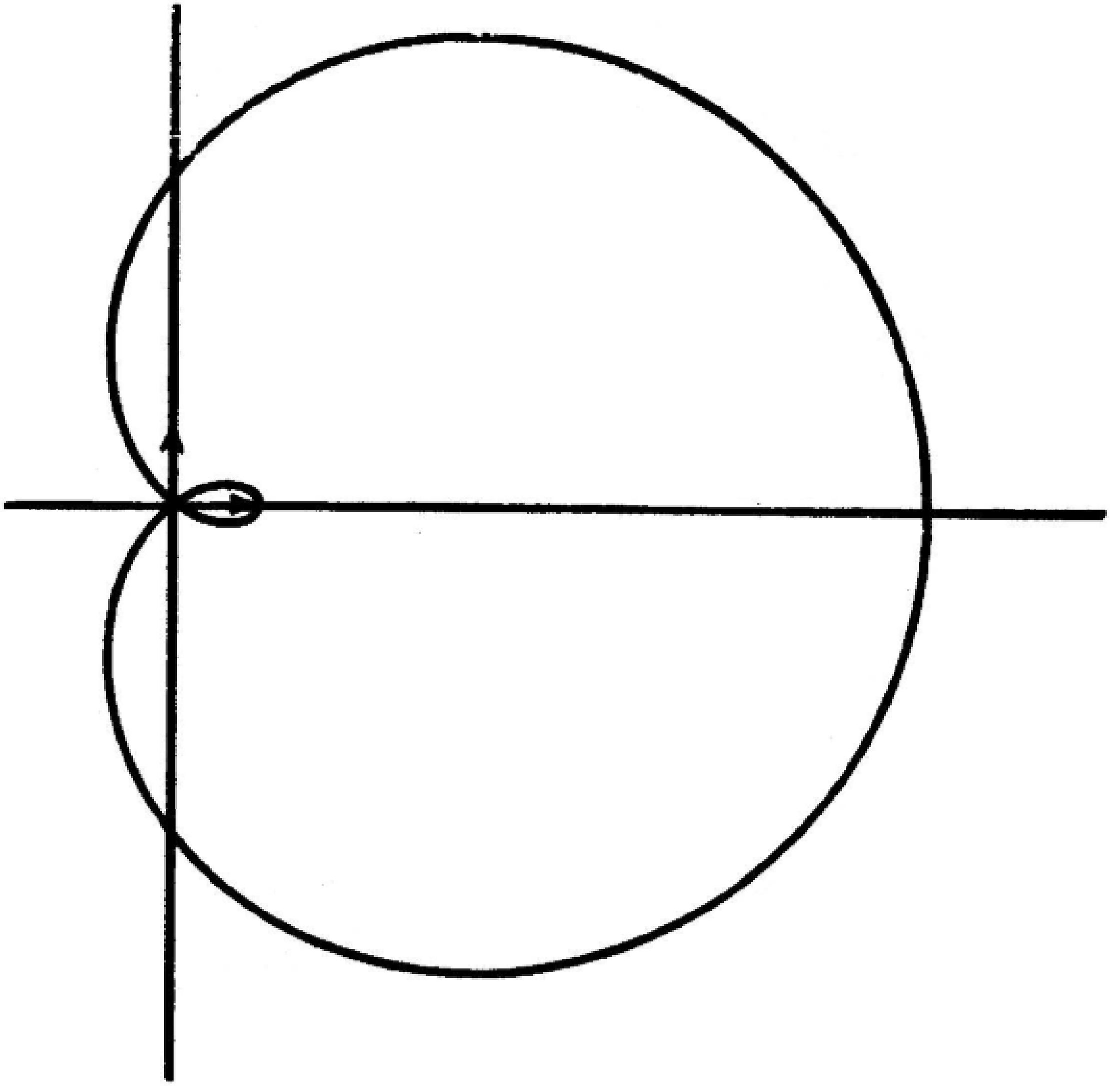


$X = 4\ COS^2(T) + 5\ COS(T)$ $\qquad$ $Y = 4\ COS(T)\ SIN(T) + 5\ SIN(T)$

$Z = 0$

$[0 \leqslant T \leqslant 6,28]$

15 LE LIMAÇON DE PASCAL

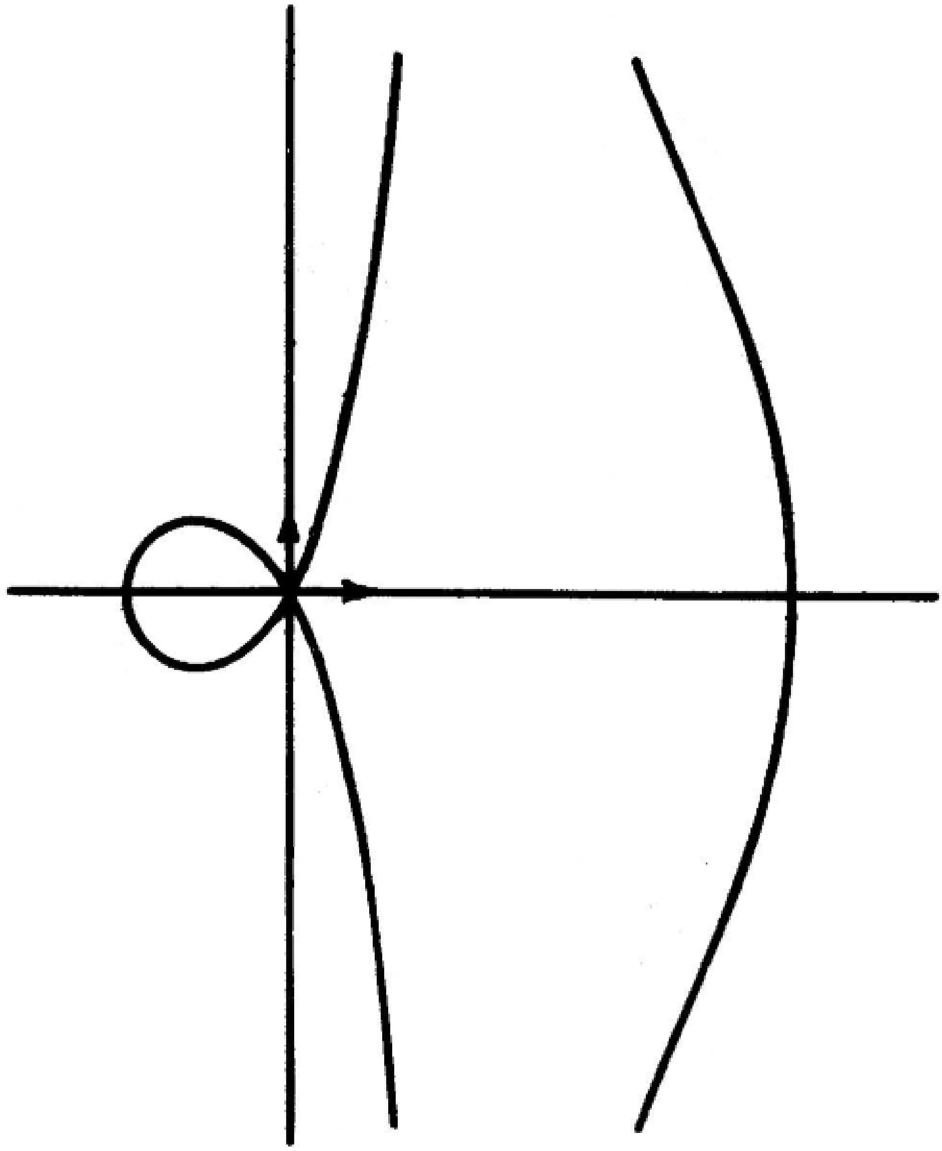


$X = 5\ COS^2(T) + 4\ COS(T)$ $Y = 5\ COS(T)\ SIN(T) + 5\ SIN(T)$

$Z = 0$

$\left[0 \leqslant T \leqslant 6{,}28\right]$

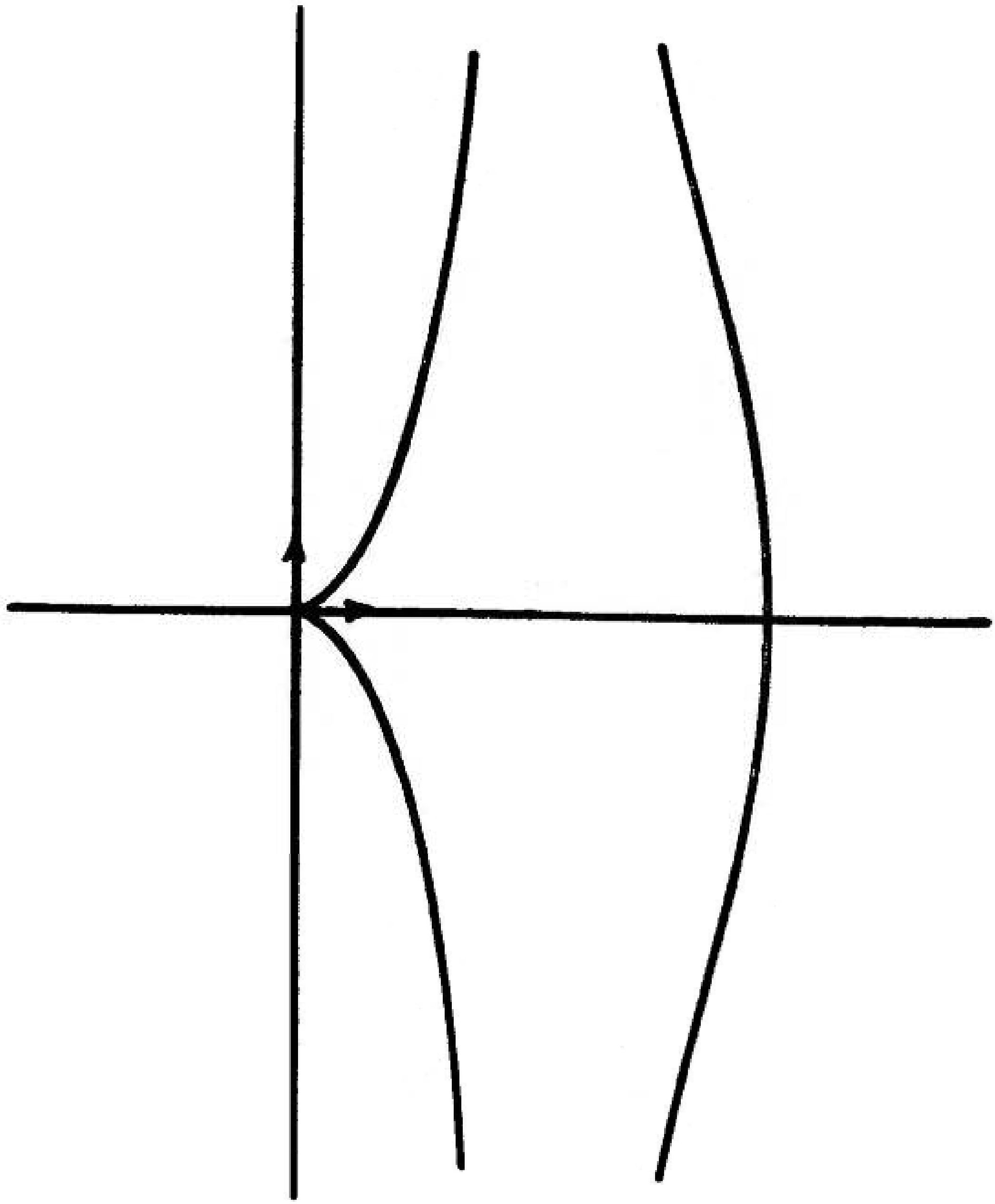
16. CONCHOIDE DE NICOMEDE



$X = 2 + 4\ COS(T)$ $\quad$ $Y = 2\ TG(T) + 4\ SIN(T)$ $\quad$ $Z = 0$

$[1,73 \leqslant T \leqslant 4,55] \cup [-1,13 \leqslant T \leqslant 1,13]$

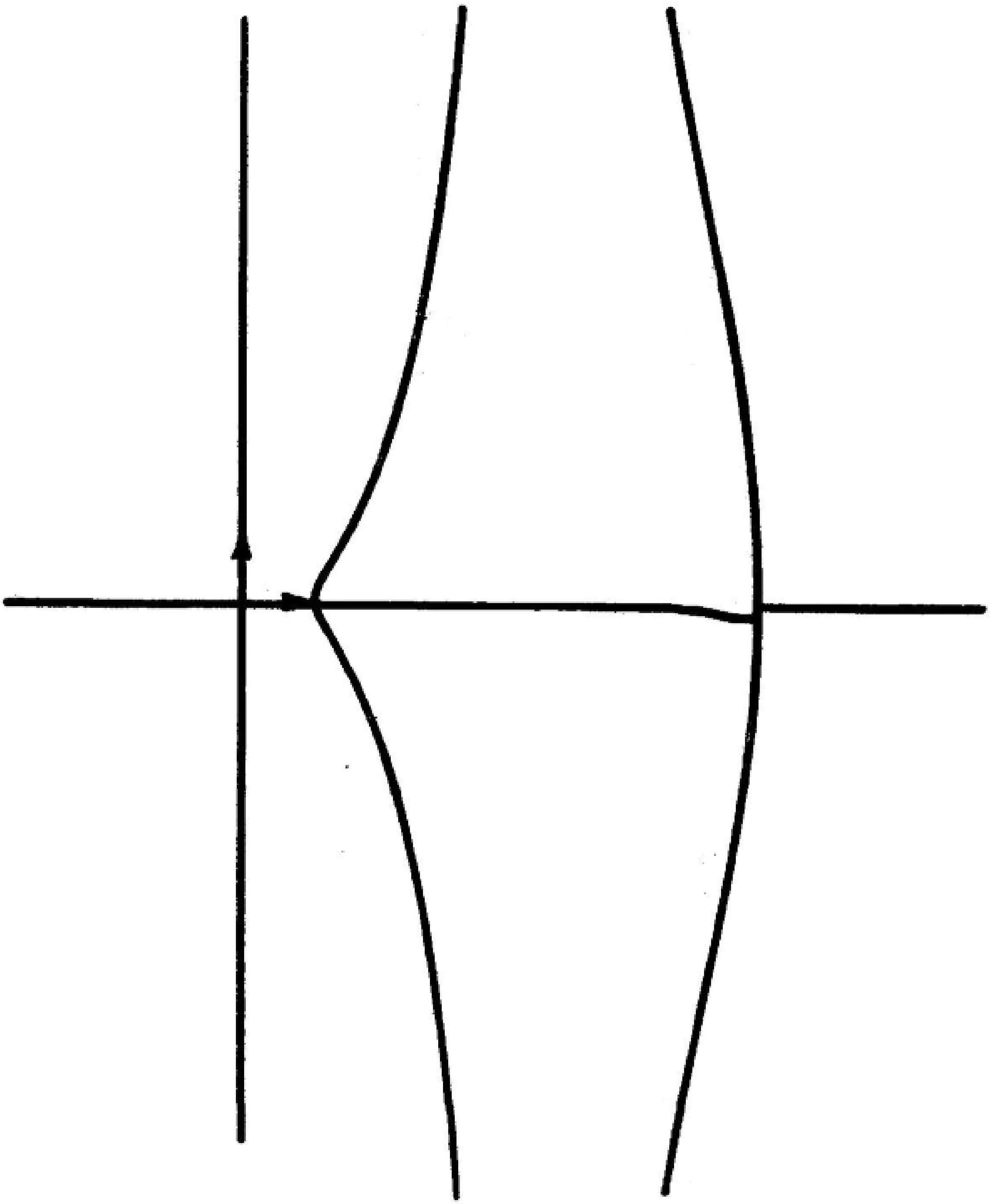
17. CONCHOIDE DE NICOMEDE



X = 3 + 3 COS(T) Y = 3 TG(T) + 3 SIN(T) Z = 0

[-1 ⩽ T ⩽ 1] U [2,14 ⩽ T ⩽ 4,14]

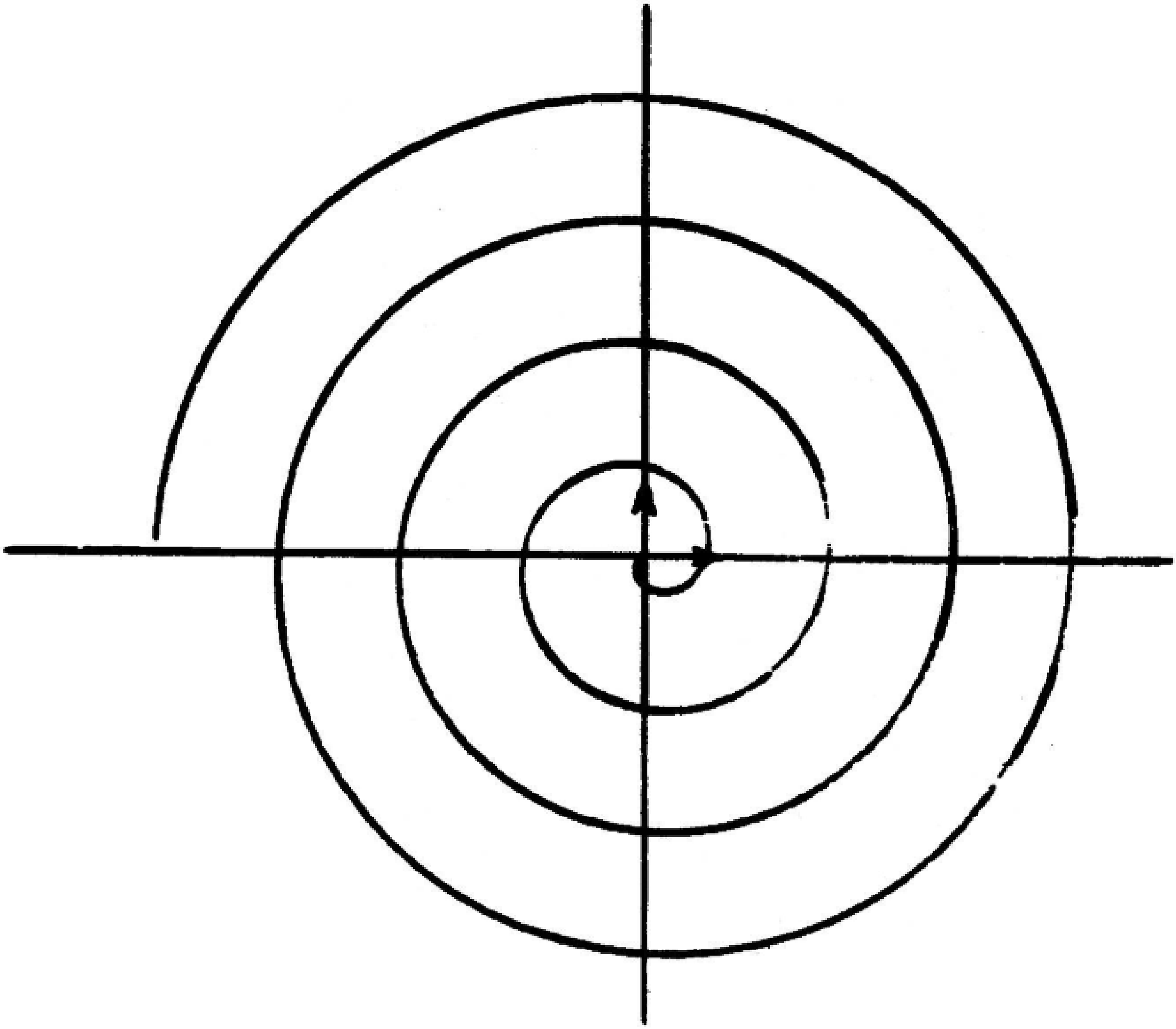
18. CONCHOIDE DE NICOMEDE



$X = 4 + 3\ \mathrm{COS}(T)$ $\qquad$ $Y = 4\ \mathrm{TG}(T) + 3\ \mathrm{SIN}(T)$ $\qquad$ $Z = 0$

$[-0{,}95 < T < 0{,}95]\ \cup\ [1{,}95 < T < 4{,}33]$

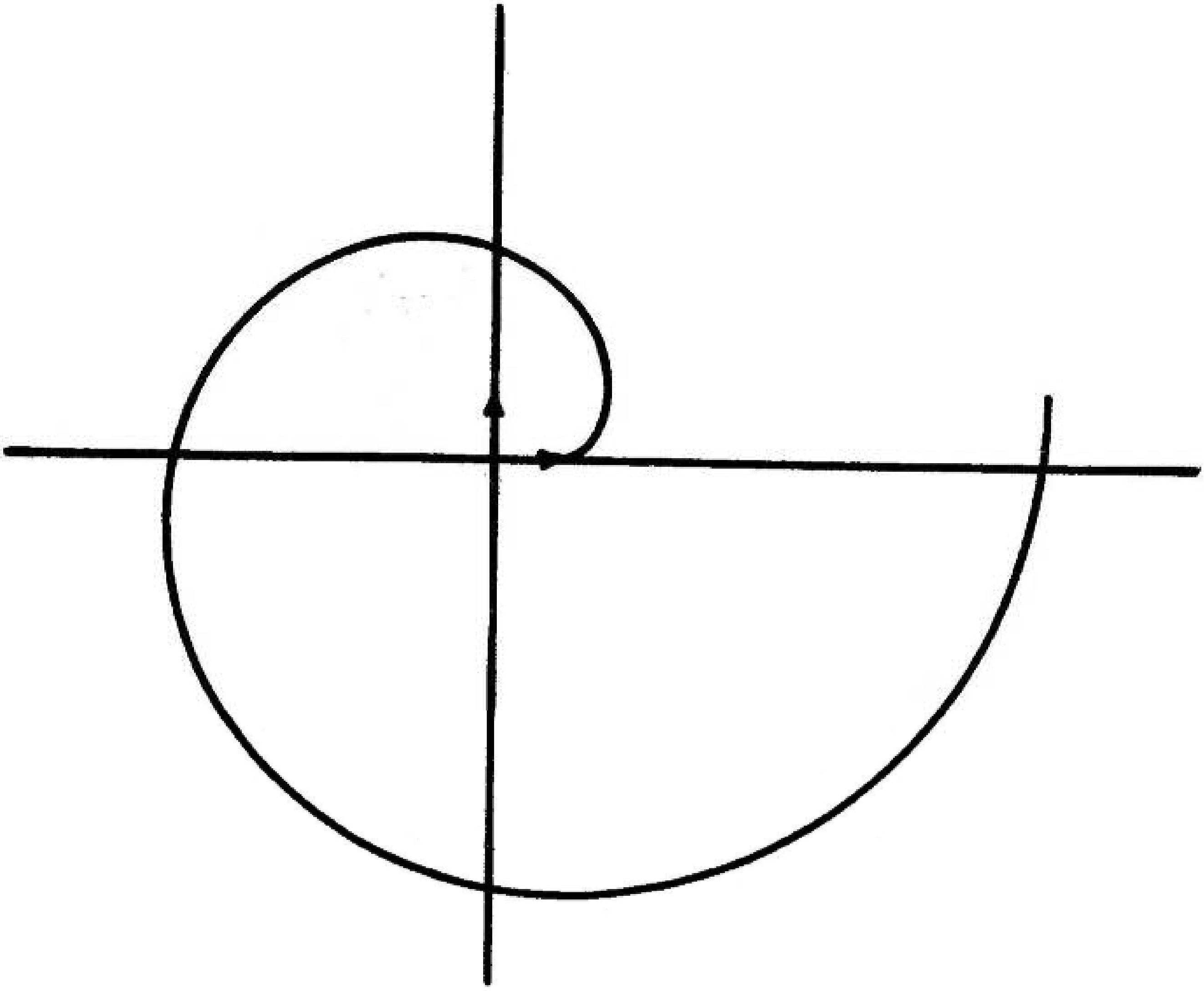
19. SPIRALE D'ARCHIMEDE



$X = -\frac{T}{2} \cos(T)$ $\qquad$ $Y = -\frac{T}{2} \sin(T)$ $\qquad$ $Z = 0$

$[0 \leqslant T \leqslant 25{,}13]$

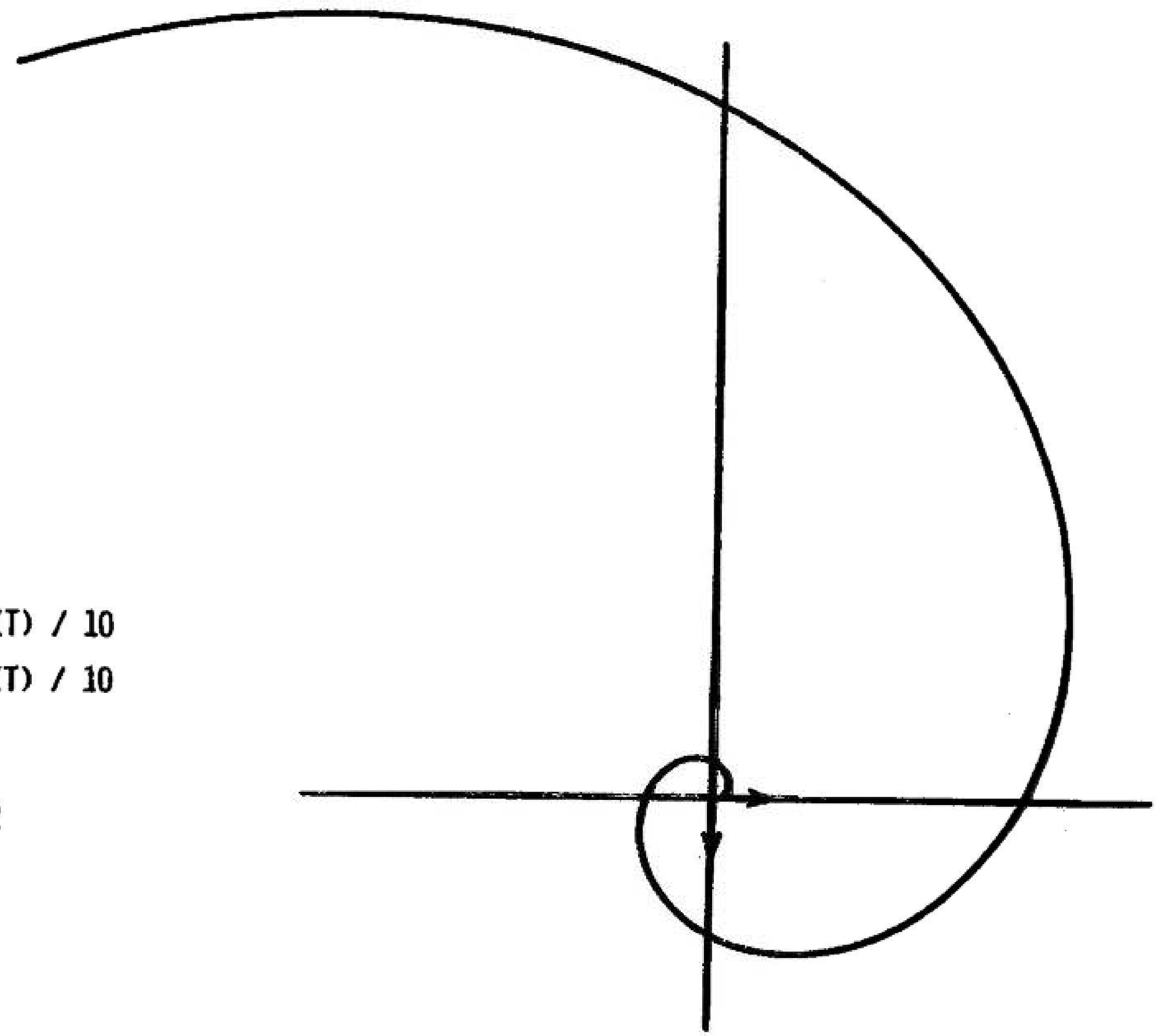
20. DEVELOPPANTE DU CERCLE



X = COS(T) + T SIN(T) Y = SIN(T) - T COS(T) Z = 0

[0 < T < 7,85]

21. SPIRALE LOGARITHMIQUE OU SPIRALE EQUIANGULAIRE



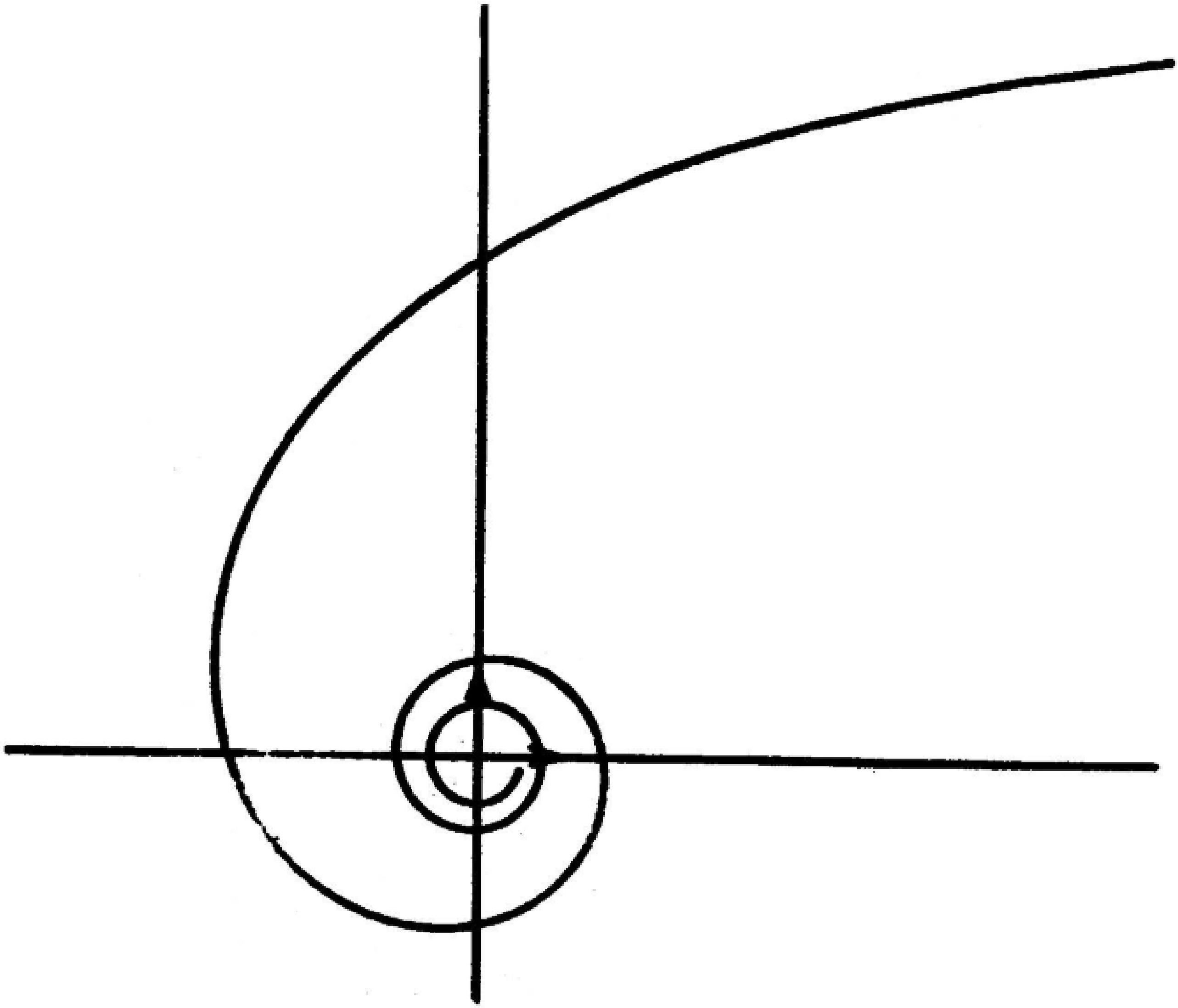
X = EXP(T/2) COS(T) / 10

Y = EXP(T/2) SIN(T) / 10

z = 0

0 < T 10,2

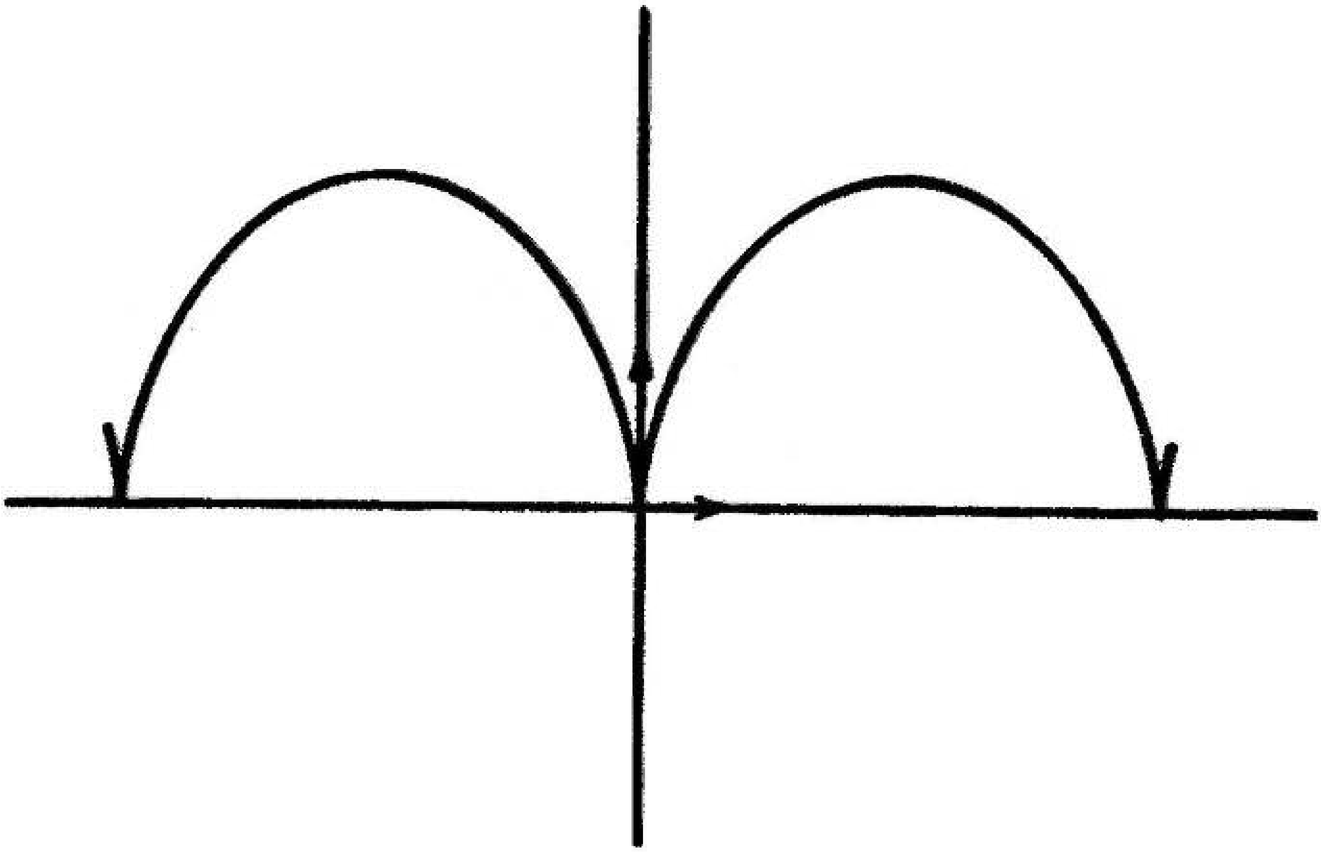
22. SPIRALE HYPERBOLIQUE



$X = 9 \dfrac{\cos(T)}{T}$ $\qquad Y = 9 \dfrac{\sin(T)}{T}$ $\qquad Z = 0$

$\left[0{,}8 \leqslant T < 18{,}5\right]$

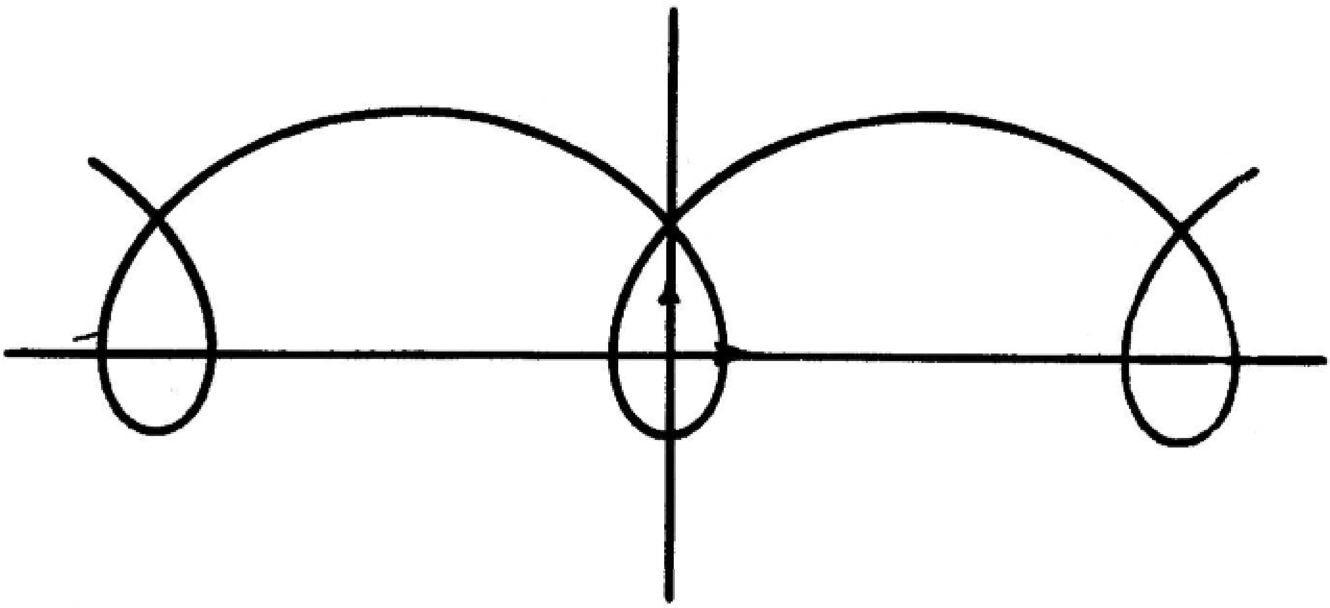
23. LA CYCLOIDE



$X = T - SIN(T)$ $\qquad Y = 1 - COS(T)$ $\qquad Z = 0$

$\left[-0,7 \leqslant T \leqslant 13,5\right]$

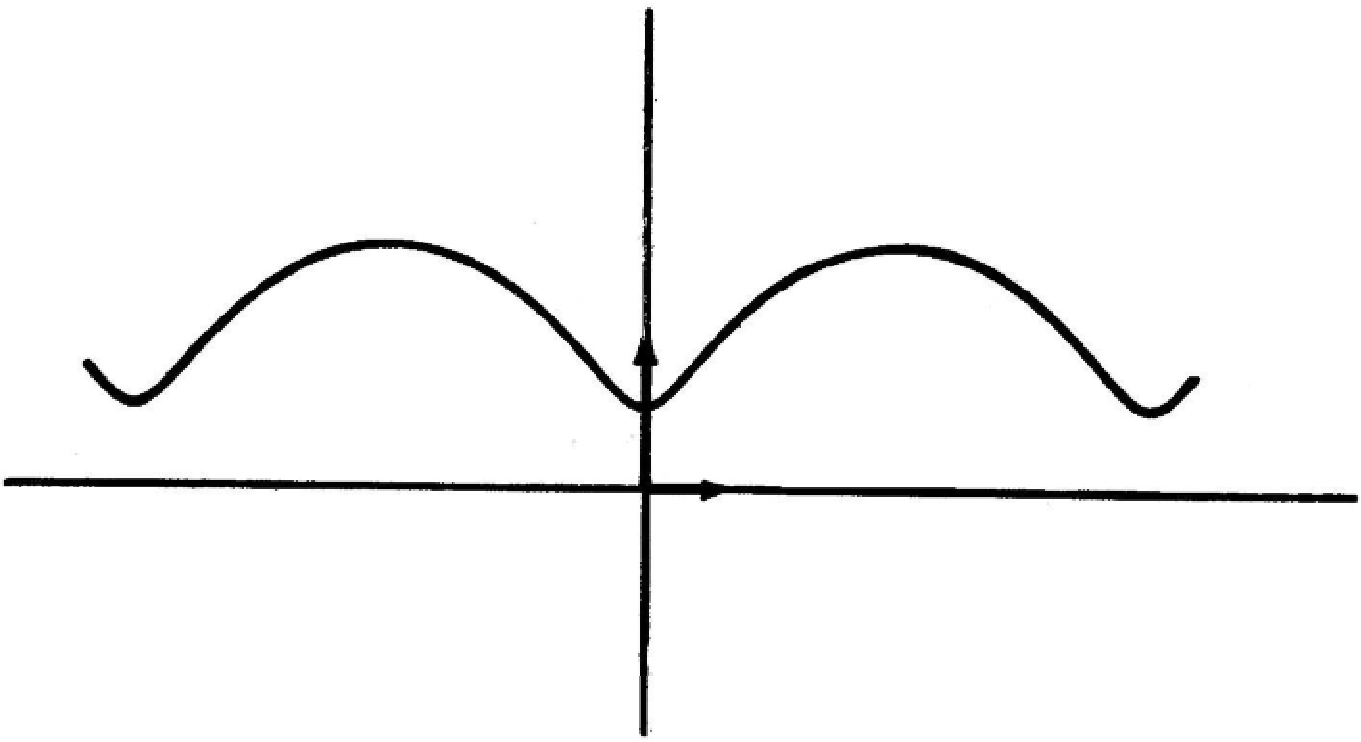
24. TROCHOIDE OU CYCLOIDE ALLONGEE



X = T - 2 SIN(T)   Y = 1 - 2 COS(T)   Z = 0

[2,3 < T < 15]

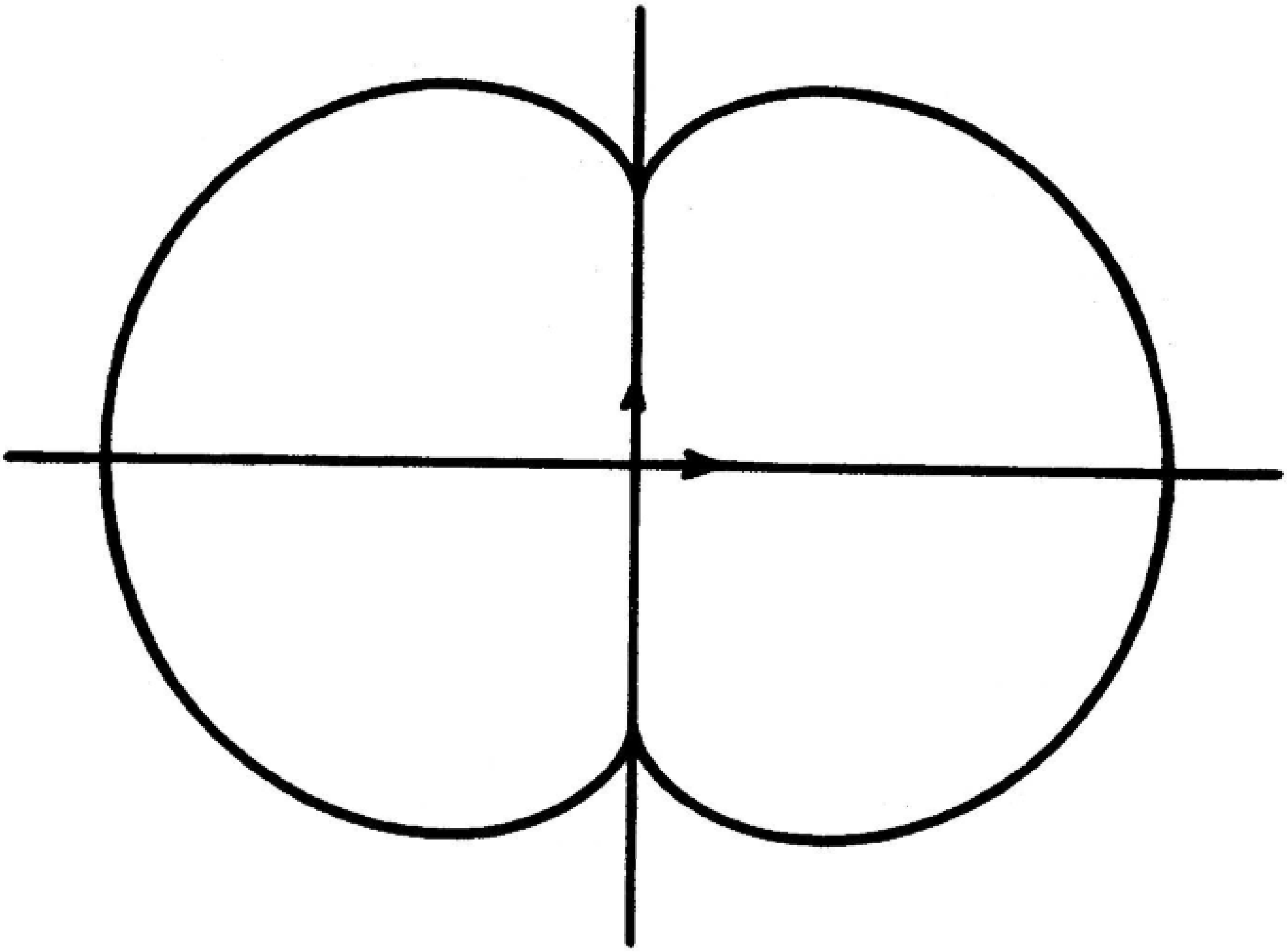
25. TROCHOIDE OU CYCLOIDE RACCOURCIE



X = T - SIN(T)/2 Y = 1 - COS(T)/2 Z = 0

[-0,7 < T < 13,5]

26. NEPHROIDE



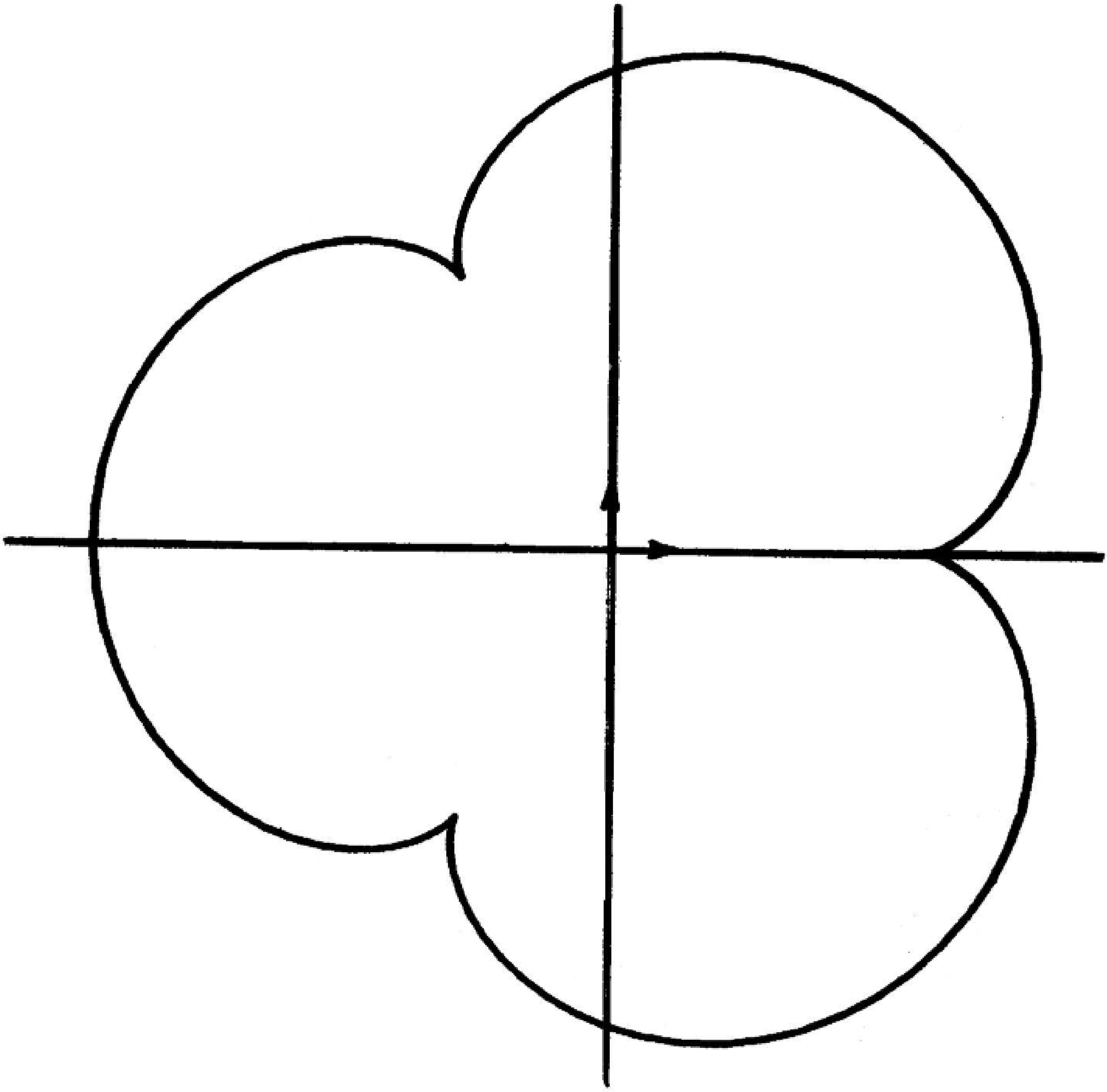
X = 4,5 COS(T) + 1,5 COS(3T)

Y = 4,5 SIN(T) + 1,5 SIN(3T)

Z = 0

[0 < T < 6,28]

27. EPICYCLOIDE (M = 3)



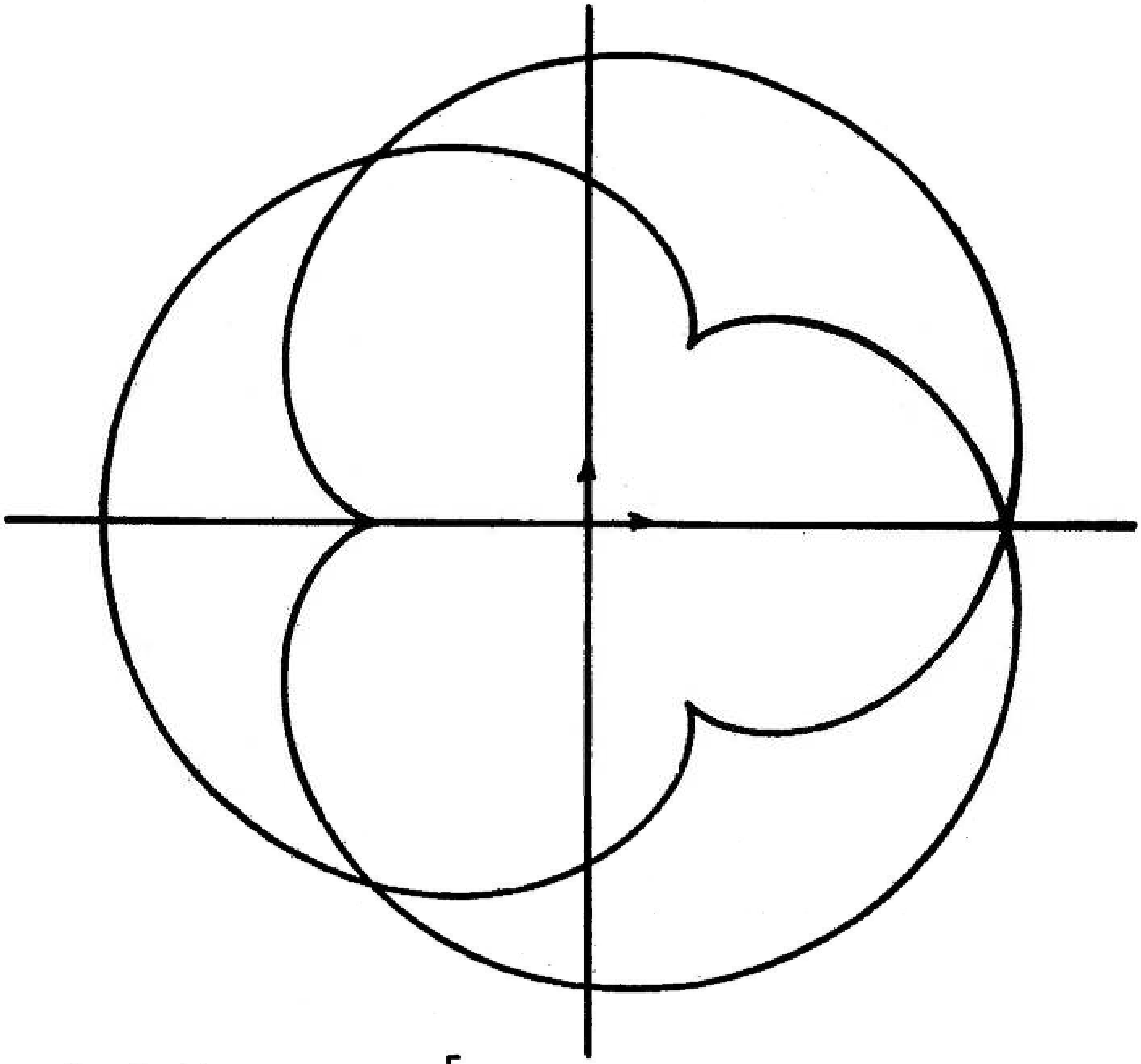
$X = 6\ COS(T) - \frac{3}{2}\ COS(4T)$

$Y = 6\ SIN(T) - \frac{3}{2}\ SIN(4T)$

$Z = 0$

$[0 < T < 6{,}28]$

28. <u>EPICYCLOIDE</u> ($M = \frac{3}{2}$)



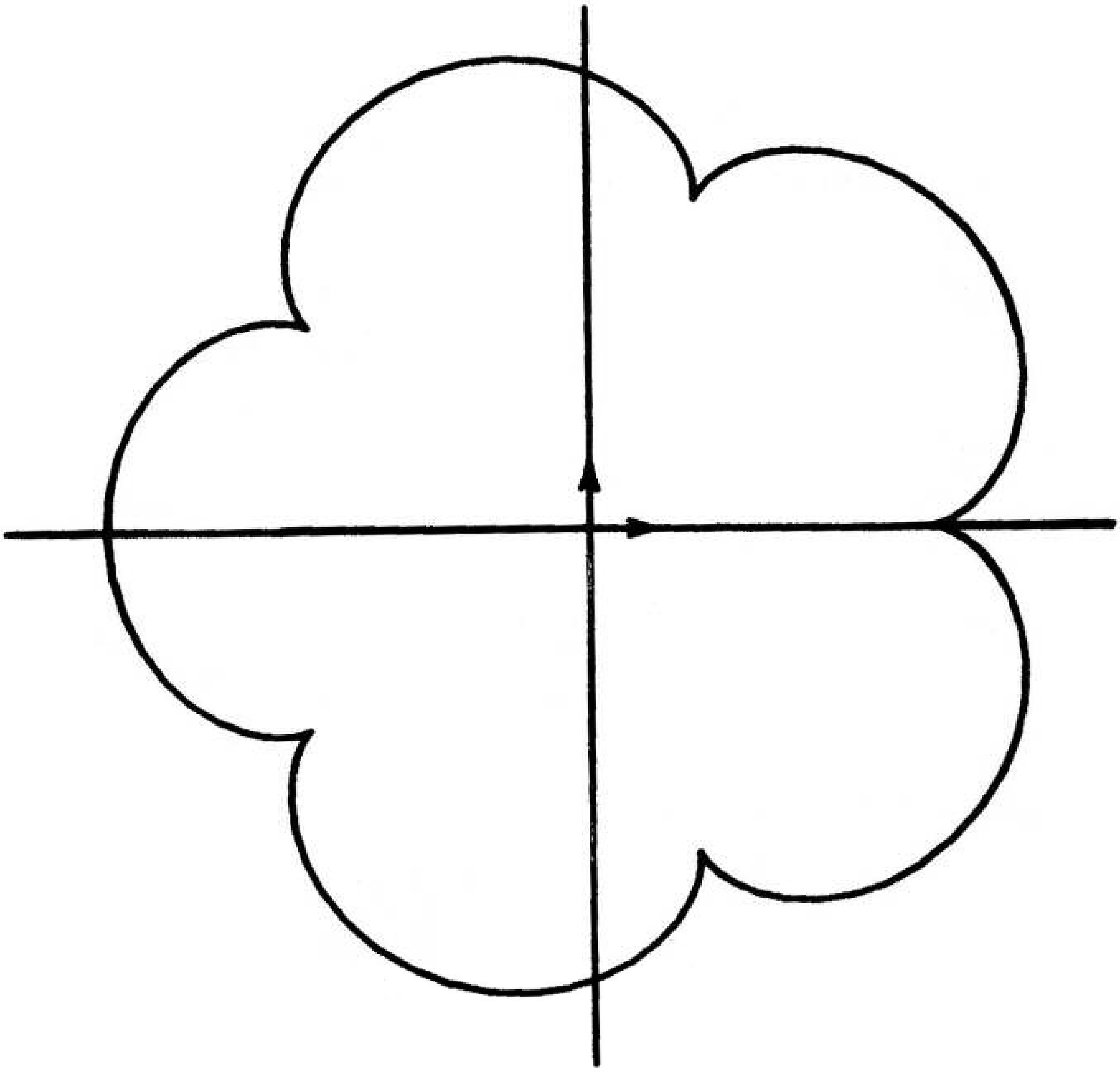
$X = -5\ COS(T) + 2\ COS(\frac{5}{2}\ T)$

$Y = 5\ SIN(T) - 2\ SIN(5T/2)$

$Z = 0$

$\left[0 < T < 12{,}56\right]$

29. EPICYCLOIDE (A = 5 , a = 1)

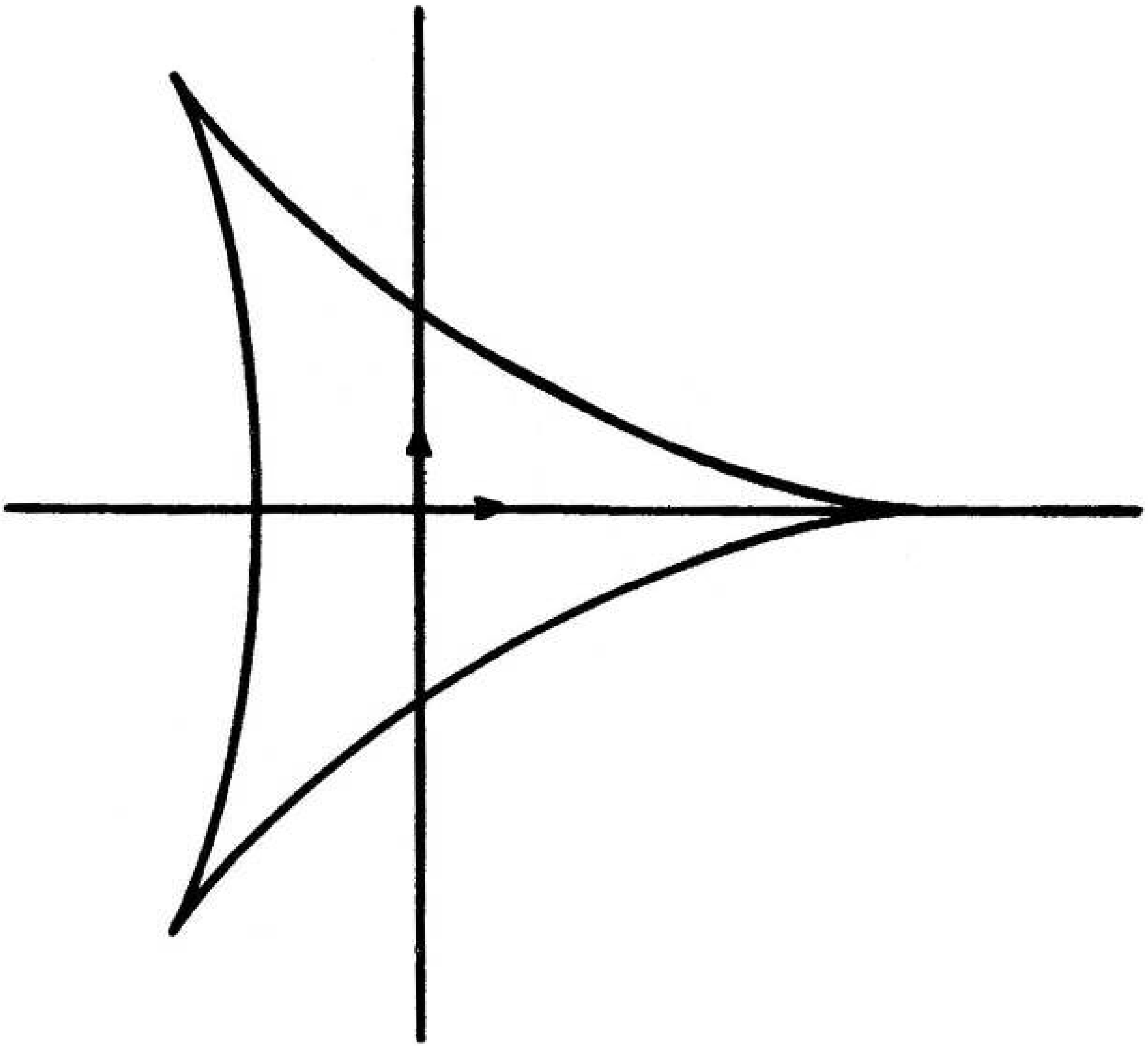


X = 6 COS(T) - COS(6T)   Y = +6 SIN(T) - SIN(6T)

Z = 0

[0 ⩽ T < 6,28]

30. DELTOIDE OU HYPOCYCLOIDE A TROIS BRANCHES



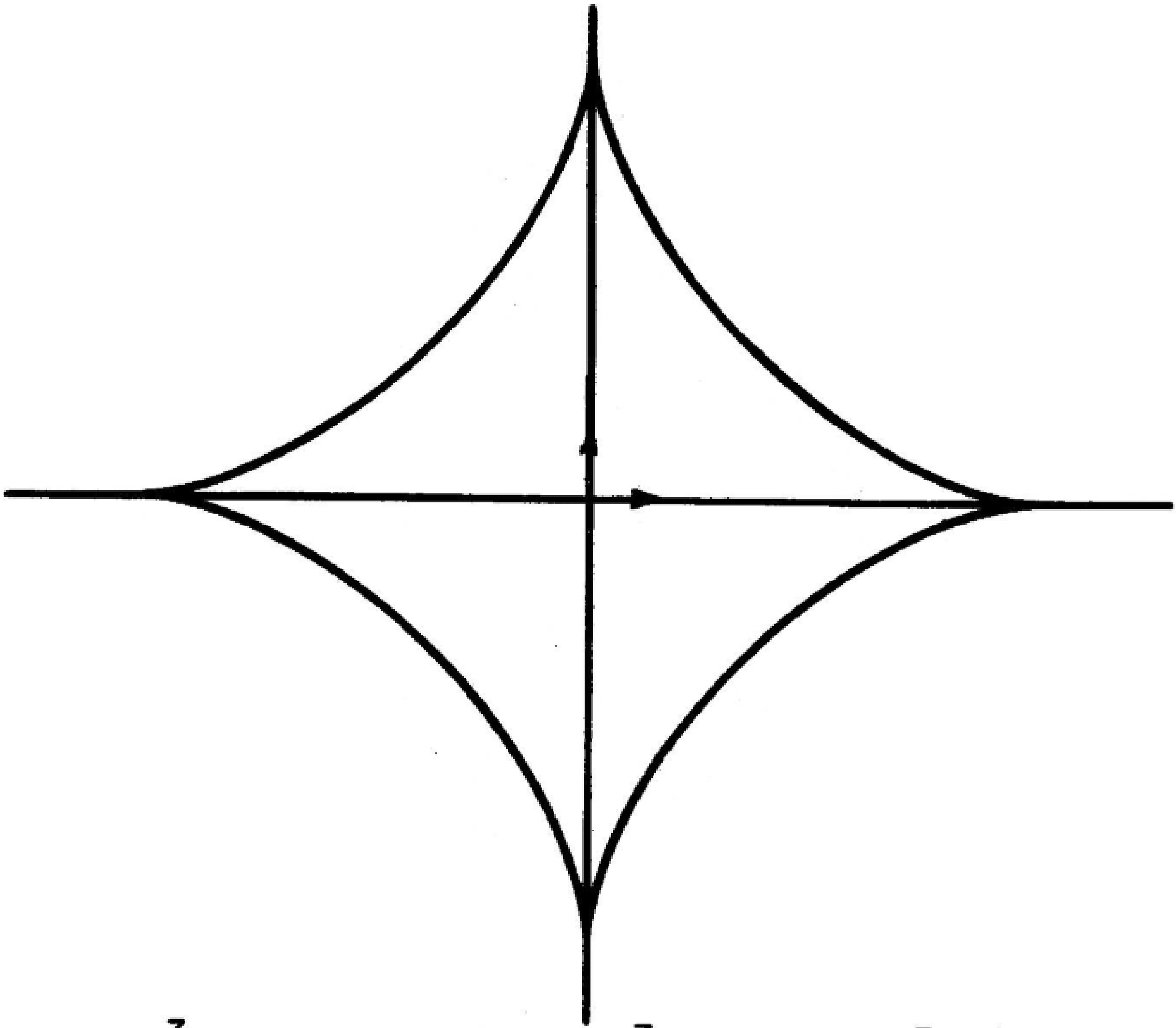
$X = 2(2\cos(T) + \cos(2T))$

$Y = 2(2\sin(T) - \sin(2T))$

$Z = 0$

$[0 \leqslant T \leqslant 6.28]$

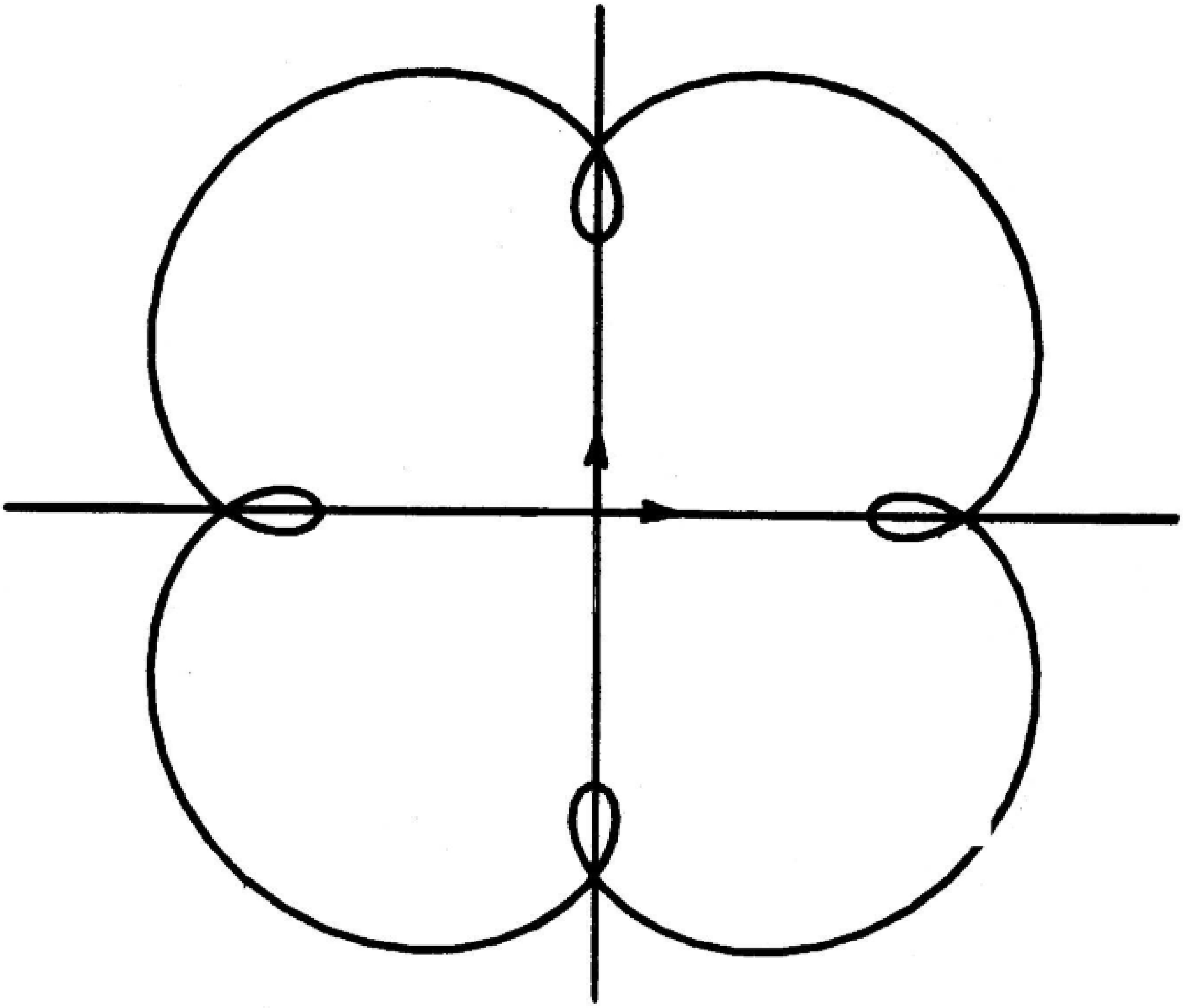
31. ASTROIDE OU HYPOCYCLOIDE A 4 BRANCHES



$X = 6 \cos^3 T$ $\qquad$ $Y = 6 \sin^3 T$ $\qquad$ $Z = 0$

$[0 < T < 6{,}28]$

32. EPITROCHOIDE (A = 4 , a = 1)

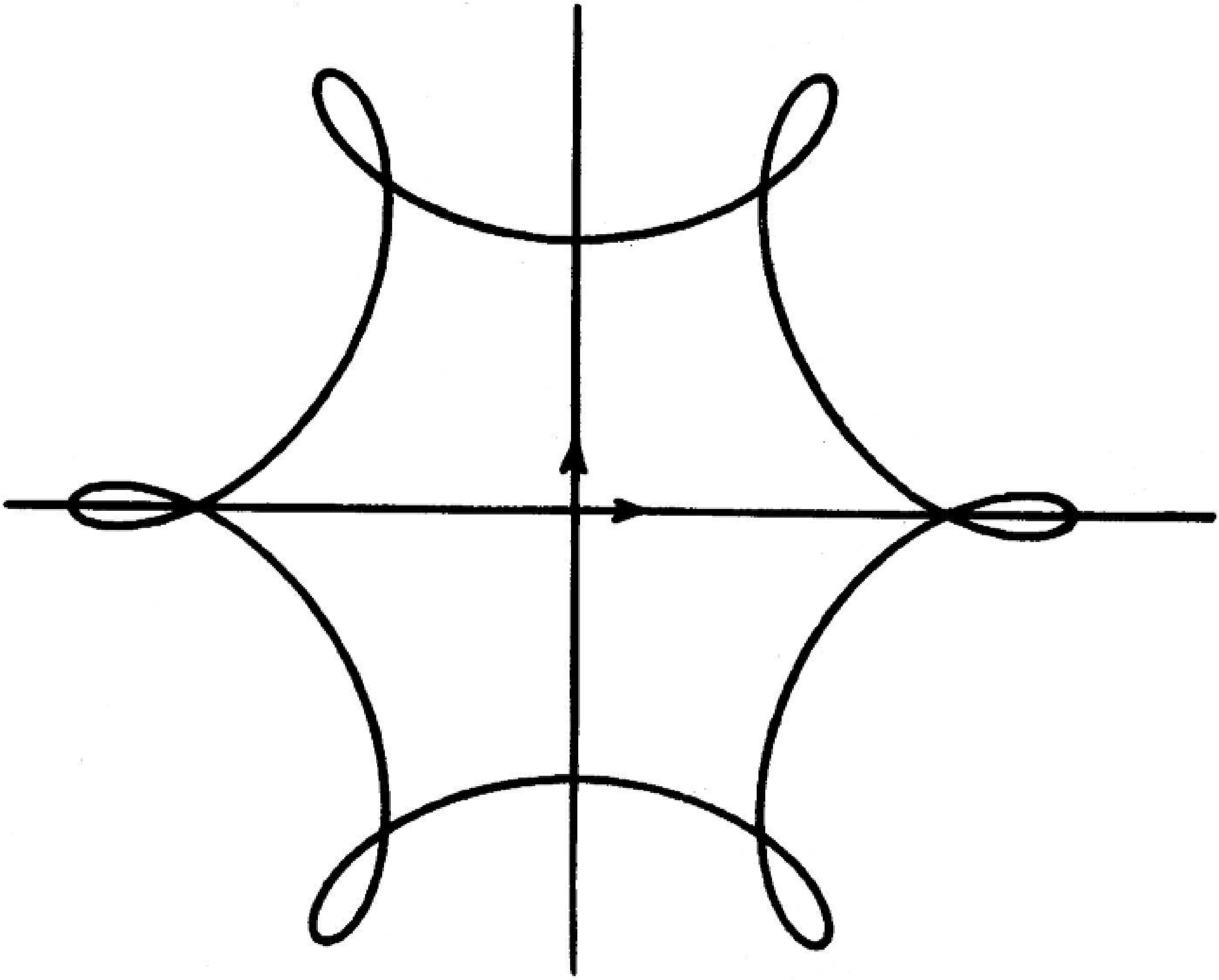


$X = 5\ \mathrm{COS}(T) - \frac{3}{2}\ \mathrm{COS}(5T)$ $\qquad$ $Y = 5\ \mathrm{SIN}(T) - \frac{3}{2}\ \mathrm{SIN}(5T)$

$Z = 0$

$\left[0 \leqslant T < 12{,}56\right]$

33. HYPOTROCHOIDE (A = 6 , a = -1)

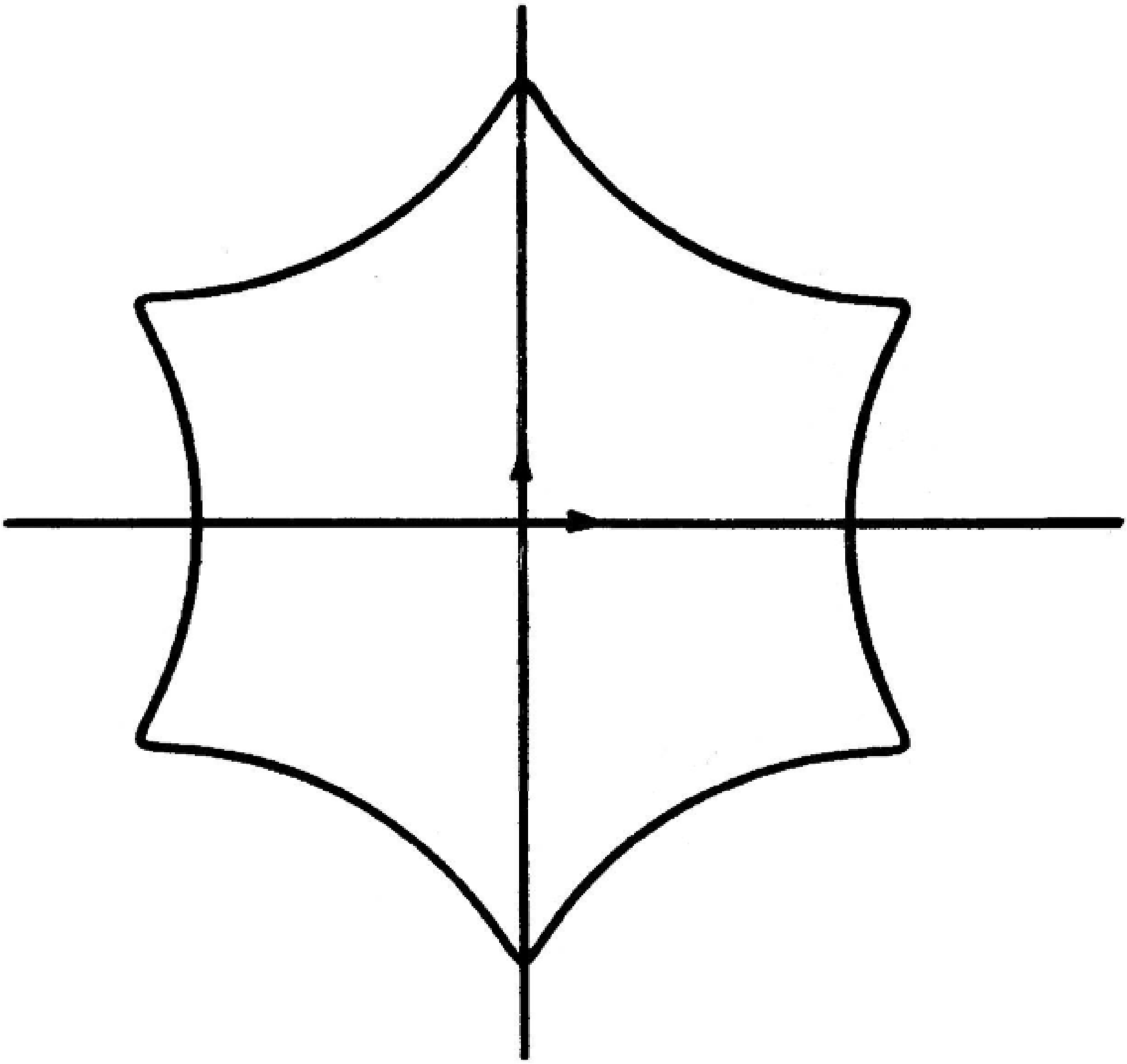


$X = 5\ \mathrm{COS}(T) + \frac{3}{2}\ \mathrm{COS}(5T)$ $\qquad$ $Y = 5\ \mathrm{SIN}(T) - \frac{3}{2}\ \mathrm{SIN}(5T)$

$Z = 0$

$[0 < T < 12{,}56]$

34. <u>HYPOTROCHOIDE (A = 6 , a = -1)</u>

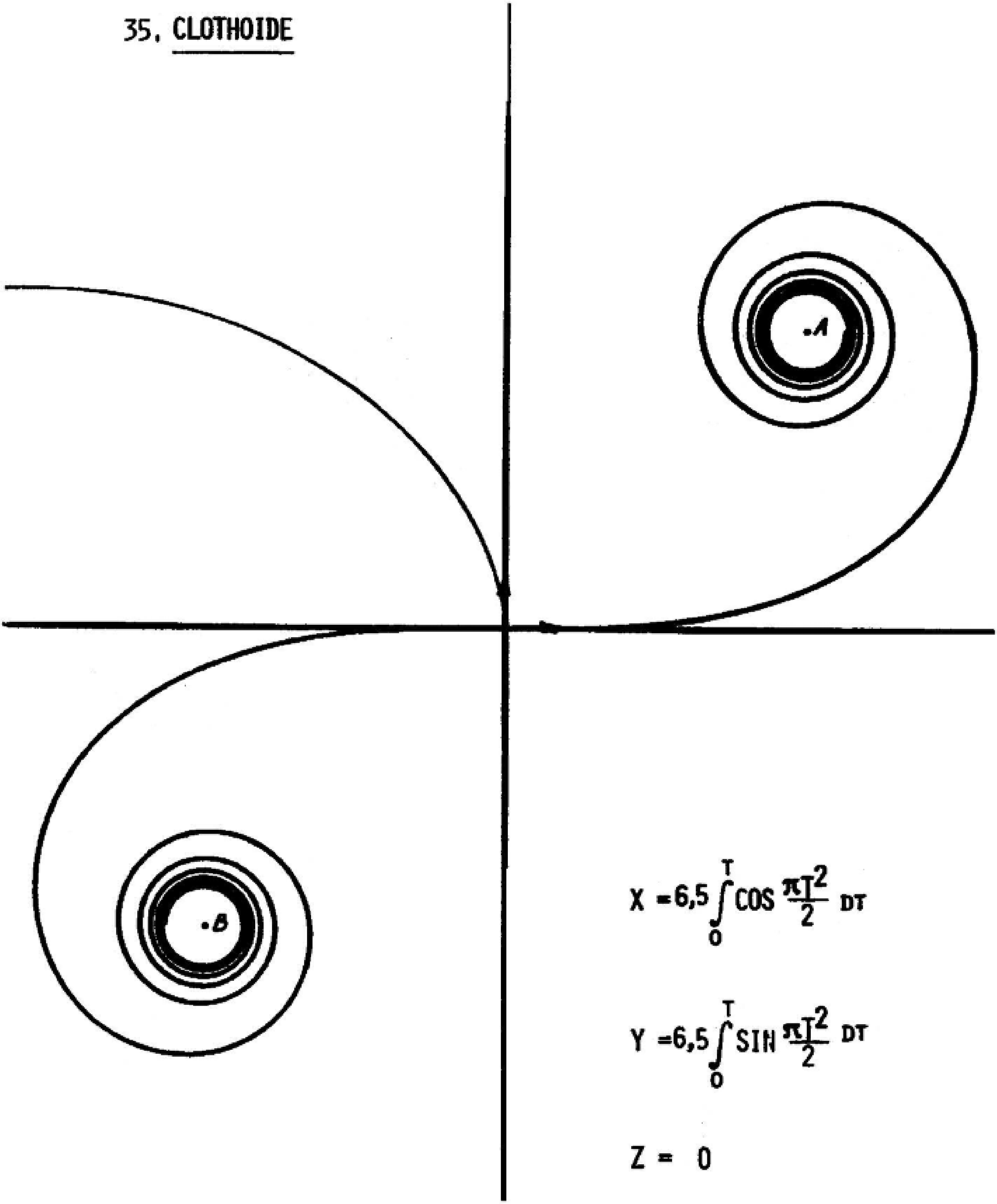


$X = 5 \cos(T) - 0{,}75 \cos(5T)$ $\qquad$ $Y = 5 \sin(T) + 0{,}75 \sin(5T)$

$Z = 0$

$[0 < T < 6{,}28]$

35, CLOTHOIDE



$$X = 6{,}5 \int_0^T \cos \frac{\pi T^2}{2} \, dT$$

$$Y = 6{,}5 \int_0^T \sin \frac{\pi T^2}{2} \, dT$$

$$Z = 0$$

DESCRIPTION DES COURBES PRECEDENTES ET INDICATIONS HISTORIQUES

La parabole: Lieu des points dont les distances a un point fixe (appelé foyer) et une droite fixe (appelé directrice) sont égales. L'équation cartésienne de la parabole est $y^2 = 2px$ (p = distance entre le foyer et la directrice). La parabole fut étudiée tout d'abord par les Grecs en tant que section du cône par un plan parallèle à une des génératrices du cône.(Menaechmus: 4ème s. avant J.C.). Ce fut Apollonius (3ème s. avant J.C.) qui donna aux coniques les noms qu'elles portent aujourd'hui.

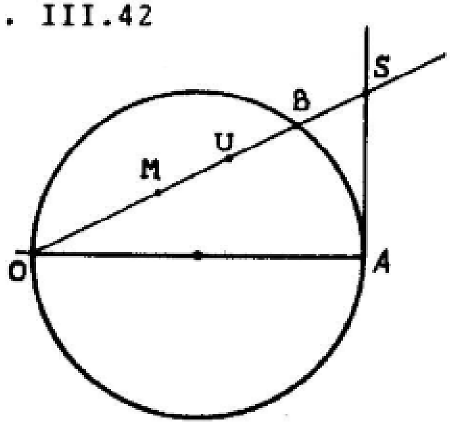
L'ellipse: Lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes F et F' (appelés foyers) est constante. Le milieu O de FF' est le centre de l'ellipse. Les droites OF et la perpendiculaire en O à OF portent le grand axe et le petit axe de l'ellipse. L'équation cartésienne est $\frac{y^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Elle fut découverte par les anciens Grecs en même temps que la parabole et l'hyperbole; plus tard Kepler en étudiant le mouvement des planètes montra que la trajectoire de Mars était elliptique, le soleil étant un des foyers de l'ellipse.

La sinusoïde: Ou courbe des sinus est la ligne définie par l'équation $y = a \sin \frac{x}{m}$. Roberval l'étudia le premier vers 1630 en lui donnant le nom de compagne de la cycloïde. Il rencontra cette courbe également en étudiant l'intersection d'un cylindre de révolution avec une sphère tangente ayant son centre sur la surface du cylindre et en développant ensuite le cylindre.

La chaînette: Son nom vient de la forme que prend une chaîne fixée à ses deux extrémités et soumis uniquement à la pesanteur. La chaînette peut-être obtenue comme enveloppe des normales à la tractrice (cf. tractrice). Son équation cartésienne est $y = a \operatorname{ch} x$. Huygens la découvrit en 1690 en résolvant un défi mathématique posé par Jean Bernoulli.

Folium de Descartes: Lieu géométrique du point M obtenu de la manière suivante. On trace un cercle de diamètre $a = OA$, sur lequel on prend un point B variable, la droite OB coupe la tangente au cercle en A au point S. On prend sur OB un segment $BU = BS$. Le point M du folium est obtenu en construisant sur la droite OS une quatrième proportionnelle aux trois segments OS, OU, OS + OU ; on a donc: $OM = \frac{OS.OU}{OS+OU}$.

Fig. III.42

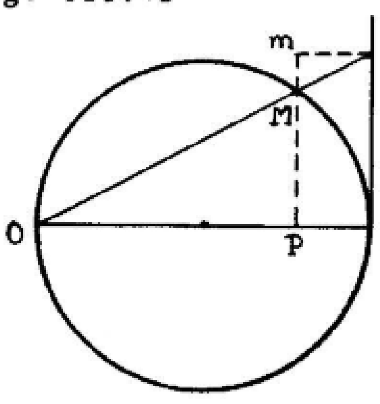


L'équation cartésienne obtenue est $x^3 - 3ax + y^3 = 0$. Cette équation fut considérée pour la première fois par Descartes en 1638, qui se borna à l'étudier analytiquement et à chercher une méthode pour construire des tangentes. Plus tard Huygens détermina la forme de la courbe et l'expression de la valeur de ses aires.

La parabole semi-cubique: On désigne sous le nom de parabole les lignes définies par l'équation $y = a^{1-k} x^k$ ou k représente un nombre réel positif. Si k est rationnel, les paraboles sont algébriques et s'écrivent $a^{m-n} y^n = x^m$. Ces courbes furent étudiées par Fermat, Roberval, Descartes, Cavalieri, Wallis... En faisant $m = 3$ et $n = 1$ on obtient $a^2y = x^3$ qui donne la parabole semi-cubique.

La boucle d'Agnesi: Lieu géométrique du Point M obtenue de la manière suivante. On trace le cercle de diamètre $OA = a$. Une sécante quelconque OM coupe la tangente en A au point N on projette M en P sur OA et on termine le rectangle ANMP. En posant $OP = x$ et $mP = y$ on obtient l'équation $xy^2 = a^2(a - x)$. Cette courbe fut étudiée en particulier par Agnesi, femme illustre qui

Fig. III.43

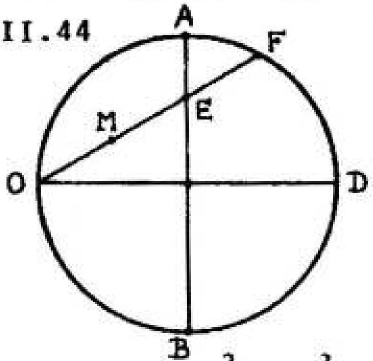


lui donna le nom de versiera. Mais Fermat l'étudia bien avant, ainsi que Huygens qui s'était intéressé à sa quadrature. On montre que l'aire comprise entre la cubique d'Agnesi et son asymptote est quatre fois celle du cercle MAO.

<u>La cardioïde</u>: Soit (C) un cercle fixe et O un point fixe sur sa circonférence, la cardioïde est l'enveloppe des cercles centrés sur (C) et passant par O. Elle s'obtient aussi comme cas particulier du limaçon de Pascal. Son équation polaire est $\rho = a + a \cos\theta$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$. Castillon lui donna le nom de cardioïde en 1741. Mais elle fut étudiée bien avant par Vaumesle en tant que cycloïde circulaire ou épicycloïde.

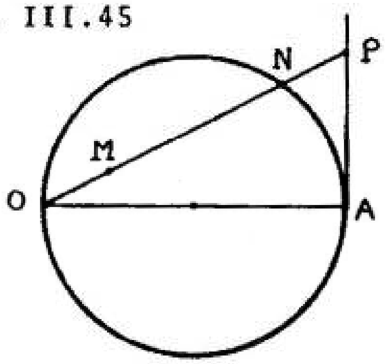
<u>La strophoïde droite</u>: Soit (C) un cercle et OD, AB deux diamètres perpendiculaires. Une sécante quelconque issue de O coupe AB en E et le cercle en F. Soit M sur OF tel que OM = OF - OE. Le lieu de M est la courbe citée. Si OD et OA ne sont pas perpendiculaires la strophoïde est dite oblique. L'équation cartésienne est $(x^2 + y^2)\, x = a\,(x^2 - y^2)$. Cette courbe fut étudiée tout d'abord par Roberval sous le nom de pteroïde puis plus tard par Moivre 1715 et Agnesi (1748).

Fig.III.44



<u>La cissoïde</u>. Soit (C) un cercle de diamètre OA et AP la tangente en A a (C). OP coupe (C) en N. Prenons sur OP un point M tel que OM = NP. Le lieu de M est une courbe désignée sous le nom de cissoïde de Dioclès. Son équation cartésienne est $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ la découverte de cette courbe remonte aux Grecs et Dioclès la rencontra en s'attaquant à la duplication du cube. Plus tard Sluse et Wallis (17^e s.

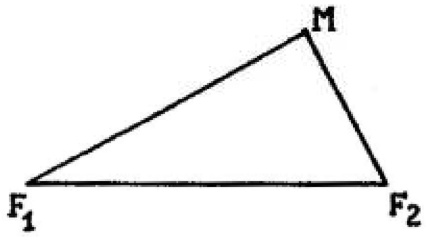
Fig. III.45



l'étudièrent plus en détail, découvrirent qu'elle avait une asymptote et calculèrent l'aire entre la courbe et son asymptote.

<u>La lemniscate:</u> Lieu des points M tels que $F_1M.F_2M = (\frac{F_1F_2}{2})^2$ où F_1, F_2 sont deux points fixes.

Fig. III.46



C'est un cas particulier des ovales de Cassini. Son équation cartésienne est $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ et son équation polaire $\rho = a\sqrt{2\cos 2\theta}$. Cette courbe fut découverte par Bernouilli suite à un problème posé par Leibniz qui a pour but de trouver la courbe que doit décrire un point soumis à la pesanteur, et qui s'approche uniformément d'un point donné. Euler plus tard, en donna la théorie analytique.

<u>Le limaçon de Pascal</u>: Soit (C) un cercle de diamètre a et OM une sécante quelconque. Portons de part et d'autre du point M deux points A et B tels que MA = MB = h. Le lieu de ces points est une conchoïde nommée par Roberval Limaçon de Pascal. L'équation polaire de cette courbe est $\rho = a \cos\theta \pm h$. Roberval dans un mémoire célèbre "Observations sur la composition des mouvements..." étudie en particulier cette courbe et en cite plusieurs propriétés dont une d'Etienne Pascal père du célèbre philosophe Blaise.

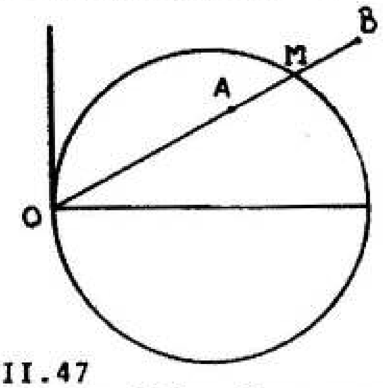


Fig. III.47

<u>La conchoïde de Nicomède</u>: Lieu géométrique des points M pour lesquels OM = OP $\pm$ h. Son équation cartésienne s'écrit: $(x-a)^2(x+y^2) - \ell^2x^2 = 0$. Nicomède a vécu au troisième siècle avant J.C. ses ouvrages ne nous sont point parvenus mais Proclus et Pappus font mention de ce géométrie et de la conchoïde. En résolvant le problème de la trisection de l'angle ainsi que celui des deux moyennes proportionnelles Nicomède rencontra cette courbe. Cette courbe fut étudiée plus en détail au XVII^e siècle par Fermat, (1636) puis par Descartes.

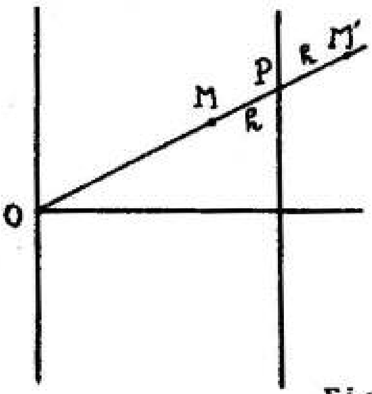


Fig.III.48

<u>La spirale d'Archimède</u>: Courbe décrite par un point M se mouvant avec une vitesse constante v sur un rayon tournant autour d'un pôle O avec une vitesse constante w. L'équation polaire est $\rho = a\theta$ (a = v/w). Archimède, grand géomètre de Syracuse, consacra un traité spécial a cette courbe et à ses propriétés. Aujourd'hui les méthodes analytiques permettent d'abréger considérablement ses démonstrations géométriques traduites en français par Peyrard. Archimède présenta en particulier la méthode de construction de la tangente à partir de la normale à la courbe et cette manière de faire est considérée comme le plus ancien exemple connu.

<u>La développante du cercle</u>: Courbe décrite par l'extrémité d'un fil tendu se déroulant d'un cercle, $\widehat{AB}$ = BM. Cette courbe est un cas particulier d'épicycloïde et correspond au cas ou le rayon du cercle mobile devient infini. Les équations paramétriques sont: $x = R(\cos t + t \sin t)$, $y = R(\sin t - t \cos t)$. Huygens en 1693, chercha un moyen de mettre les

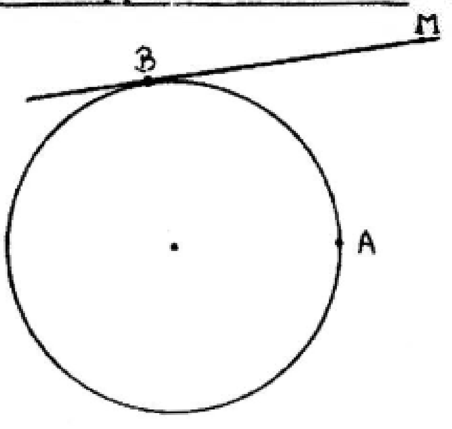
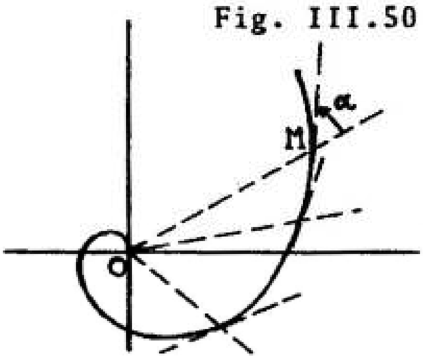


Fig. III.49

horloges à pendule embarquées dans des bateaux à l'abri des mouvement de ces derniers, et dans l'appareil imaginé la développante du cercle joue un rôle essentiel. Bernoulli en 1722 dans les "Lectiones Mathematicae" en a déterminé les aires et la longueur.

La spirale logarithmique: courbe coupant sous un même angle tous les rayons issus d'un même point O.

Fig. III.50



l'équation polaire est $\rho = a\, e^{k\theta}$. On la désigne aussi sous le nom de spirale équiangulaire. Descartes (1638) rencontra cette courbe en cherchant la figure qu'un point pesant décrit quand il descend jusqu'au centre de la terre suivant la loi du mouvement dans le plan incliné. Torricelli s'est occupé vers le même temps de cette spirale trouvant les aires et la longueur des arcs. Wallis en 1659 retrouvait analytiquement tous ces résultats, tandis que Jacques Bernoulli en 1691 les retrouvait par le calcul intégral.

La spirale hyperbolique: Spirale inverse de celle d'Archimède et se traduit donc par l'équation polaire $\rho\theta = m$. Cette courbe fut envisagée par Varignon en 1704 puis par Bernoulli en 1710. Le premier cité étudia dans un mémoire les propriétés infinitésimales d'une classe générale de spirales. Bernoulli a montré que cette spirale est une des courbes que peut décrire un point attiré vers un centre par une force inversement proportionnelle au cube de sa distance à ce centre (la spirale logarithmique satifait au même problème).

La cycloïde: Courbe décrite par un point d'un cercle roulant sans glissement sur une droite. Des équations sous forme paramétrique s'écrivent $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.Galilée chercha le premier a trouver l'aire de cette courbe mais c'est son élève Toricelli qui en trouva la formule exacte. Roberval, établit la longueur de l'arc. Pascal proposa une série de problèmes liée à cette courbe avec un prix comme récompense, que Wallis résolut mais Pascal refusa d'attribuer le prix ce qui entacha l'histoire de la roulette de polémiques nationales.

Les cycloïdes allongées ou raccourcies: Considérons un cercle sur une droite. Le lieu d'un point intérieur (respectivement extérieur) au cercle quand ce dernier roule sans glisser sur cette droite est une cycloïde raccourcie (respectivement allongée). Les équations paramétriques sont $x = rt - a \sin t$, $y = r - a \cos t$. Ces cycloïdes ont été envisagées par les géomètres qui ont étudié la cycloïde ordinaire, à savoir Roberval, Descartes, Pascal, Wallis.

Epicycloïde et hypocycloïde. C'est la courbe engendrée par un point d'une circonférence, quand elle roule sans glisser sur une autre circonférence fixe. Si les deux circonférences sont séparées par la tangente commune on a une épicycloïde, si elle sont d'un même côté de la tangente commune on a une hypocycloïde. Les équations paramétriques sont $x = (A + a) \cos\theta - a \cos\left(\frac{A + a}{a}\theta\right)$ et $y = (A + a) \sin\theta - a \sin\left(\frac{A + a}{a}\theta\right)$, A = rayon du cercle fixe, a = rayon du cercle mobile (a positif = épicycloïde a négatif = hypocycloïde). La première mention de ces courbes se trouve dans un ouvrage d'Albert Dürer (1606) où l'artiste s'occupa de leur construction. Mais c'est Newton en 1686 qui exposa quelques unes de leurs propriétés, à savoir la longueur des arcs, la développée etc.... La Hire en (1694) s'intéressa à leur quadrature et à l'étude de roues à dent de forme épicycloïdale. Il semble qu'auparavant Desargnes ait construit ces roues. Plus tard Bernoulli et L'Hospital étudièrent ces courbes en utilisant le calcul différentiel et intégral.

La deltoïde: (cf hypocycloïde) le problème de la détermination d'une courbe telle que les rayons lumineux issus d'un foyer reviennent au point de départ après deux réflexions sur la courbe a amené Euler à s'occuper pour la première fois de cette courbe (1745). Plus tard Steiner (1857) puis Schröter et Cremona étudièrent plus en détail cette courbe appelée aussi hypocycloïde triangulaire ou de Steiner.

Epitrochoïde et hypotrochoïde: (épicycloïde ou hypocycloïde raccourcie ou allongée) courbe décrite par un point situé à l'extérieur ou a l'intérieur d'un cercle qui roule sans glissement sur un autre cercle, à l'extérieur (épicycloïde) ou à l'intérieur (hypocycloïde) de ce dernier. Les équations paramétriques sont:

$$x = (A + a) \cos \theta - a \cos \frac{A + a}{a} \theta$$

$$y = (A + a) \sin \theta - a \sin \frac{A + a}{a} \theta$$

L'étude des propriétés de ces courbes se fit assez tard (XIX^{e} siècle) par Fouret (1869) qui généralisa l'étude des épicycloïdes et hypocycloïdes ordinaires. Chasles (1875) généralisa le théorème de La Hire sur la cycloïde ordinaire a savoir " si l'on circonscrit à une epicycloïde ordinaire des angles tous égaux entre eux, leur sommets sont situés sur une épicycloïde allongée au raccourcie". L'ellipse est un cas particulier d'hypocycloïde allongée ou raccourcie (on fait $A = -2a$).

La clothoïde: Courbe pour laquelle le rayon de courbure est inversement proportionnelle à l'arc, $r = \frac{a^2}{s}$. Jacques Bernoulli fut le premier a donner une construction de cette courbe, retrouvée, plus tard par Cornu (1864) en étudiant la diffraction de la lumière. Cette courbe est très utilisée dans la construction de l'axe d'une autoroute.