

# Physique Générale

## INTRODUCTION

Importance de la Physique, mesures, unités

A lire

Comment, quand vous êtes à la plage, en observant le Soleil se coucher sur l’océan, vous pouvez estimer le rayon de la Terre

TRAN Minh Tâm

### Table des matières

<b>La Physique : son but, ses méthodes, son état actuel</b>	<b>1</b>
But de la Physique, ses méthodes . . . . .	1
La Physique moderne . . . . .	4
<b>La mesure en Physique</b>	<b>7</b>
Mesurer . . . . .	7
Le Système International d’unités . . . . .	8

La longueur . . . . .	9
Le temps . . . . .	10
La Masse . . . . .	11
Analyse dimensionnelle . . . . .	12
Détermination du rayon de la Terre . . . . .	13

## But de la Physique, ses méthodes

La Physique étudie la *composition* et le *comportement* de la matière et ses *interactions* au niveau le plus fondamental. Cette étude inclut la description et la compréhension de la Nature et des phénomènes naturels, mais comporte aussi un volet prédictif qui met les modèles à l'épreuve l'expérience.

## Domaine d'application

Le domaine d'application de la Physique est très vaste, puisqu'il court de la Physique des particules (*le minuscule*) à l'Astrophysique (*l'immense*) en passant par la Physique atomique et moléculaire, par la Physique de la matière condensée ; des applications de la Physique peuvent être trouvées en Chimie, en Biologie, en Sciences de la Terre, en Astronomie et Astrophysique et en Sciences de l'Ingénieur.

## La Physique classique

C'est celle qui était en vigueur jusqu'au début du 20<sup>ème</sup> siècle ; elle était constituée des trois piliers suivants :

- la **mécanique classique** : description du mouvement des particules et des systèmes de particules,
- l'**électromagnétisme** : étude des champs électriques et magnétiques, des ondes électromagnétiques et de l'optique,
- la **thermodynamique** : étude des transferts de chaleur, des propriétés des systèmes à grand nombre de particules.

## La Physique moderne

Depuis le début du 20<sup>ème</sup> siècle, l'expérience a montré que la Physique classique ne pouvait expliquer les phénomènes microscopiques ni ne s'accommodait des phénomènes dans lesquels les vitesses des particules sont très grandes. La Physique Moderne se compose des trois piliers suivants :

## La Physique : son but, ses méthodes, son état actuel

- la **relativité restreinte**, qui décrit le comportement des particules dotées de grande vitesse ; cette théorie a changé notre vision de l'espace et du temps,
- la **mécanique quantique**, qui décrit le monde sub-microscopique ; cette théorie nous a obligés à avoir une autre vision de la réalité,
- la **relativité générale**, qui décrit les phénomènes à très large échelle, met en relation la gravitation et les propriétés géométriques de l'espace.

La Physique utilise des **notions**, s'aide de **modèles** et développe des **théories**.

### Les notions

Une notion est une idée, une grandeur physique utilisées pour analyser les phénomènes physiques.

Exemples : espace, énergie, temps, longueur, masse, charge électrique, etc...

Certaines de ces notions peuvent être des *grandeurs mesurables*, certaines sont faciles à appréhender intuitivement, d'autre absolument pas : de la charge électrique, par exemple, nous pouvons connaître les *effets*, mais sommes incapable de dire ce qu'elle *est*.

### Les lois et les principes

Par l'observation, par l'analyse, nous pouvons tirer des *relations* entre les grandeurs physiques. Ces relations qui peuvent être mathématiques, sont appelés **lois**.

Exemple : la deuxième **loi de Newton** exprime la relation qui existe en Physique classique entre les grandeurs "force" et "accélération".

Les *lois* peuvent être limités à un certain domaine de la Physique (cf. l'exemple ci-dessus), certaines d'entre elles ont une portée très générale sur le fonctionnement de la Physique : ce sont des **principes**.

Exemples :

- le principe de la conservation de l'énergie,
- le principe d'invariance des lois de la Physique selon le lieu et l'instant.

## Les modèles

Un *modèle* est une analogie ou une représentation pratique d'un système physique. Des simplifications sont parfois nécessaires dans le modèle. Les modèles sont parfois utiles comme des étapes intermédiaires. Il existe aussi des *modèles purement mathématiques* dont les propriétés reflètent la réalité, bien que les entités mathématiques à leur base ne soient pas observées.

### Exemples

- le modèle géocentrique a perduré jusqu'à Copernic au 16<sup>ème</sup> siècle,
- le modèle planétaire de **Bohr** pour l'atome d'hydrogène marque une étape intermédiaire avant la victoire de la théorie quantique,
- le modèle des **quarks** est initialement un modèle purement mathématique. Bien qu'ils n'aient jamais été isolés, dans les expériences, tout se passe comme si les quarks étaient des particules réelles,
- le **modèle standard** donne depuis 30 ans une description des interactions des particules élémentaires qui n'a jusqu'à présent pas été prise en défaut.

## Les théories

Une *théorie* rassemble les notions, les principes, un modèle, des postulats (hypothèses de départ) pour élaborer des lois ; si les notions qu'elle a réunies proviennent de domaines différents, la théorie permet de relier ces divers phénomènes.

Une théorie doit être descriptive **et** prédictive et c'est à l'aune de l'expérimentation qu'une théorie sera acceptée ou rejetée pour le domaine considérée de l'expérimentation.

Exemple :

La théorie de la gravitation de Newton est très précise et permet, par exemple, de lancer des satellites jusqu'au confins du système solaire (capacité prédictive), comme d'expliquer les anneaux torsadés de Saturne (capacités descriptives).

### La Physique moderne

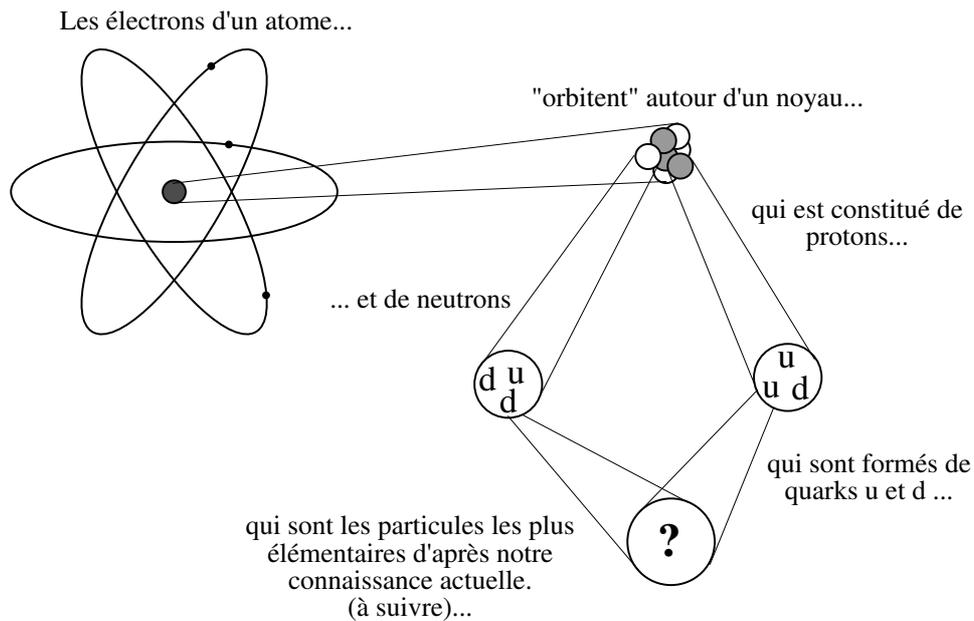
La curiosité humaine n'a pas de limite ! Nous recherchons et spéculons sur l'évolution de la **vie**, sur nos **origines** et nous nous posons des questions sur l'**origine et l'évolution de l'Univers**. Nous recherchons les réponses à ces questions dans la religion, la philosophie et, depuis peu, dans la Physique.

Il est maintenant établi que la matière est formée d'un **petit nombre d'éléments de base** sensibles à quelques **forces fondamentales** :

	Particule	Symbole	Charge	Interaction
LEPTONS	Neutrino électron	$\nu_e$	0	faible
	Electron	$e^-$	-1	électro – faible
	Neutrino mu	$\nu_\mu$	0	faible
	Muon	$\mu^-$	-1	électro – faible
	Neutrino tau	$\nu_\tau$	0	faible
	Tau	$\tau^-$	-1	électro – faible
QUARKS	up	u	2/3	électro – faible et forte
	down	d	-1/3	électro – faible et forte
	charme	c	2/3	électro – faible et forte
	étrange	s	-1/3	électro – faible et forte
	top	t	2/3	électro – faible et forte
	bottom	b	-1/3	électro – faible et forte

La dernière colonne donne le type “d'interaction” à laquelle la particule est sensible. La notion d'interaction est explicitée ci-après.

# La Physique : son but, ses méthodes, son état actuel



Les **forces**. Les éléments de base que sont les *leptons* et *quarks* forment des structures de toutes dimensions, depuis le proton, constitué de trois quarks, aux atomes et molécules, aux liquides, solides, et aux grandes concentrations de matière que sont les étoiles et les galaxies. Pour constituer ces structures, les particules fondamentales doivent *interagir* d'une certaine façon; elles le font via quelques "interactions" fondamentales que nous pouvons considérer comme générant des *forces*.

Force	Portée	Intensité relative
Gravité	infinie	$10^{-36}$
Electro – magnétique	infinie	$10^{-2}$
Faible	$10^{-17}$ m	$10^{-6}$
Forte	$10^{-15}$ m	1

- L'interaction **gravifique**, purement attractive, est responsable de la cohésion à large échelle, c.à.d. de celle des systèmes planétaires, galactiques...
- L'interaction **électromagnétique**, répulsive et attractive, est responsable de la cohésion atomique, moléculaire, cristalline; elle est également responsable de certains phénomènes à grande échelle, comme le frottement, la tension superficielle.

- L'interaction **forte** maintient les quarks à l'intérieur du proton, comme elle maintient la cohésion des noyaux atomiques.
- L'interaction **faible** conduit à la désintégration du neutron, comme à celles du *muon* et du *tau*. La désintégration du neutron contribue pour une bonne part à la radioactivité que nous observons. L'interaction faible est aussi à l'origine, dans le coeur du Soleil, des *réactions de fusion* exothermiques des noyaux de protons en un noyau d'hélium par le processus  $p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$

( $d$  est un noyau de “deutérium” ou “hydrogène lourd”, constitué d'un proton et d'un neutron,  $e^+$  est un “positon”, antiparticule de l'électron). Il semble maintenant acquis que l'Univers a eu pour origine une explosion initiale, le **Big Bang**, il y a quelques 15 milliards années, à une époque où il était extrêmement chaud. La Physique actuelle permet de “remonter” le temps jusqu'à  $10^{-10}$  secondes.

## Mesurer

La Physique est basée sur la **mesure** qui consiste à comparer une grandeur physique à un étalon de cette grandeur.

Exemples : on mesurait les **distances** en les comparant au mètre étalon, au pied, au *lý*, etc... On peut comparer les intervalles de temps à la durée d'une journée, d'une année, au changement de phase de la lune, etc...

Une fois établie l'étalon de mesure, p. ex. l'étalon de longueur, il faut trouver les moyens de *mesurer* toutes les longueurs quelles qu'elles soient, p. ex. le rayon d'une roue, la distance Terre-Lune, la dimension d'un atome, la distance à Andromède, ... Evidemment, le mètre étalon est des fois difficile à utiliser...

Il y a beaucoup de grandeurs en Physique; heureusement, elles ne sont pas toutes indépendantes, la **vitesse**, par exemple, est le *rapport d'une longueur sur un temps*  $\Rightarrow$

- on choisit (en un accord international), un petit nombre de grandeurs physiques, par exemple la longueur et le temps,
- on fixe pour ces grandeurs seules des étalons,
- les autres grandeurs physiques sont définies à partir de ces grandeurs de base et de leur étalon.

La définition des étalons doit être accessible et **invariable**. La demande de précision en Sciences et en Ingénierie pousse cependant à la définition d'étalons invariables.

## Le Système International d'unités

En 1971, la 14<sup>ème</sup> Conférence sur les Poids et les Mesures a adopté 7 grandeurs physiques comme grandeurs de base, formant ainsi le **Système International SI**; ce sont : la longueur, la masse, le temps, le courant électrique, la température thermodynamique, la quantité de matière et l'intensité lumineuse. Ces grandeurs ne sont pas indépendantes.

Grandeur	Unité	Symbole
Longueur	mètre	m
Temps	seconde	s
Masse	kilogramme	kg

D'autres unités dérivées sont définies à partir de ces unités de base, p. ex., l'unité de **puissance** dans le système SI est le **watt** (symbole : W) :

$$1 \text{ watt} = 1 \text{ W} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$$

Pour des quantités très grandes ou très petites, on emploie des préfixes :

Facteur	Préfixe	Symbole	Facteur	Préfixe	Symbole
$10^{-1}$	déci-	d	$10^1$	déca-	da
$10^{-2}$	centi-	c	$10^2$	hecto-	h
$10^{-3}$	milli-	m	$10^3$	kilo-	k
$10^{-6}$	micro-	$\mu$	$10^6$	méga-	M
$10^{-9}$	nano-	n	$10^9$	giga-	G
$10^{-12}$	pico-	p	$10^{12}$	téra-	T
$10^{-15}$	femto-	f	$10^{15}$	péta-	P
$10^{-18}$	atto-	a	$10^{18}$	exa-	E
$10^{-21}$	zepto-	z	$10^{21}$	zetta-	Z

Exemples :

$$1,27 \times 10^9 \text{ watts} = 1,27 \text{ gigawatts} = 1,27 \text{ GW}$$

$$26,033 \times 10^{-9} \text{ secondes} = 26,033 \text{ nanosecondes} = 26,033 \text{ ns}$$

## La longueur

En 1792, la jeune République française établit un nouveau système de poids et mesures. Le mètre y est défini comme le dix millionième ( $10^{-7}$ ) de la distance du pôle à l'équateur.

Plus tard, pour des raisons de commodité, cette définition fut abandonnée pour la distance entre deux traits sur une barre de platine-irridium, le mètre étalon, conservé à Sèvres.

Dans les années 60, on définissait le mètre comme un multiple de la longueur d'onde d'une raie rouge du Krypton 86 :

$$1 \text{ mètre} = 1\,650\,763,73 \lambda_{\text{rouge Kr}86}$$

Dans les années 80, la précision de la mesure du temps devint telle que l'on définit le mètre comme la distance parcourue par la lumière pendant un intervalle de temps :

$$\begin{aligned} 1 \text{ mètre} &= \text{distance parcourue dans le vide par la lumière} \\ &\text{en } 1/299\,792\,458 \text{ seconde} \\ &\Leftrightarrow c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Remarquez l'amélioration de la précision voulue par le développement scientifique et technique. Voici quelques longueurs ou distances :

Mesure	Longueur en mètre
Distance à la galaxie Andromède	$2 \times 10^{22}$
Distance à l'étoile la plus proche (Proxima Centauri)	$4 \times 10^{16}$
Distance à Pluton	$6 \times 10^{12}$
Rayon de la Terre	$6 \times 10^6$
Epaisseur d'une feuille de papier	$1 \times 10^{-4}$
Longueur d'un virus	$1 \times 10^{-8}$
Rayon de l'atome d'hydrogène	$5 \times 10^{-11}$
Rayon du proton	$1 \times 10^{-15}$

## Le temps

Tout phénomène répétitif peut servir à la mesure du temps, comme les phases de la Lune, la répétition des saisons, la rotation de la Terre. Des pendules, des quartz vibrant, dont les périodes ont été au préalable calibrés par rapport à la rotation terrestre grâce à des observations astronomiques, peuvent être utilisés.

Cependant, la précision de ces étalons de temps ne sont pas suffisants pour les besoins scientifiques modernes. Depuis 1967,

$$1 \text{ seconde} = 9\,192\,631\,770 \times$$

la période de la transition hyperfine du Cs<sup>133</sup>  
dans son état fondamental.

Mesure	Intervalle de temps [s]
Durée de vie du proton (théorique)	$1 \times 10^{39}$
Age de l'Univers	$5 \times 10^{17}$
Espérance humaine de vie	$2 \times 10^9$
Durée d'un jour	$9 \times 10^4$
Intervalle de temps entre deux battements du coeur	$8 \times 10^{-1}$
Durée de vie du muon	$2 \times 10^{-6}$
Durées de vie les plus courtes des particules	$1 \times 10^{-23}$
Temps de Planck*	$1 \times 10^{-43}$

(\*) Le *temps de Planck* est le temps le plus tôt après le *Big Bang* à partir duquel les lois de la Physique que nous connaissons sont applicables.

## La Masse

L'étalon de masse est un cylindre de platine-irridium déposé à Sèvres auquel on a assigné la masse de un kilogramme.

**Une autre définition de la masse** : les masses des atome peuvent être comparées entre elles plus précisément qu'avec l'étalon de un kilogramme. C'est pour cette raison que l'on a assigné à l'isotope 12 du Carbone une masse de 12 unités de masse atomiques (u.m.a.).

$$1 \text{ u.m.a.} = 1,6605402 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\Leftrightarrow 1 \text{ mole de C}^{12} \text{ pèse } 12 \text{ grammes}$$

Objet	Masse en kilogramme
Notre galaxie	$2 \times 10^{41}$
Notre Soleil	$2 \times 10^{30}$
La Lune	$7 \times 10^{22}$
Un éléphant	$5 \times 10^3$
Une molécule de Péniciline	$5 \times 10^{-17}$
Un atome d'Uranium	$4 \times 10^{-25}$
Un proton	$2 \times 10^{-27}$
Un électron	$9 \times 10^{-31}$

## Analyse dimensionnelle

Nous venons de voir que le choix des unités est arbitraire : il est donc nécessaire de préciser l'unité dans laquelle on exprime le résultat d'une mesure. Deux grandeurs qui peuvent être mesurées avec la même unité sont dites de même dimension.

Si nous avons une *loi*, il sera possible, dans certains cas, de considérer que l'une des grandeurs physiques est une grandeur dérivée des autres et de choisir les unités de façon à ce que le nombre de grandeurs fondamentales soit diminuée.

Exemple : si nous avons introduit les 5 grandeurs fondamentales suivantes : la longueur, la masse, le temps, la charge et la force, les lois établies par l'expérience nous auraient donné :

- la loi de Newton :  $\vec{F} = k_1 M \vec{a}$
- la loi de Coulomb :  $\vec{F} = k_2 \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$
- la loi de la gravitation :  $\vec{F} = k_3 \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$

Nous pouvons dès lors choisir un système d'unité tel que  $\vec{F} = M \vec{a}$  ( $k_1 = 1$ ). Dans ce cas, la force est une grandeur dérivée dont l'unité est  $[F] = [M] [L] [T]^{-2}$  : c'est le choix du système SI. Dans l'expression précédente, nous avons symbolisé par  $[X]$  l'unité de la grandeur  $X$ .

Une équation définissant une relation entre des grandeurs doit être homogène en dimension.

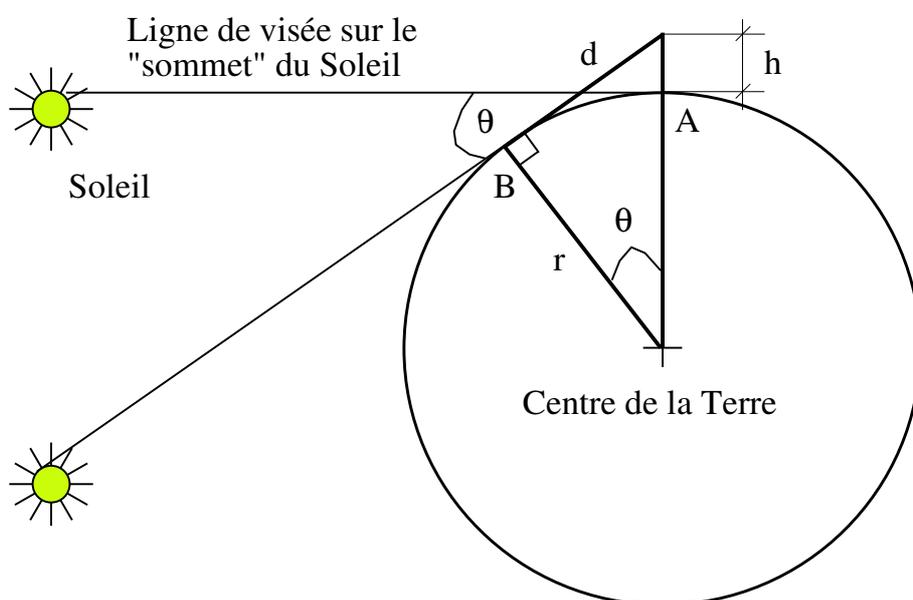
[les grandeurs des deux membres de l'équation s'expriment dans la même unité]

**L'analyse dimensionnelle** consiste à vérifier l'homogénéité dimensionnelle des expressions algébriques que l'on établit. Cela ne garantit pas que l'équation soit exacte, mais évite souvent des erreurs grossières.

## Détermination du rayon de la Terre

Et si nous déterminions le rayon de la Terre en étant à la plage ?

Je suis couché sur la plage. Le Soleil se couche sur un océan calme. Quand il disparaît, j'enclenche un chronomètre et me lève de 1,70 mètre et arrête le chronomètre quand je vois à nouveau le soleil disparaître. L'intervalle de temps mesuré est de  $t = 11,1$  s. Quel est le rayon de la Terre ?



Le point essentiel de ce problème est que la ligne de visée, au moment où le Soleil disparaît, est tangente à la Terre.

$$d^2 + r^2 = (r + h)^2 = r^2 + 2rh + h^2 \Rightarrow d^2 = 2rh + h^2 \simeq 2rh$$

L'angle dont a tourné la Terre,  $\theta$ , est donné par :

$$\frac{\theta}{360^\circ} = \frac{t}{24 \text{ h}} \Rightarrow \theta = 0,04625^\circ$$

$$d = r \tan \theta \Rightarrow r^2 \tan^2 \theta = 2rh \Rightarrow r = \frac{2h}{\tan^2 \theta} = 5,22 \times 10^6 \text{ m}$$

avec les données :  $h = 1,70$  m et  $\theta = 0,04625^\circ$ . Le résultat est à 20 % de la valeur communément admise pour le rayon moyen de la Terre ( $6,37 \times 10^6$  m).

# Physique Générale

## Cinématique à une dimension de la particule

### Vecteurs

TRAN Minh Tâm

## Table des matières

<b>La Cinématique à une dimension de la particule</b>	<b>14</b>
Définitions, vitesses et accélérations . . . . .	14
<b>Le mouvement rectiligne uniformément accéléré</b>	<b>18</b>
Une première approche . . . . .	18
Une seconde approche . . . . .	19
L'accélération dans la chute libre . . . . .	20
<b>Les vecteurs</b>	<b>21</b>
Vecteurs et scalaires . . . . .	21
L'addition des vecteurs . . . . .	22

Composantes et vecteurs unitaires . . . . .	23
Multiplication de vecteurs . . . . .	25

## Définitions, vitesses et accélérations

La **cinématique** est l'étude du mouvement de la particule ou des systèmes de particules sans la recherche des causes de ce mouvement. Les causes des mouvement sont à rechercher dans les forces, ce sera l'objet d'étude de *la dynamique*.

Nous nous limitons tout d'abord à l'étude du mouvement de la particule et, dans ce paragraphe, à son mouvement selon une droite. Par particule, nous sous-entendons un objet ponctuel ou un objet qui se meut comme un objet ponctuel, c.à.d. dont tous les points se meuvent dans la même direction et avec la même vitesse.

**Position et déplacement.** Pour localiser une particule, nous recherchons sa position relative par rapport à un point de référence ou **origine** sur un axe qui peut être porté par la droite sur laquelle se déplace la particule. Sur cet axe, nous pouvons définir un sens et, avec un étalon de longueur, mesurer la *position* de la particule en chaque instant. L'équation  $x = x(t)$  est l'équation horaire.

Un changement de position d'une position initiale  $x_1$  à une position finale  $x_2$  est appelé *déplacement*  $\Delta x = x_2 - x_1$ ; nous remarquons que le déplacement est une quantité vectorielle, puisqu'elle est caractérisée par une direction (ici, celle du mouvement), un sens et un module.

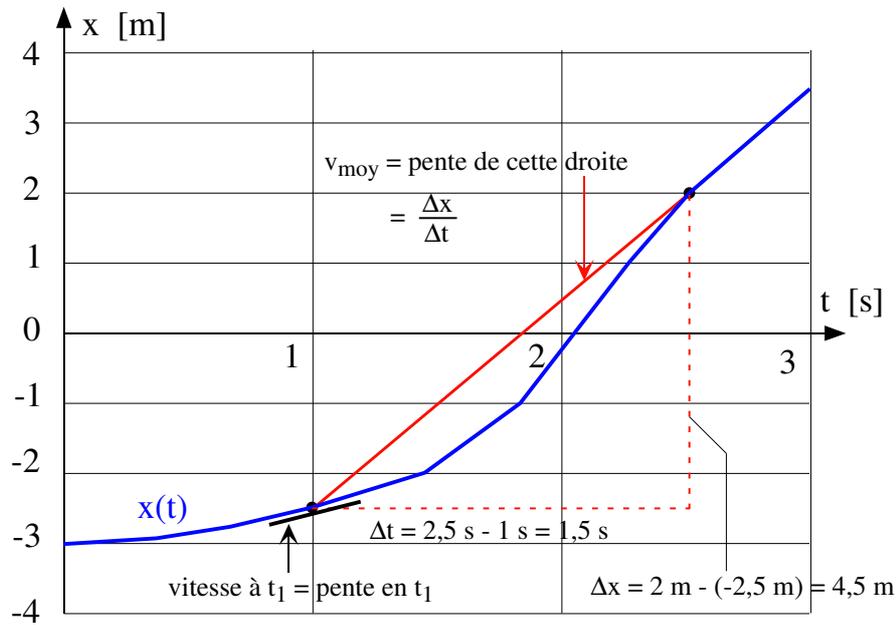
On peut représenter la position en fonction du temps sur un graphique par une courbe  $x(t)$ . On définit la **vitesse moyenne** par

$$v_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Sur un graphique de  $x$  en fonction de  $t$ , la vitesse moyenne  $v_{moy}$  est la pente de la droite reliant les points  $(t_1, x_1)$  et  $(t_2, x_2)$ . Comme le déplacement,  $v_{moy}$  a une direction (ici, celle du mouvement), un sens qui dépend de  $x_2$  et de  $x_1$  et un module. Comme  $\Delta t$  est toujours positif,  $v_{moy}$  a le même signe que  $\Delta x$  dans le mouvement à une dimension.

## La Cinématique à une dimension de la particule

La figure ci-après montre le calcul de cette vitesse moyenne.



La **vitesse instantanée** ou simplement la **vitesse** permet de connaître comment se déplace la particule à un instant donné :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

- $v$  est le taux de variation de la position  $x$  de la particule en fonction du temps, c'est la dérivée de  $x$  par rapport au temps,
- $v$ , à chaque instant est la pente de la tangente à la courbe  $x(t)$  à l'instant considéré.

**Point de contrôle** Les équations suivantes donnent la position  $x(t)$  d'une particule dans des situations différentes ( $x$  est en mètres,  $t$  en secondes et  $t > 0$ ) :

$$(1) \ x = 3t - 2 \ , \ (2) \ x = -4t^2 - 2 \ , \ (3) \ x = \frac{2}{t^2} \ \text{et} \ (4) \ x = -2$$

Dans quelle(s) situation(s) la vitesse  $v$  de la particule est-elle constante? Dans quel(s) cas  $v$  est-elle dans la direction négative?

**L'accélération.** Quand la vitesse de la particule change, on dit qu'elle *subit une accélération* (ou qu'elle *accélère*). Dans notre cas d'un mouvement unidimensionnel, l'accélération moyenne est définie comme :

$$a_{moy} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

expression dans laquelle  $v_1$  et  $v_2$  sont les vitesses de la particule aux instants  $t_1$  et  $t_2$ .

On définit de la même façon que précédemment **l'accélération instantanée** ou **accélération** :

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

L'accélération d'une particule à l'instant  $t$  est la *dérivée seconde* par rapport au temps de sa position  $x(t)$ . L'accélération est exprimée en **m/s<sup>2</sup>**.

Signe de l'accélération. Dans le langage courant, le signe de l'accélération peut conduire à des conclusions fausses ; ainsi, une accélération positive ne veut pas toujours dire que la vitesse augmente et une accélération négative que la vitesse diminue, il faut aussi considérer le signe de la vitesse !

**Point de contrôle** Une souris se meut sur l'axe  $x$ . Quel est le signe de son accélération si elle se meut dans

- a) le sens positif de l'axe avec une vitesse dont le module augmente,
- b) le sens positif de l'axe avec une vitesse dont le module diminue,
- c) le sens négatif de l'axe avec une vitesse dont le module augmente,
- d) le sens négatif de l'axe avec une vitesse dont le module diminue ?

Exemple La position d'une particule sur l'axe  $x$  est donnée par  $x = 4 - 27t + t^3$ , expression dans laquelle  $x$  est en mètres et  $t$  en secondes. La vitesse en chaque instant  $v(t)$  s'obtient en dérivant  $x(t)$  (par rapport à  $t$ ) :

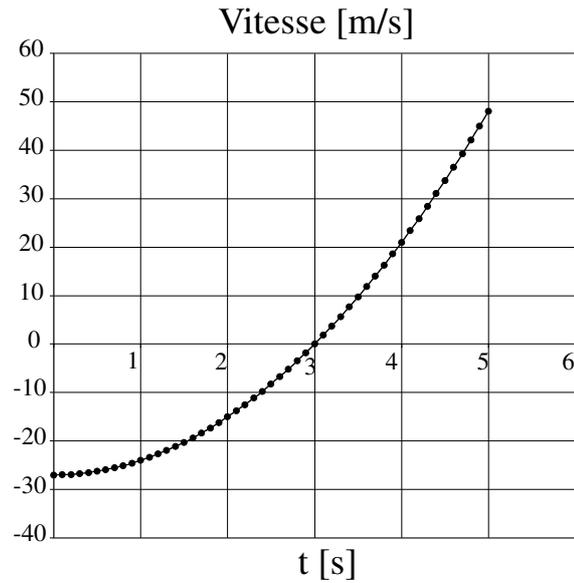
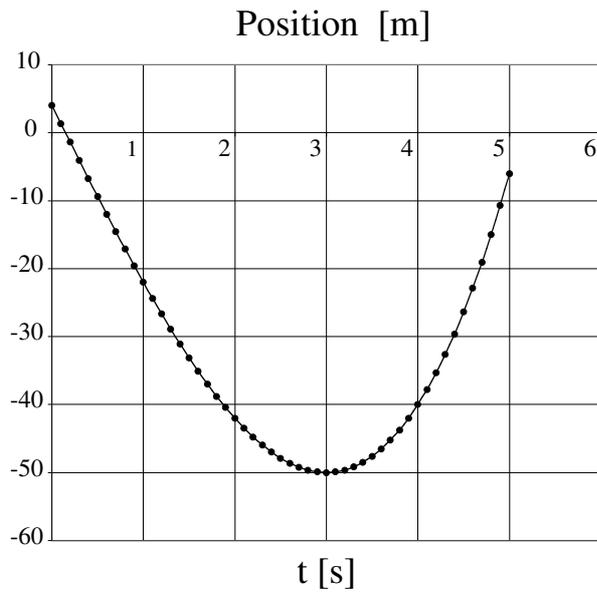
$$v = -27 + 3t^2$$

et l'accélération  $a(t)$ , en dérivant  $v(t)$  :  $a = 6t$ .

Nous voyons que l'accélération augmente avec le temps et est positive ( $t > 0$ ) alors que la vitesse et la position peuvent être positive ou négative. La vitesse s'annule pour  $t = \pm 3$  s.

- A l'instant  $t = 0$ , la particule se trouve en  $x(0) = +4$  et a une vitesse  $v(0) = -27$  m/s : elle se meut donc dans le sens négatif de l'axe ; son accélération en cet instant est nulle.

## La Cinématique à une dimension de la particule



- Pour  $0 < t < 3$  s , la vitesse de la particule est toujours négative : la particule se déplace toujours dans le sens négatif ; cependant, l'accélération étant positive, le module de la vitesse diminue : la particule "ralentit". A  $t = 3$  s, la vitesse de la particule est nulle, sa position est alors  $x(3) = -50$  m .
- Pour  $t > 3$  s , la vitesse est maintenant positive : la particule va dans le sens positif de l'axe, comme l'accélération est positive, le module de la vitesse augmentera constamment.

## Le mouvement rectiligne uniformément accéléré

Dans ce paragraphe, nous nous limitons au cas d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA) où l'accélération est constante. Les conclusions que nous tirons ici ne sont valables que pour ce cas particulier.

### Une première approche

En partant de la définition de l'accélération :  $a = \frac{dv}{dt}$ ,

nous pouvons écrire :  $dv = a dt$

en prenant la *primitive* ou *intégrale indéfinie*

des deux membres :  $\int dv = \int a dt .$

Comme l'accélération  $a$  est constante :  $\int dv = a \int dt,$

ou  $v = at + C.$

La *constante d'intégration*  $C$  doit être déterminée par la valeur initiale  $v_0$  de la vitesse à  $t = 0$  ; par conséquent :  $\boxed{v = at + v_0} .$

De même, en partant de la définition de la vitesse :  $v = \frac{dx}{dt}$ ,

nous avons  $\int dx = \int v dt$  et,

en remplaçant  $v$  par son expression :  $\int dx = \int (at + v_0) dt$

comme  $a$  et  $v_0$  sont constants :  $\int dx = a \int t dt + v_0 \int dt$

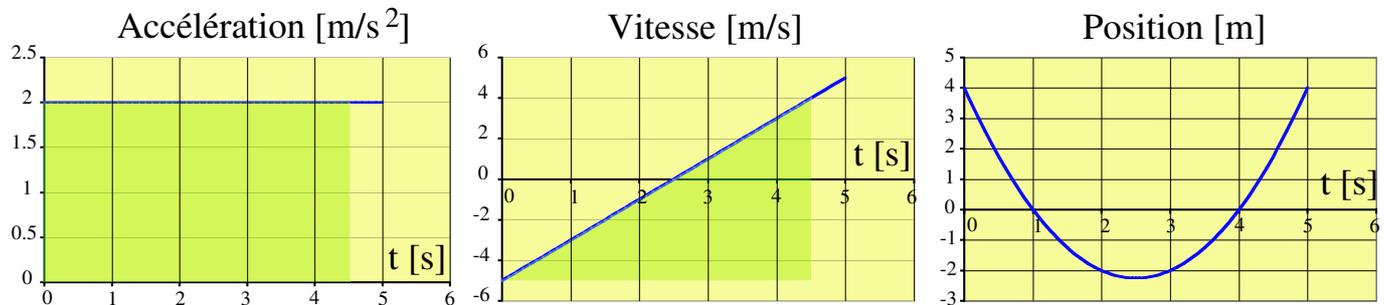
c.à.d. :

$$\boxed{x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0}$$

expression dans laquelle la position de la particule à  $t = 0$ ,  $x_0$ , est la constante d'intégration.

## Une seconde approche

Cette approche, plus intuitive, n'est valable que pour le MRUA.



Puisque dans le MRUA l'accélération est constante, accélérations instantanée et moyenne sont égales et nous avons :

$$a = a_{moy} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - 0}$$

$v_0$  est la vitesse à l'instant  $t = 0$  et nous avons tout de suite :

$$v = v_0 + at$$

Nous avons de même :

$$v_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - 0} \Rightarrow x = x_0 + v_{moy}t$$

$v$  est une fonction linéairement croissante avec le temps. La *vitesse moyenne* entre deux instants quelconques, comme par exemple entre  $t = 0$  et  $t$ , est la moyenne arithmétique des vitesses entre ces deux instants :

$$v_{moy} = \frac{1}{2} (v_0 + v) = v_0 + \frac{1}{2} at$$

Par conséquent :

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Les deux équations encadrées de cette page et de la page précédente sont les équations de base des mouvements rectilignes uniformément accélérés.

## Le mouvement rectiligne uniformément accéléré

**Point de contrôle** L'équation horaire  $x(t)$  d'une particule est donnée dans les cas suivants :

a)  $x = 5t - 4$

b)  $x = -5t^3 + 4t^2 + 6$

c)  $x = 2/t^2 - 3/t$

d)  $x = 5t^2 - 3$

Dans

quel(s) cas le mouvement de la particule est-il un MRUA ?

**Point de contrôle** Des deux approches précédentes du MRUA, laquelle préférez-vous ? et pourquoi ?

### L'accélération dans la chute libre

Sur Terre, une particule, lancée vers le haut ou vers le bas, subit une accélération, celle de gravité. En choisissant un axe  $y$  perpendiculaire à la surface de la Terre et dirigé vers le haut, nous avons une accélération

$$a = -g \approx -9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ près de la surface de la Terre}$$

le signe - montre que l'accélération est toujours dirigée vers le centre de la Terre.

Exemple Une balle est lancée verticalement vers le haut avec une vitesse initiale de  $12 \text{ m/s}$ . A quel instant atteindra-t-elle sa hauteur maximale et quelle est cette hauteur maximale ?

Idées essentielles : Une fois lancée, dans son ascension et dans sa chute, la balle subit la même accélération  $a = -g = \text{constante}$  : on est donc dans le cas d'un MRUA. D'autre part, à son apogée, la balle a une vitesse nulle.

De  $v = v_0 + at$ , nous cherchons l'instant pour lequel la vitesse est nulle :

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 12 \text{ m/s}}{-9.81 \text{ m/s}^2} = 1.22 \text{ s}$$

$$y_{max} - y_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = \frac{(v^2 - v_0^2)}{2a} = \frac{0 - (12 \text{ m/s})^2}{2(-9.81 \text{ m/s}^2)} = 7.34 \text{ m}$$

**Point de contrôle** Dans l'exemple précédent, donnez le signe du déplacement dans la partie ascensionnelle et dans la partie de chute de la balle. Quelle est l'accélération de la balle à son apogée ?

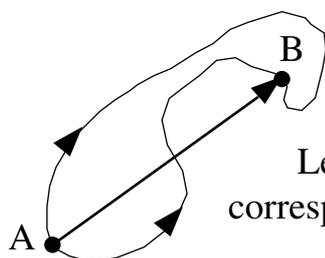
## Vecteurs et scalaires

**Un scalaire** est une grandeur qui est entièrement déterminée par un nombre uniquement (éventuellement avec son signe) et une unité.

Les scalaires obéissent aux lois de l'algèbre ordinaire.

**Un vecteur** possède une direction, un sens et un module.

Le vecteur le plus simple est le vecteur déplacement. Nous avons vu qu'un *déplacement* dans un mouvement à une dimension devait être caractérisé par un signe indiquant le sens du déplacement et un module. Dans un mouvement à trois dimensions, nous devons spécifier le point origine et le point destination, c.à.d. utiliser un *vecteur*, grandeur caractérisée par une direction (la droite reliant les deux points), un sens (de l'origine vers la destination) et un module (la distance entre les points).



Les trois chemins connectant A et B correspondent au même vecteur déplacement

Sur la figure, nous voyons que le *vecteur déplacement* représente le résultat du mouvement et non le mouvement lui-même.

Un vecteur est un être mathématique définie par plusieurs valeurs numériques ; ces dernières décrivent sa longueur, sa direction et son sens. Les vecteurs obéissent aux lois de l'algèbre vectorielle.

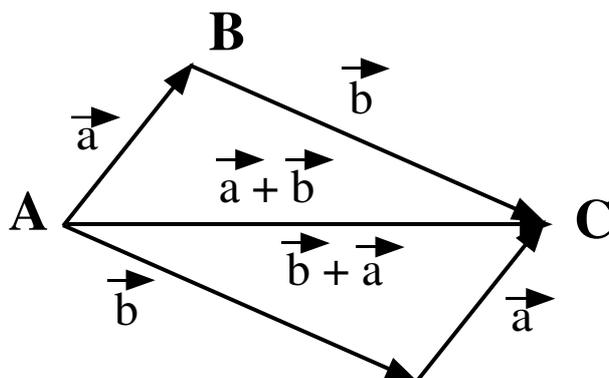
### Exemples :

Grandeurs scalaires : une masse de 4 kg, une durée de 45 minutes, une température de 20 ° C, etc...

Grandeurs vectorielles : une force, une vitesse, un moment de forces, un *rayon vecteur*, un *vecteur position*, etc...

## L'addition des vecteurs

Considérons la somme de deux déplacements : le premier,  $\vec{a}$ , de A à B, puis de B à C,  $\vec{b}$ . L'effet résultant de ces deux déplacements est le déplacement  $\vec{c}$  de A à C ; cette résultante n'est pas une somme algébrique usuelle.



On voit bien que le *module* du vecteur résultant n'est pas égal à la somme des modules des vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  [nous désignerons le module d'un vecteur  $\vec{v}$  par  $|\vec{v}|$ ] :

$$|\vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b}| \neq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

On vérifie très facilement les deux propriétés suivantes :

**Commutativité :** 
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

**Associativité :** 
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Le vecteur  $-\vec{b}$  est un vecteur qui a le même module que  $\vec{b}$  mais une direction opposée. Donc :

$$\vec{b} + (-\vec{b}) = 0 \quad \text{et} :$$

**Soustraction :** 
$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad \text{et} \quad \vec{a} = \vec{d} + \vec{b}$$

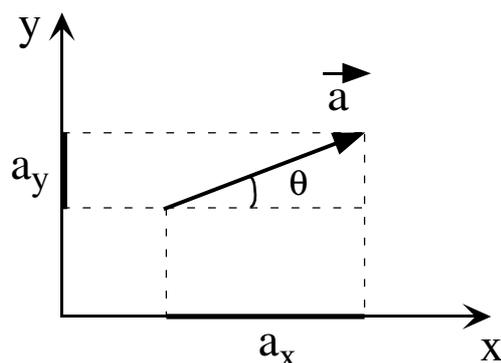
### Point de contrôle

Quelle relation doit-il exister entre  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  pour que le module de leur somme  $|\vec{a} + \vec{b}|$  soit égal à : (a)  $|\vec{a}| + |\vec{b}|$ , (b)  $|\vec{a}| - |\vec{b}|$ , (c)  $|\vec{b}| - |\vec{a}|$ , (d)  $\sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}$  ?

## Composantes et vecteurs unitaires

L'addition des vecteurs par la méthode graphique devient rapidement peu pratique, surtout si nous devons traiter des vecteurs dans l'espace. On préfère la méthode analytique. La figure ci-après représente le vecteur  $\vec{a}$  dans un cas à deux dimensions, dans le plan  $xy$ .

Une **composante** du vecteur  $\vec{a}$  est la projection du vecteur sur un axe ;



ainsi, au lieu de définir  $\vec{a}$  par son module et sa direction ( $|\vec{a}|, \theta$ ), on peut le définir par ses composantes  $(a_x, a_y)$ . On a évidemment :

$$a_x = |\vec{a}| \cos \theta \text{ et } a_y = |\vec{a}| \sin \theta$$

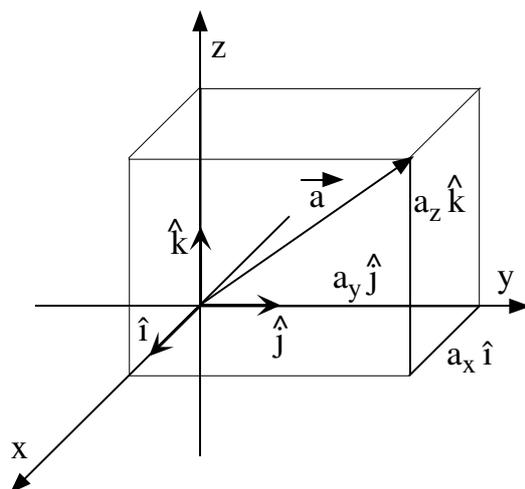
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \text{ et } \tan \theta = \frac{a_y}{a_x}$$

### Vecteurs unités

Pour des raisons de commodités, nous introduisons les vecteurs unités  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ . Un vecteur unité est sans dimension et sert uniquement à définir la direction de l'axe qui le porte. Son module est de 1 :  $|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$ . Dans l'espace, un vecteur quelconque peut s'écrire comme la somme de trois vecteurs parallèles à chacun des axes :  $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$ .

Exemple : un déplacement :  $\vec{d} = (-5 \text{ km}) \hat{i} + 10 \text{ km } \hat{j} + 30 \text{ km } \hat{k}$

Nous utiliserons par la suite un système d'axes cartésien droit, dans lequel les axes sont perpendiculaires entre eux et suivent l'orientation des trois doigts de la main droite.



**Remarque** En Physique, nous pouvons choisir notre système de coordonnées ; cependant, les relations de Physique impliquant des vecteurs ne dépendent pas de ce choix.

**Egalité des vecteurs** Si  $\vec{a} = \vec{b}$ , alors :

$$a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

Comme  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$  sont perpendiculaires entre eux, cette équation est satisfaite si et seulement si  $a_x = b_x$ ,  $a_y = b_y$ ,  $a_z = b_z$ .

Par conséquent, si  $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ , alors :

$$s_x = a_x + b_x, \quad s_y = a_y + b_y, \quad s_z = a_z + b_z$$

### Vecteur unité quelconque

Nous pouvons étendre la notion de vecteurs unités à des directions autres que celles des axes. Ainsi, à un vecteur  $\vec{a}$ , nous pouvons associer un vecteur unité  $\hat{u}_a$ , de même direction et de même sens que le vecteur  $\vec{a}$  mais dont le module est de 1 :

$$\hat{u}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x \hat{i}}{|\vec{a}|} + \frac{a_y \hat{j}}{|\vec{a}|} + \frac{a_z \hat{k}}{|\vec{a}|}$$

## Multiplication de vecteurs

**Multiplication par un scalaire** Nous l'avons déjà abordé avec la définition des composantes d'un vecteur : le vecteur  $\lambda \vec{a}$ ,  $\lambda \in \mathfrak{R}$ , a la même direction que  $\vec{a}$ , son sens est le même que celui de  $\vec{a}$  si  $\lambda > 0$ , dans le sens opposé si  $\lambda < 0$ , son module est  $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ .

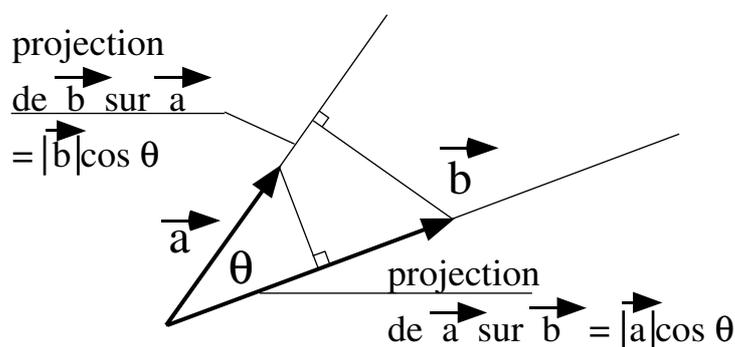
**Multiplication de deux vecteurs** Deux possibilités :

- obtenir un scalaire comme résultat,
- ou bien obtenir un vecteur.

**Produit scalaire** On le définit par :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta, \quad \theta \text{ est l'angle de } \vec{a} \text{ à } \vec{b}$$

. Propriétés



- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  si  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont orthogonaux.
- Si l'un des vecteurs est un vecteur unité  $\hat{u}$ , le produit scalaire  $\vec{a} \cdot \hat{u} = |\vec{a}| \cos \theta$  est la projection de  $\vec{a}$  sur la direction portant  $\hat{u}$ .
- Le produit scalaire est commutatif :  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ .
- En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$$

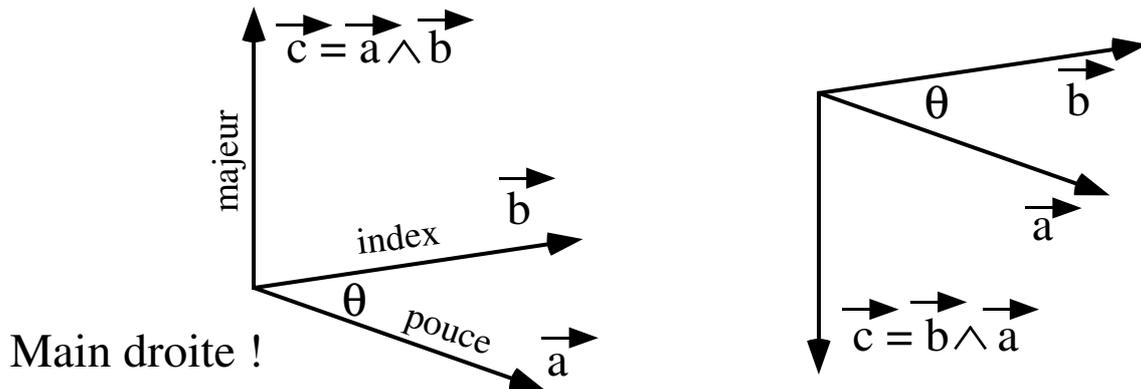
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

**Produit vectoriel** La définition nécessite le choix d'un système d'axes cartésiens  $Oxyz$ .  $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$  est défini par :

une direction perpendiculaire à  $\vec{a}$  et à  $\vec{b}$ ,

un sens tel que  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  ait la même orientation que  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ,

une norme  $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$  où  $\theta$  est l'angle de  $\vec{a}$  à  $\vec{b}$ .



### Propriétés

- $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$  si  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont parallèles ou antiparallèles.
- Le produit vectoriel n'est **pas** commutatif :  $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$  (cf. figure ci-dessus).

- En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z) \hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x) \hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \hat{k}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

### Point de contrôle

Les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  ont pour modules 3 et 4 unités.

Quel est l'angle entre  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  pour que :

- a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$       b)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -12$       c)  $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$       d)  $\vec{a} \wedge \vec{b} = 12$

# Physique Générale

## Cinématique à deux et trois dimensions de la particule. Mouvements relatifs.

TRAN Minh Tâm

### Table des matières

<b>Mouvement à deux et trois dimensions</b>	<b>27</b>
Référentiels, position et déplacement . . . . .	27
Vitesses . . . . .	27
Accélérations . . . . .	29
<b>Balistique</b>	<b>30</b>
Position du problème . . . . .	30
Equation de la trajectoire et portée . . . . .	31
<b>Mouvement circulaire</b>	<b>32</b>
Le mouvement circulaire uniforme . . . . .	32
Un premier calcul de l'accélération dans un MCU . . . . .	33
Un deuxième calcul de l'accélération dans un MCU . . . . .	33

Période, vitesse angulaire . . . . .	34
Le mouvement circulaire non uniforme . . . . .	35
<b>Mouvements relatifs</b>	<b>36</b>
La vitesse relative . . . . .	36
La transformation de Galilée . . . . .	37
Accélération depuis deux référentiels en translation rectiligne uni- forme l'un par rapport à l'autre . . . . .	39
Si $\vec{u}$ n'est pas constant... . . . . .	39

Nous allons étendre les notions acquises au chapitre précédent au mouvement, plus général, à deux et trois dimensions.

### Référentiels, position et déplacement

Dans tout problème de Mécanique, la position d'un corps est défini par rapport à un **référentiel**, comme par exemple le coin d'une chambre (laboratoire), la Terre et quelques "étoiles fixes" (référentiel géocentrique), le Soleil et quelques "étoiles fixes" (référentiel héliocentrique). La position est alors exprimée par rapport à un **système de coordonnées**. Nous choisissons un repère cartésien défini par les vecteurs orthonormés  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ .

[Le système de coordonnées que nous considérons est un système d'axes droit donné par les vecteurs unité  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  orthogonaux entre eux et dont les directions et sens sont donnés par la règle des trois doigts de la main droite.]

Dans ce repère, un point matériel (ou une particule) est, à l'instant  $t$  à la position  $P$  et est repéré par le *vecteur position* :

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Dans son mouvement, la particule passe de  $P_1$  à  $P_2$  entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ . Son déplacement est alors :

$$\begin{aligned}\Delta \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} \\ \Delta \vec{r} &= \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}\end{aligned}$$

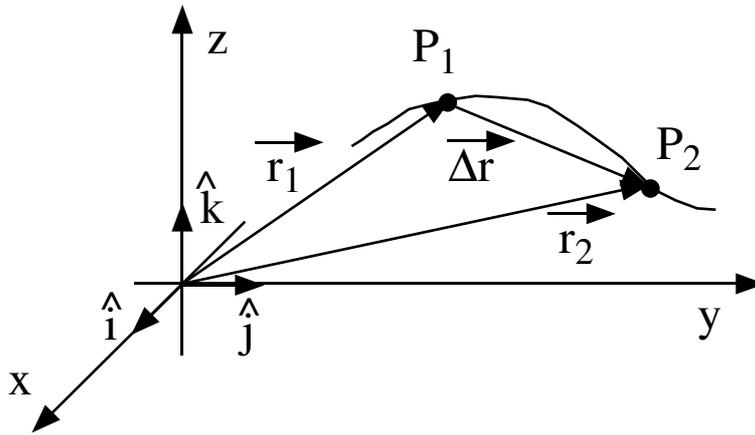
**Point de contrôle** Dans un repère cartésien, un papillon vole de  $(-2 \text{ m}, 6 \text{ m}, 4 \text{ m})$  à  $(5 \text{ m}, -3 \text{ m}, 4 \text{ m})$ . Quel est son vecteur déplacement ? Son déplacement est-il parallèle à un plan particulier ? Si oui, lequel ?

### Vitesses

Comme pour le mouvement à une dimension, nous définissons

**la vitesse moyenne** :

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}$$



et la vitesse instantanée :

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$$

### Propriété de la vitesse

Comme  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ , la vitesse  $\vec{v}$  est tangente à la trajectoire

(la trajectoire est la courbe décrite dans l'espace par la particule).

**Inversément**, de  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , nous tirons la position du point matériel à l'instant  $t$  connaissant sa vitesse :

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \vec{v} dt = \int_{t_0}^t v_x dt \hat{i} + \int_{t_0}^t v_y dt \hat{j} + \int_{t_0}^t v_z dt \hat{k}$$

Remarque : il faut connaître la variation des composantes de la vitesse en fonction du temps pour pouvoir intégrer les équations précédentes !

**Point de contrôle** Dans un mouvement à deux dimensions, une particule décrit un cercle centré sur l'origine O. Sa vitesse instantanée est de  $(3 \text{ m/s}) \hat{i} - (3 \text{ m/s}) \hat{j}$ . Dans quel quadrant se trouve-t-elle si elle tourne dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ?

## Accélération

De la même manière que pour le cas à une dimension, nous définissons  
**l'accélération moyenne** :

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x \hat{i} + \Delta v_y \hat{j} + \Delta v_z \hat{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \hat{k}$$

et **l'accélération instantanée** :

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k}$$

Remarque : L'accélération n'est **pas tangente** à la trajectoire, sauf pour les mouvements rectilignes.

**Inversément**, de  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ , nous tirons la vitesse du point matériel à l'instant  $t$  connaissant son accélération :

$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^t \vec{a} dt = \int_{t_0}^t a_x dt \hat{i} + \int_{t_0}^t a_y dt \hat{j} + \int_{t_0}^t a_z dt \hat{k}$$

Remarque : il faut connaître la variation des composantes de l'accélération en fonction du temps pour pouvoir intégrer les équations précédentes !

**Point de contrôle** Dans un mouvement à deux dimensions, les vecteurs position des particules P et Q sont respectivement :

$$\overrightarrow{OP} = (3t^2 + 5) \hat{i} + 4t^{5/2} \hat{j} \quad \overrightarrow{OQ} = (2t + 9) \hat{i} + 6\hat{j} .$$

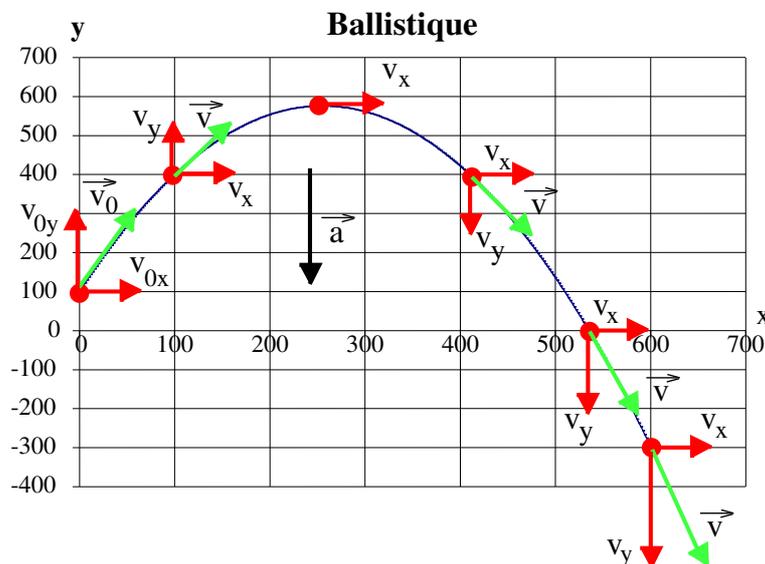
Selon quelle coordonnée la particule P ou la particule Q a-t-elle une accélération constante ?

Dans les expressions précédentes, la dimension des vecteurs position est le [mètre] et celle du temps est la [seconde]. Quelles doivent être celles des coefficients 3, 5, 4, 2, 9 et 6 ?

## Position du problème

Nous analyserons, dans ce paragraphe, le mouvement des *projectiles* non dotés de moteurs et non soumis à l'action des vents ni de l'air (pas d'effet due à la rotation, par exemple). Nous nous restreignons aussi à de petits mouvements, ce qui nous permet de négliger les effets de la courbure ou de la rotation de la Terre. Le projectile est alors soumis à une accélération verticale constante due à la pesanteur (nous anticipons ici un peu la **dynamique** qui étudie les relations entre le mouvement et les forces ).

Nous pouvons ainsi nous restreindre à un mouvement à deux dimensions.



Dans le plan  $(x, y)$  du mouvement, l'accélération est verticale et nous avons ( $a < 0$ ) :

$$\vec{a} = 0 \hat{i} + a \hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = v_{0x} \hat{i} + (v_{0y} + a t) \hat{j}$$

Dans l'expression de la vitesse,  $v_{0x} \hat{i} + v_{0y} \hat{j} = \vec{v}_0$ , est la vitesse initiale de la particule. Selon l'axe  $x$ , puisque l'accélération est nulle, la vitesse est constante. Selon l'axe  $y$ , nous avons un mouvement uniformément accéléré.

$$\vec{r}(t) = x \hat{i} + y \hat{j} = (x_0 + v_{0x} t) \hat{i} + \left( y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a t^2 \right) \hat{j}$$

$\vec{r}(t = 0) = x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j}$  est la position de la particule à l'instant  $t = 0$ .

### Equation de la trajectoire et portée

Des équations  $x(t) = x_0 + v_{0x}t$  et  $y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2$ , nous pouvons éliminer le temps  $t$  et obtenir :

$$(y - y_0) = (x - x_0) \cdot \frac{v_{0y}}{v_{0x}} + \frac{1}{2}a \left( \frac{x - x_0}{v_{0x}} \right)^2$$

$$(y - y_0) = (x - x_0) \cdot \tan \theta_0 + \frac{1}{2}a \left( \frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta_0} \right)^2$$

Nous avons désigné par  $\theta_0$  l'angle que fait la vitesse du projectile avec l'axe  $Ox$  en  $t = 0$ .

### Portée du tir

On peut définir la portée par la distance horizontale  $(x - x_0)$  qu'a parcourue le projectile quand il atteint le "sol", défini, par exemple, par  $y = 0$  ou par  $y = y_0$ . Si nous définissons la portée  $R$  par le retour à l'altitude initiale, nous avons :  $R = (x - x_0)$  et  $(y - y_0) = 0$  :

$$R = v_{0x}t = (v_0 \cos \theta_0)t \quad \text{et} \quad 0 = (v_0 \sin \theta_0)t + \frac{1}{2}at^2$$

En éliminant le temps entre ces deux équations, on obtient :

$$R = -\frac{v_0^2}{a} 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 = -\frac{v_0^2}{a} \sin 2\theta_0, \quad a < 0 !$$

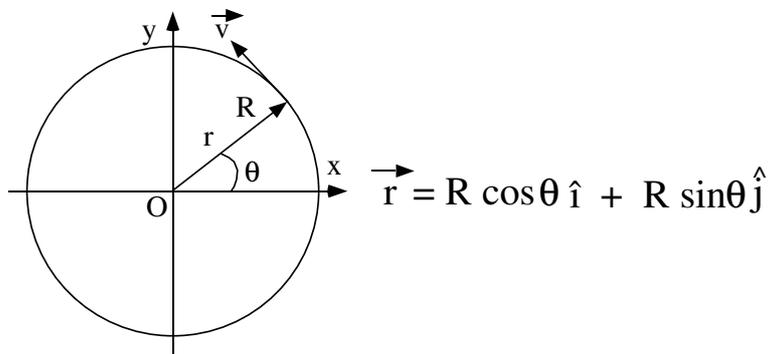
La portée maximale, dans ce cas, est atteinte pour  $\sin 2\theta_0 = 1$   
 $\Rightarrow \theta_0 = 45^\circ$ . Ce n'est évidemment pas le cas pour d'autres définitions de la portée.

**Point de contrôle** 1) Vérifiez les dimensions dans les équation de cette page, c.à.d. que nous avons bien des *longueurs* dans les deux membres des équations.

2) Je vise une pomme avec ma sarbacane. Il n'y a pas de vent et le frottement de l'air peut être négligé. Au moment du départ de la flèche, la pomme tombe. La flèche touchera-t-elle la pomme ?

## Mouvement circulaire

Dans ce mouvement plan, la particule est toujours à une distance fixe d'un point où nous plaçons l'origine. Le vecteur position est donné par

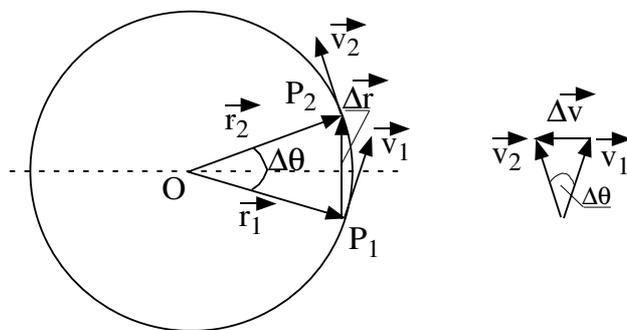


Le paramètre dépendant du temps est ici l'angle  $\theta$ .

Nous allons traiter du cas où la vitesse de la particule est constante.

### Le mouvement circulaire uniforme

Dans le MCU, bien que la vitesse soit constante (*uniforme*) en module, la *particule est soumise à une accélération centripète*.



Si, pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$  la particule s'est déplacée de  $P_1$  à  $P_2$ , nous avons :  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  ; et comme la vitesse, tangente à la trajectoire circulaire, est toujours perpendiculaire au vecteur position,  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$  est toujours perpendiculaire à  $\Delta \vec{r}$ . Comme l'accélération est donnée par :  $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{a}$ , parallèle à  $\Delta \vec{v}$ , est dirigé vers le centre du cercle, puisque  $\Delta \vec{r}$  est une corde sur le cercle. **Dans un MCU, l'accélération est centripète.** Recherchons la valeur de son module.

### Un premier calcul de l'accélération dans un MCU

En nous reportant à la figure de la page précédente, nous constatons que les vecteurs  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  et  $\Delta \vec{v}$ , d'une part,  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  et  $\Delta \vec{r}$ , d'autre part, forment des triangles isocèles semblables ; par conséquent :

$$\frac{|\Delta \vec{r}|}{|\vec{r}|} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{|\vec{v}|} \Rightarrow |\Delta \vec{v}| = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{r}|} \cdot |\Delta \vec{r}|$$

Comme  $\Delta \vec{r} \approx \vec{v} \cdot \Delta t$ ,  $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}^2}{|\vec{r}|} = \frac{v^2}{R}$ . Nous noterons :

$$a_r = \frac{v^2}{R} \text{ ou encore :}$$

$$\boxed{\vec{a}_r = -\frac{v^2}{R} \hat{u}_r}$$

l'indice "r" indique que l'accélération est *radiale*,  $\hat{u}_r$  est le vecteur unité radial pointant de l'origine vers l'extérieur (ce vecteur  $\hat{u}_r$  est de module constant mais a une direction variable avec le temps)

### Un deuxième calcul de l'accélération dans un MCU

Puisque  $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = (-|\vec{v}| \sin \theta) \hat{i} + (|\vec{v}| \cos \theta) \hat{j}$  (cf. figure ci-après) et que  $\sin \theta = y/R$  et  $\cos \theta = x/R$ , nous avons :

$$\vec{v} = \left( -\frac{|\vec{v}| y}{R} \right) \hat{i} + \left( \frac{|\vec{v}| x}{R} \right) \hat{j}$$

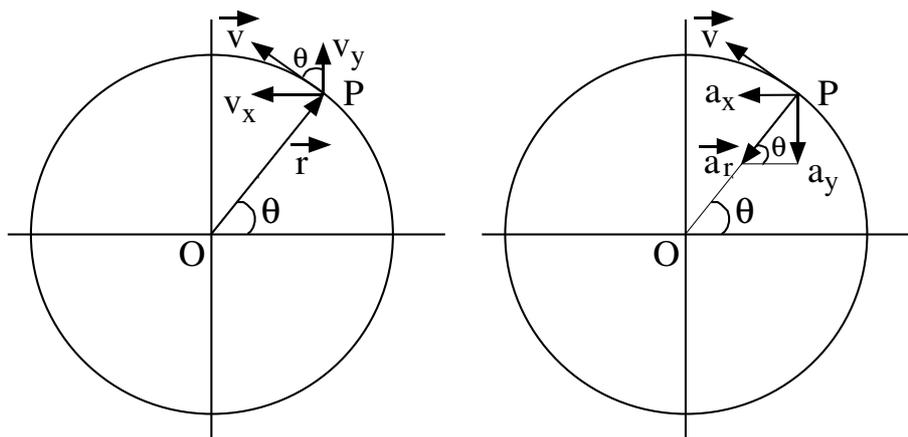
Dérivons par rapport au temps pour obtenir l'accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left( -\frac{|\vec{v}|}{R} \frac{dy}{dt} \right) \hat{i} + \left( \frac{|\vec{v}|}{R} \frac{dx}{dt} \right) \hat{j}$$

[Remarque : Dans un MCU, nous n'avons pas à dériver  $|\vec{v}|$  par rapport au temps, le module de la vitesse étant une constante!] Comme  $v_y = \frac{dy}{dt}$  et  $v_x = \frac{dx}{dt}$ , et que  $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = (-|\vec{v}| \sin \theta) \hat{i} + (|\vec{v}| \cos \theta) \hat{j}$ , en remplaçant, nous avons :

$$\vec{a} = \left( -\frac{v^2}{R} \cos \theta \right) \hat{i} + \left( -\frac{v^2}{R} \sin \theta \right) \hat{j} = \vec{a}_r$$

## Mouvement circulaire



Les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{a}_r$  sont représentés sur la figure ci-dessus.

**L'accélération radiale change la direction de la vitesse**

**Point de contrôle** 1) Vérifiez la dimension de l'accélération radiale  $a_r = \frac{v^2}{R}$ .  
2) Des deux développements ci-dessus, laquelle préférez-vous et pourquoi ?

### Période, vitesse angulaire

La **période** est le temps nécessaire pour que la particule effectue une révolution, c.à.d. parcourre une distance de  $2\pi R$  :

$$T = \frac{2\pi R}{|\vec{v}|}$$

Pendant ce laps de temps, l'angle  $\theta$  aura varié de  $\theta_0$  à  $\theta_0 + 2\pi$  et la **vitesse angulaire** est définie par :  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . On tire de ces expressions la relation liant la vitesse de la particule à sa *vitesse angulaire* :

$$|\vec{v}| = \omega \cdot R$$

**Point de contrôle** Dans quelle unité est donc exprimée la vitesse angulaire  $\omega$  ?

### Le mouvement circulaire non uniforme

En toute généralité, la vitesse peut *varier en module*. Lorsqu'il en est ainsi, il existe une **accélération tangentielle** à la trajectoire :

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

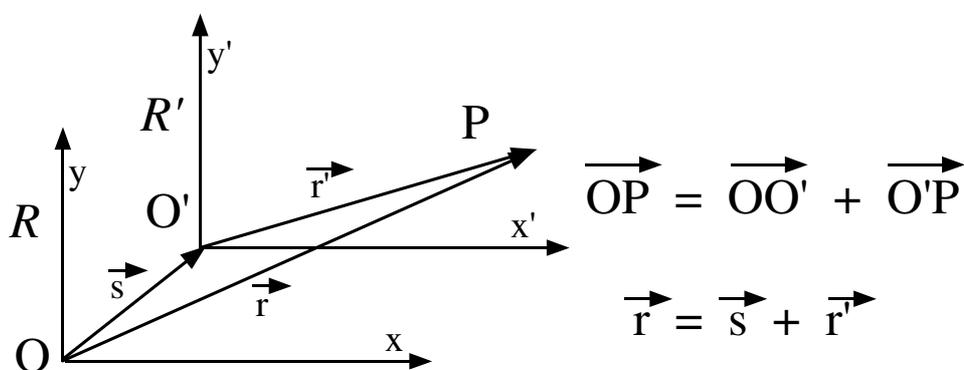
Cette accélération, tangente à la trajectoire comme la vitesse, est de même sens que la vitesse si le module de cette dernière augmente et de sens opposé si le module de la vitesse diminue.

L'accélération totale, dans ce cas général est :  $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$

## La vitesse relative

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, le mouvement d'une particule doit être décrit par rapport à un référentiel ; il est parfois nécessaire de décrire le mouvement d'une particule par rapport à un référentiel lui-même en mouvement.

Sur la figure ci-dessous, un observateur repère la position de la particule  $P$  par rapport au référentiel  $R$  et un autre observateur par rapport au référentiel  $R'$  dont nous allons, pour simplifier, considérer que les axes sont parallèles. L'addition des vecteurs est immédiate :



Puisque la vitesse s'obtient en dérivant le vecteur position par rapport au temps,

$$\vec{v}(P) = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\vec{s}}{dt} \right|_R + \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{R'} = \vec{v}(OO') + \vec{v}'(P)$$

$\vec{v}(P)$  est la vitesse de  $P$  vue par l'observateur de  $R$ ,  $\vec{v}'(P)$  celle de  $P$  vue par l'observateur de  $R'$  et  $\vec{v}(OO')$  la vitesse du référentiel  $R'$  par rapport à  $R$ .

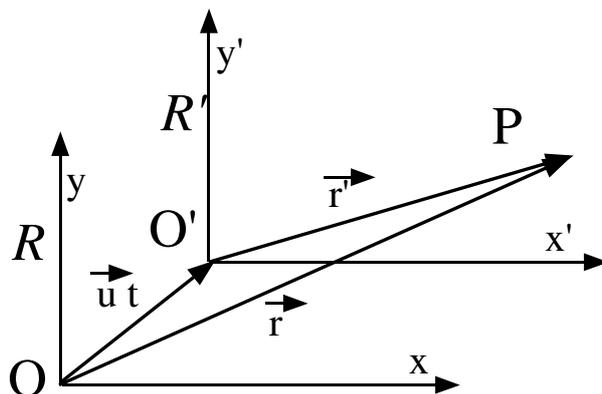
**Point de contrôle** Vous êtes assis en voiture ; votre voiture est à l'arrêt. Il neige au dehors et vous observez la neige. Vous démarrez ; comment voyez-vous alors les flocons tomber ? Identifiez la vitesse de la neige vue depuis le trottoir et depuis votre voiture ainsi que la vitesse de votre voiture aux trois vitesses de l'expression précédente.

## La transformation de Galilée

Si maintenant le référentiel  $R'$  se déplace à vitesse constante  $\vec{u}$  par rapport à  $R$ . Si les deux origines  $O$  et  $O'$  coïncident à l'instant  $t = 0$ , nous avons :

$$\vec{r}(P) = \vec{r}'(P) + \vec{u}t$$

L'équation vectorielle précédente est équivalente à trois équations scalaires.



On rencontre très souvent le cas où la vitesse  $\vec{u}$  est parallèle à un des axes des référentiels, parallèle à l'axe  $Ox$  par exemple  $\vec{u} = u\hat{i}$ . Dans ce cas :

$$x = x' + ut \quad y = y' \quad z = z' \quad t = t'$$

C'est la **transformation de Galilée** des coordonnées.

Remarque importante : Nous avons fait l'hypothèse "naturelle" selon laquelle l'observateur depuis le référentiel  $R$  et l'observateur depuis  $R'$  relèvent le même temps écoulé  $\Rightarrow t = t'$ . Une fois qu'ils ont synchronisé leurs montres, elles le seront pour toujours.

On obtient les relations entre les vitesses et entre les accélérations de la particule dans ce cas où la vitesse  $\vec{u}$  est constante :

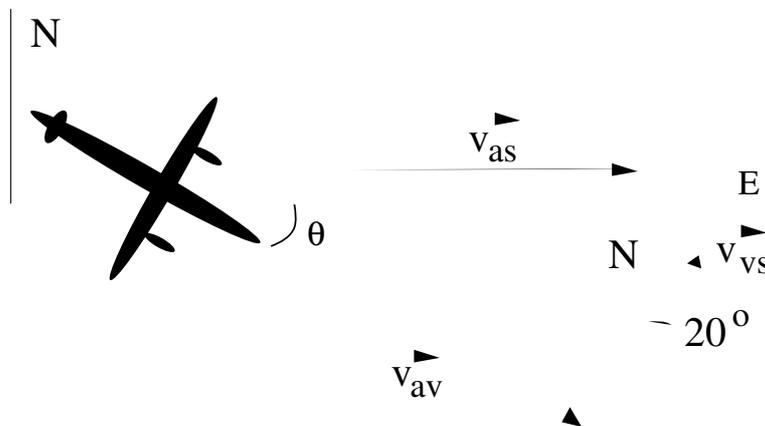
$$\vec{v}(P) = \vec{v}'(P) + \vec{u} \quad , \quad \vec{a}(P) = \vec{a}'(P)$$

**Point de contrôle** Comment feriez-vous pour définir un *temps écoulé* ?

## Un exemple

Sur la figure ci-dessous, un avion se dirige vers l'Est alors que le pilote le pointe quelque peu vers le Sud-Est : en effet un vent de 65 km/h par rapport au sol souffle vers le Nord-Est avec un angle de  $20^\circ$  par rapport à la direction du Nord. Appelons :  $\vec{v}_{as}$ ,  $\vec{v}_{vs}$  et  $\vec{v}_{av}$  les vitesses de l'avion par rapport au sol, du vent par rapport au sol et de l'avion par rapport au vent. Cette dernière vitesse est de 215 km/h et fait un angle  $\theta$  par rapport à la direction de l'Est.

Quelle est la vitesse de l'avion par rapport au sol et que vaut l'angle  $\theta$  ?



La vitesse de l'avion par rapport au sol est égale à somme vectorielle de sa vitesse par rapport au vent et de la vitesse du vent par rapport au sol :

$$\vec{v}_{as} = \vec{v}_{av} + \vec{v}_{vs}$$

En projetant sur l'axe  $y$  dirigé vers le Nord, nous obtenons :

$$v_{as\ y} = v_{av\ y} + v_{vs\ y}, \text{ ou } 0 = -215 \sin \theta + 65 \cos 20^\circ \Rightarrow \theta = 16,5^\circ$$

En projetant sur l'axe  $x$  dirigé vers l'Est, nous obtenons en utilisant la valeur obtenue de  $\theta$  et sachant que  $v_{as\ x} = v_{as}$  :

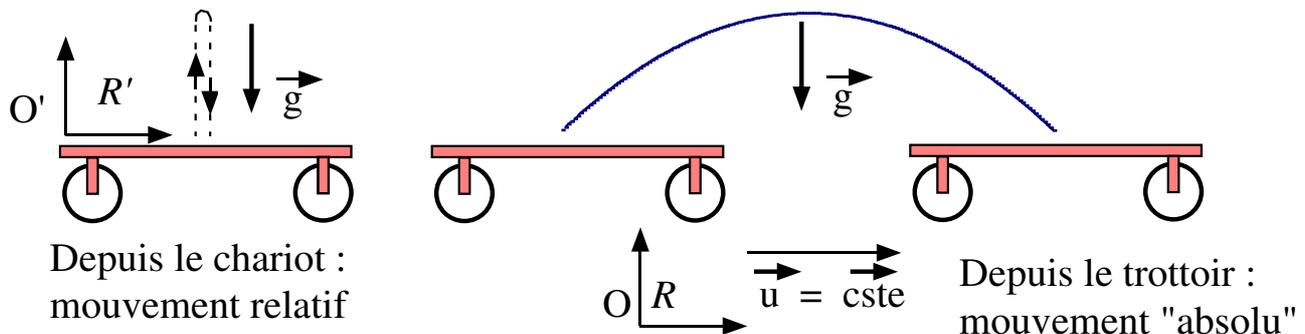
$$v_{as\ x} = v_{av\ x} + v_{vs\ x}, \text{ ou } v_{as} = 215 \cos 16,5^\circ + 65 \sin 20^\circ \Rightarrow$$

$$v_{as} = 228 \text{ km/h}$$

## Accélération depuis deux référentiels en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre

Dans ce cas, la vitesse du référentiel  $R'$  peut être prise comme  $\vec{u} = +u\hat{i}$  avec  $u = cst$ . Le passage des coordonnées du référentiel  $R'$  à celles du référentiel  $R$  se fait par une transformation de Galilée pour laquelle  $\vec{v}(P) = \vec{v}'(P) + \vec{u}$  et  $\vec{a}(P) = \vec{a}'(P)$ .

Depuis le chariot, lançons verticalement une balle (voir figure ci-après). Dans le référentiel du chariot  $R'$ , la balle décrit un MRUA dont l'accélération est  $\vec{a}' = \vec{g}$ . Sa vitesse  $\vec{v}'$ , dans  $R'$ , est uniquement verticale.



Pour un observateur immobile sur le trottoir  $R$ , le chariot a une vitesse horizontale  $\vec{u}$ . Vue depuis  $R$ , la vitesse de la balle a maintenant une composante horizontale  $+u\hat{i}$ . Son accélération est toujours  $\vec{a} = \vec{g}$ . Vue depuis  $R$ , la trajectoire de la balle est une parabole (cf. Balistique).

### Si $\vec{u}$ n'est pas constant...

Nous venons de voir que si le référentiel  $R'$  est en translation rectiligne uniforme par rapport à  $R$  ( $\vec{u} = \vec{cst}$ ), les accélérations de la particule  $P$  sont identiques dans les deux référentiels.

Si  $\vec{u}$  n'est pas constant,  $\vec{a}(P) \neq \vec{a}'(P)$  : s'ajoutent à  $\vec{a}'(P)$  des accélérations dues au mouvement de  $R'$  par rapport à  $R$  ; nous y reviendrons au chapitre prochain.

# Physique Générale

## DYNAMIQUE DE LA PARTICULE

### LES LOIS DE NEWTON

TRAN Minh Tâm

#### Table des matières

<b>Les trois lois de Newton</b>	<b>40</b>
Introduction . . . . .	40
Les concepts de base . . . . .	40
Les lois 1 et 2 de Newton . . . . .	41
Quelques forces particulières . . . . .	42
La troisième loi de Newton . . . . .	45
<b>Applications des lois de Newton</b>	<b>46</b>
1. Glissement sur un plan avec une poulie . . . . .	46
2. Prendre son poids dans un ascenseur . . . . .	47

3. Descente de ski . . . . .	48
<b>Dans les référentiels non inertiels</b>	<b>50</b>
Dans un MRUA . . . . .	50
Dans un MCU . . . . .	51
<b>Les lois de Kepler</b>	<b>53</b>
Introduction historique . . . . .	53
Les trois lois de Kepler . . . . .	54
Le cas particulier d'une orbite circulaire comme exemple . . . . .	55

## Introduction

Nous allons discuter de la *dynamique de la particule*. Lorsque nous observons que la vitesse d'une particule change, soit en module, soit en direction, nous *savons* que quelque chose a *causé* ce changement, autrement dit, cette accélération. L'expérience nous dit que ce changement de la vitesse a été causé par une *interaction* entre la particule et le milieu qui l'entoure.

La relation reliant interaction et accélération a été énoncée par Isaac Newton (1642-1727) en 1686 dans les *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

## Les concepts de base

La dynamique de Newton ajoute au cadre de la cinématique (espace - temps) deux notions fondamentales, la **masse** et la **force**.

**La masse** À toute particule, on fait correspondre un nombre unique positif, défini comme quantité de matière. La masse est ainsi, par définition, une *grandeur extensive* qui ne dépend pas de sa vitesse.

En toute rigueur, l'additivité de la masse et son invariance par rapport à la vitesse sont mises en défaut dans les réactions nucléaires et dans les phénomènes relativistes. La théorie de la relativité restreinte devra alors être utilisée.

**La force** Une interaction qui entraîne une accélération de la particule, c.à.d. un changement de sa vitesse, est appelée **force**.

L'action de plusieurs forces sur une même particule est la même que celle de la somme vectorielle  $\sum \vec{F}$  de ces forces (**principe de superposition**).

Exemple : Le changement soudain de direction d'un puck de hockey peut être du à une irrégularité de la surface de la patinoire : son action est de dévier le puck par une poussée lors du choc de ce dernier sur elle.

## Les lois 1 et 2 de Newton

Énoncées en 1687 dans les *Principia*, ces lois ne sont ni dérivées, ni prouvées.

### 1ère loi (ou loi d'inertie)

Il existe un référentiel d'inertie par rapport auquel une particule isolée, c.à.d. soustraite à toute action extérieure, est, soit immobile, soit en mouvement rectiligne uniforme.

Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel d'inertie est aussi un référentiel d'inertie.

La première loi définit ainsi des référentiels d'inertie. Nous pouvons, par exemple, définir la surface de la Terre comme un référentiel d'inertie, mais seulement à condition de négliger le mouvement de la Terre.

### 2ème loi (Concept de Force)

Dans un référentiel d'inertie, l'accélération d'un point matériel est proportionnelle à la résultante des forces qui s'exercent sur lui, le facteur de proportionnalité étant l'inverse de sa masse.

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \sum \vec{F}^{ext} \quad \text{ou} \quad \sum \vec{F}^{ext} = m \cdot \vec{a}$$

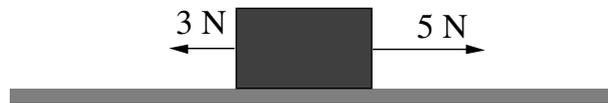
Cette loi semble simple et peut être généralisée à un ensemble de points matériels ; des précautions d'utilisation sont cependant nécessaires, en particulier,  $\sum \vec{F}^{ext}$  est la somme vectorielle des forces extérieures qui s'exercent sur le corps et n'inclut pas les forces internes.

**Unités** : dans le système international (SI),

Force	Masse	Accélération
newton (N)	kilogramme (kg)	m/s <sup>2</sup>

Ainsi :  $1 \text{ N} = (1 \text{ kg}) (1 \text{ m/s}^2) = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$

**Point de contrôle** La figure ci-dessous montre 2 forces agissant sur un bloc posé sur une surface sans frottement. S'il existait une troisième force  $\vec{F}_3$  agissant sur le bloc, quels devraient être son module et sa direction pour que le bloc a) soit immobile, b) bouge vers la gauche avec une vitesse constante de 5 m/s ?



La forme précédente de la 2ème loi n'est pas celle que Newton a énoncée dans les *Principia* : Newton en a donné une formulation plus générale en définissant la **quantité de mouvement** :

On appelle quantité de mouvement d'un point matériel le produit de sa masse par sa vitesse  $\vec{p} = m \vec{v}$ .

**Deuxième loi de Newton** : Dans un référentiel d'inertie, le taux de variation de la quantité de mouvement d'un point matériel en chaque instant est égal à la résultante des forces qui s'exercent sur lui.

$$\boxed{\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Dans le cas où  $m = \text{constante}$ , nous obtenons à nouveau la forme :

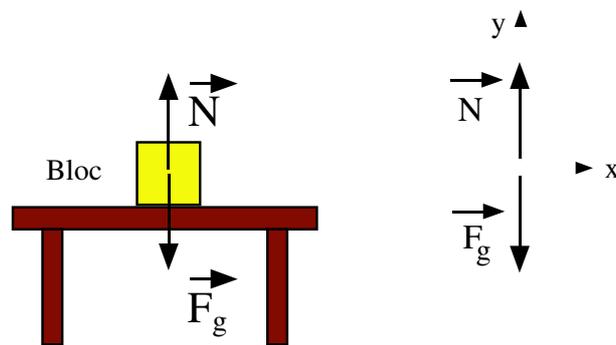
$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Sous sa forme  $\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ , l'équation de Newton s'applique aux cas où la masse est variable, comme c'est le cas pour des particules dont la vitesse est proche de celle de la lumière.

### Quelques forces particulières

La force gravifique  $\vec{F}_g$  : La force  $\vec{F}_g$  sur une masse  $m$  est dirigée vers le centre de la Terre et vaut  $\vec{F}_g = m \vec{g}$  où  $\vec{g}$  est l'accélération dans une chute libre. Cette force gravifique agit toujours, même si la particule n'est pas en chute libre ; autrement dit, il faudrait supprimer la Terre pour l'enlever !

La force de réaction normale  $\vec{N}$  : Quand un corps pèse sur une surface, cette dernière se déforme et réagit par une force  $\vec{N}$  normale à la surface :



Nous pouvons utiliser la deuxième loi de Newton pour le bloc :

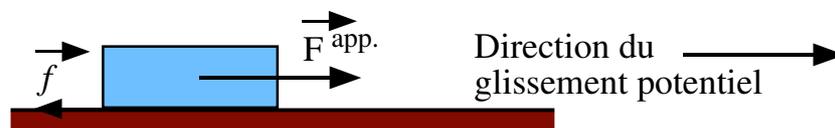
$$N - F_g = m a_y \quad \text{ou} \quad N - m g = m a_y \Rightarrow N = m (g + a_y)$$

Cette équation est aussi valable pour toute accélération verticale  $a_y$  de la table et du bloc. S'ils ne sont pas en accélération par rapport au sol :  $a_y = 0$  et  $N = m g$ .

**Point de contrôle** Le module de  $\vec{N}$  est-il plus grand, plus petit ou égal à  $m g$  si la table et le bloc sont dans un ascenseur qui monte

a) à vitesse constante,    b) à vitesse croissante ?

La force de frottement  $\vec{f}$  : Quand nous faisons glisser un bloc sur une surface, ou tentons de le faire, une force de frottement apparaît, qui est proportionnelle à la charge mais indépendante de la surface de contact.



Que la force de frottement soit proportionnelle à la charge (c.à.d. au module de la force de réaction normale) est plausible, mais qu'elle soit indépendante de l'aire de contact ! En fait, les surfaces ne sont pas lisses au niveau microscopique, les aspérités étant de l'ordre de  $10^{-5}$  à  $10^{-4}$  mm ; les deux surfaces se touchent aux sommets des aspérités : la surface réelle de contact est beaucoup plus petite que la surface macroscopique.

## Les trois lois de Newton

On sait d'expérience qu'il faut exercer une force minimale pour commencer à faire glisser un objet sur une surface ; une fois que l'objet a commencé à glisser, la force nécessaire pour le maintenir à vitesse constante est plus faible : si l'objet n'est pas en mouvement, nous avons la *force de frottement statique*  $\vec{f}_s$  qui s'oppose à la force appliquée :  $\vec{F}^{app.} = -\vec{f}_s$ . Si la force appliquée devient plus intense, le bloc commence à glisser et est alors soumis au *frottement cinétique*  $\vec{f}_c$ .

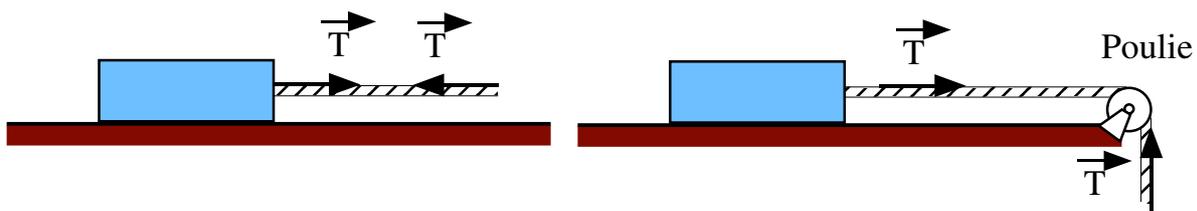
Le fait que la force de frottement soit proportionnelle à la charge nous permet de définir deux coefficients de frottement :

- le coefficient de frottement statique  $\mu_s$  :  $f_s(max) = \mu_s N$ ,
- le coefficient de frottement cinétique  $\mu_c$  :  $f_c = \mu_c N$ .
- $\mu_s > \mu_c$  d'où l'intérêt de l'ABS pour l'adhérence des voitures sur la route.

**Point de contrôle** Pourquoi les équations définissant les coefficients de frottement ne sont-elles pas des équations vectorielles ?

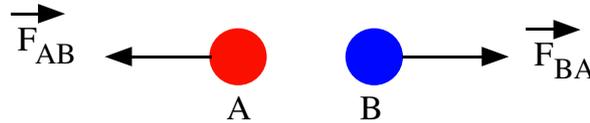
Les coefficients de frottement sont modifiés par des **lubrifiants** : une flaque d'huile est ainsi très dangereuse sur la route. Nos articulations sont lubrifiées par le **fluide synovial**, ce qui rend aisé le mouvement relatifs des os.

La tension  $\vec{T}$  : La tension d'une corde (par ex.) est la force exercée par chaque partie de la corde sur la partie voisine ou sur un objet placé à son extrémité. Si la masse de la corde est négligeable, la tension dans la corde a la même valeur en tout point.

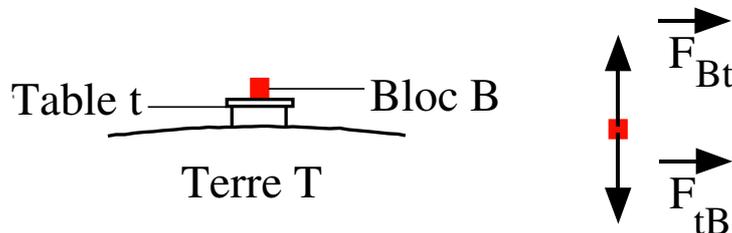


### La troisième loi de Newton

Quand deux corps A et B interagissent, la force que le corps A exerce sur B est égale et opposée à celle qu'exerce le corps B sur A.



Exemple :



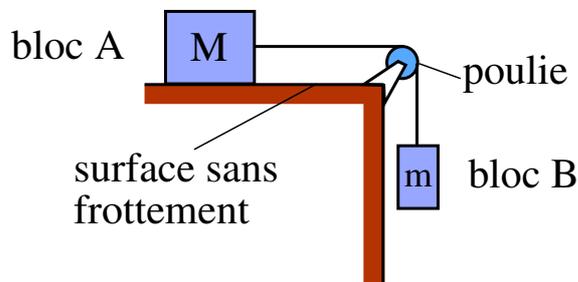
$\vec{F}_{Bt}$  = réaction normale de la table sur le bloc ,  $\vec{F}_{tB}$  = poids du bloc sur la table.

**Point de contrôle** Un âne tire une carriole ; au bout d'un instant, il se rebiffe et, croyant connaître les lois de Newton, tient ce discours à son maître : "J'arrête ! Cela ne sert à rien que je tire sur cette carriole, elle me tire en arrière et on ne peut pas avancer ainsi ! ". Trouvez l'erreur.

## 1. Glissement sur un plan avec une poulie

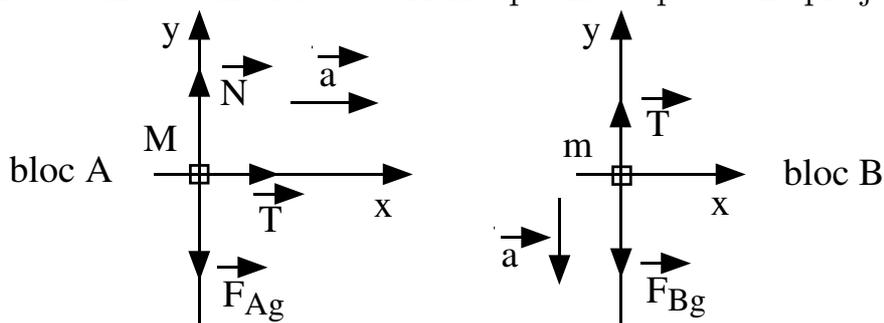
Le bloc A de masse  $M$  est posé sur une surface sans frottement (par ex. une table à coussin d'air). Une corde sans masse est attachée au bloc A, passe par une poulie sans masse et sans frottement et est attachée à un bloc B de masse  $m$ . La chute du bloc B entraîne le bloc A. Trouvez

- l'accélération du bloc A,
- l'accélération du bloc B,
- la tension de la corde.



Points principaux :

- Nous avons des masses et des forces ; utilisons donc la deuxième loi de Newton.
- A quel corps appliquer cette loi ? Aux deux. Bien que ce soient des blocs, on peut traiter ces corps comme des points matériels.
- La poulie change seulement la direction de la tension, mais pas son module.
- La loi de Newton est une loi vectorielle que nous pouvons projeter sur les axes.



Pour le bloc A :  $\sum \vec{F}_A^{ext} = M \cdot \vec{a} \Rightarrow$  sur l'axe  $y$  : puisque pour A, il n'y a pas d'accélération verticale :  $N = F_{Ag} (= mg)$  .

$$\text{Et sur l'axe } x : T = M a \quad (1) .$$

Pour le bloc B :  $\sum \vec{F}_B^{ext} = m \cdot \vec{a}$  . Il s'agit ici de la même accélération en module que pour le bloc A, puisque la corde ne s'est ni allongée ni

raccourcie. Sur l'axe  $y$  :  $T - F_{Bg} = m a_y$

mais  $F_{Bg} = m g$  et  $a_y = -a$ , donc :

$$T - m g = -m a \quad (2) .$$

De (1) et (2), on tire :

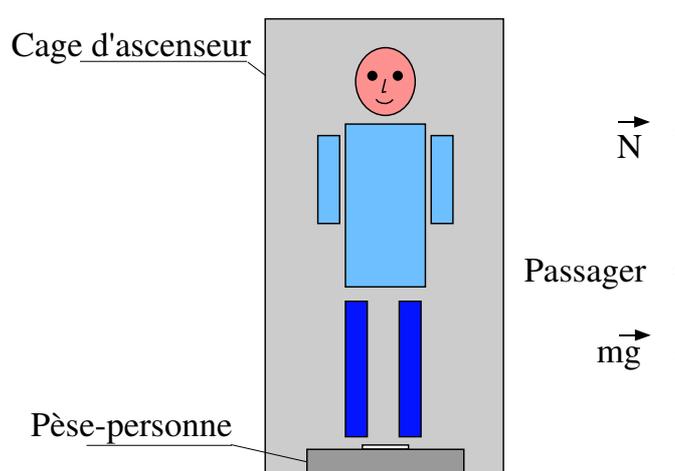
$$a = \frac{m}{M + m} g \quad T = \frac{M m}{M + m} g = \frac{M}{M + m} m g$$

**Point de contrôle** Donnez  $a$  et  $T$  pour les cas limites suivants :

a)  $g = 0$  b)  $M = 0$  c)  $m \rightarrow \infty$

## 2. Prendre son poids dans un ascenseur

Une personne dont la masse est de 70 kg mesure son poids sur un pèse-personne alors qu'elle se trouve dans un ascenseur. Que lit-on sur le pèse-personne? L'ascenseur accélère vers le haut, puis vers le bas avec une accélération de  $3,20 \text{ m/s}^2$  en module; que lit-on ?



**Points principaux :**

1. La lecture du pèse-personne est égale au module de la réaction normale  $\vec{N}$  de la plateforme supérieure de l'instrument : en effet, il y a en-dessous un ressort qui réagit par  $\vec{N}$ .
2. Pour utiliser la 2ème loi de Newton, il nous faut être dans un référentiel d'inertie, qui ne peut être l'ascenseur, puisque celui-ci accélère ! Choisissons donc le sol et mesurons l'accélération du passager par rapport au sol.

En projetant les forces sur l'axe vertical :

$$N - m g = m a \quad \text{ou} \quad N = m (g + a)$$

## Applications des lois de Newton

Si l'ascenseur est à l'arrêt ou s'il se meut à vitesse constante  $a = 0$ , l'indication du pèse-personne donne bien le poids de la personne :

$$N = (70 \text{ kg}) \times (9,80 \text{ m/s}^2) = 686 \text{ Newton}$$

Pour une accélération de  $3,20 \text{ m/s}^2$  vers le haut :  $a = 3,20 \text{ m/s}^2$

$$N = (70 \text{ kg}) \times (9,80 \text{ m/s}^2 + 3,20 \text{ m/s}^2) = 910 \text{ Newton}$$

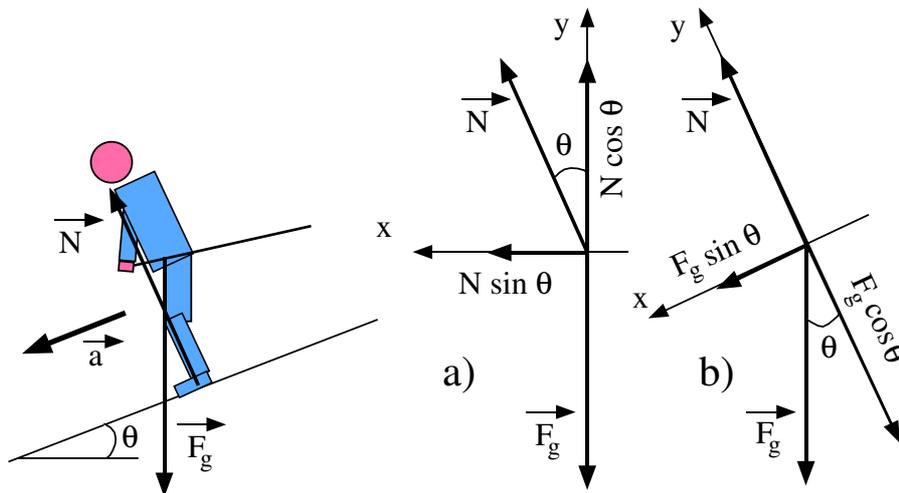
Pour une accélération de  $3,20 \text{ m/s}^2$  vers le bas :  $a = -3,20 \text{ m/s}^2$

$$N = (70 \text{ kg}) \times (9,80 \text{ m/s}^2 - 3,20 \text{ m/s}^2) = 462 \text{ Newton}$$

**Point de contrôle** Qu'indiquerait le pèse-personne si le câble de l'ascenseur se rompait ?

### 3. Descente de ski

Un skieur de masse  $60 \text{ kg}$  descend une pente verglacée (sans frottement) inclinée à  $20^\circ$  par rapport à l'horizontale. Déterminez son accélération et la réaction de la pente sur lui en utilisant les systèmes de coordonnées suivants : **a)** l'axe des  $x$  est horizontale et dirigé vers la gauche, **b)** l'axe des  $x$  est dirigé vers le bas parallèlement au plan incliné.



## Applications des lois de Newton

### Points principaux :

1. Puisqu'il n'y a pas de frottement, les forces s'exerçant sur le skieur sont son poids  $\vec{F}_g$  et la réaction  $\vec{N}$  normale au plan incliné.
2. Puisqu'il n'y a pas de mouvement perpendiculaire à la pente, l'accélération est parallèle au plan incliné.

La deuxième loi de Newton s'écrit :  $\sum \vec{F}^{ext} = \vec{F}_g + \vec{N} = m \vec{a}$   
( $\vec{F}_g = m \vec{g}$ ) . Projétons cette équation vectorielle sur les deux axes.

**a)** Selon l'axe  $x$  horizontal :  $N \sin \theta + 0 = m a \cos \theta$

Selon l'axe  $y$  vertical :  $N \cos \theta - F_g = -m a \sin \theta$

L'accélération apparaît dans les deux équations ; on peut bien sûr résoudre ces deux équations pour avoir  $N$  et  $a$ , mais c'est inutilement compliqué.

**b)** Selon l'axe  $x$  selon la pente :  $0 + m g \sin \theta = m a$

Selon l'axe  $y$  normal au plan :  $N - m g \cos \theta = 0$

Donc :  $a = g \sin \theta = (9,80 \text{ m/s}^2) \sin 20^\circ = 3,3 \text{ m/s}^2$

$N = m g \cos \theta = (60 \text{ kg}) (9,80 \text{ m/s}^2) \cos 20^\circ = 553 \text{ N}$

Dans cet exemple, nous voyons qu'un choix judicieux des axes peut grandement simplifier les calculs.

**Remarque** Dans les applications 1) et 3) ci-dessus, l'adjonction d'un frottement ne complique en rien les deux problèmes : nous connaissons le coefficient de glissement  $\mu$ , par conséquent, pouvons relier cette force de frottement à la réaction normale.

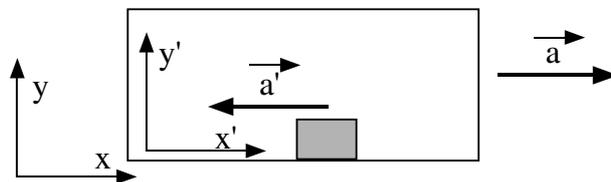
## Dans les référentiels non inertiels

Nous n'avons jusqu'à maintenant traité la dynamique **que** dans des référentiels inertiels dans lesquels la première loi de Newton est applicable. Vous avez certainement noté que nous avons défini ces référentiels inertiels par l'absence de force et d'accélération, puis introduit la deuxième loi dans laquelle force et accélération apparaissent. Il existe pourtant de nombreux *référentiels non inertiels* ou accélérés dans lesquels la première loi n'est pas valable : un exemple est la Terre, qui est en rotation, donc qui est accélérée. Notre planète n'est pas un référentiel d'inertie, pas plus qu'une voiture dans un virage ou un bus qui freine.

Ce chapitre sera consacré au mouvement mesuré dans de tels référentiels non inertiels. Nous discuterons par des exemples des raisonnements faits à partir du référentiel inertiel et du référentiel non inertiel.

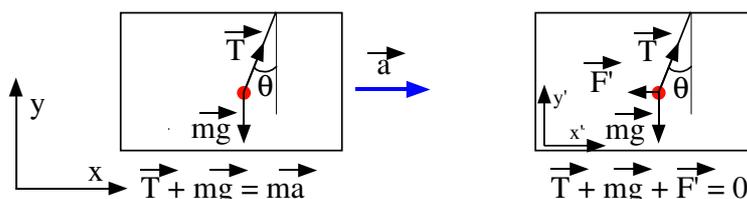
### Dans un MRUA

1) Dans un conteneur en accélération  $\vec{a}$ , un bloc est posé sur le sol, que nous supposons sans frottement. Depuis le référentiel inertiel du trottoir, le bloc est soumis à des forces dont la résultante est nulle : son poids  $\vec{F}_g$  et la réaction du fond du conteneur  $\vec{N}$ . Depuis le trottoir, nous ne voyons aucune accélération du bloc ; si le conteneur était immobile initialement, nous verrons, depuis le trottoir, le bloc rester immobile.



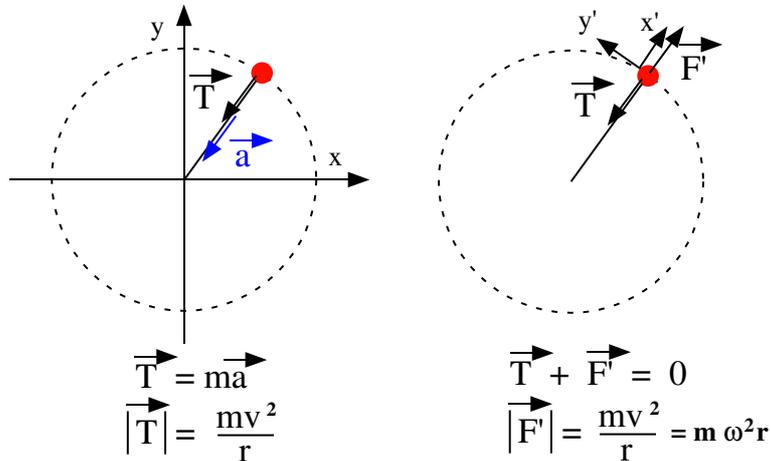
Par contre, depuis le référentiel lié au conteneur, un observateur verrait le bloc partir avec une accélération  $\vec{a}' = -\vec{a}$

2) Une pendule est accroché dans une voiture en accélération  $\vec{a}$  ; depuis le référentiel d'inertie du trottoir, le pendule, solidaire de la voiture, est soumise à la tension du fil  $\vec{T}$  et à son poids  $m\vec{g}$  et l'application de la 2ème loi de Newton donne :  $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$ . Depuis la voiture, un observateur ne voit pas qu'il est en accélération mais voit que le pendule est en équilibre avec un angle  $\theta$  : il explique cet équilibre par une force fictive  $\vec{F}'$  afin d'avoir :  $\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}' = 0$ .



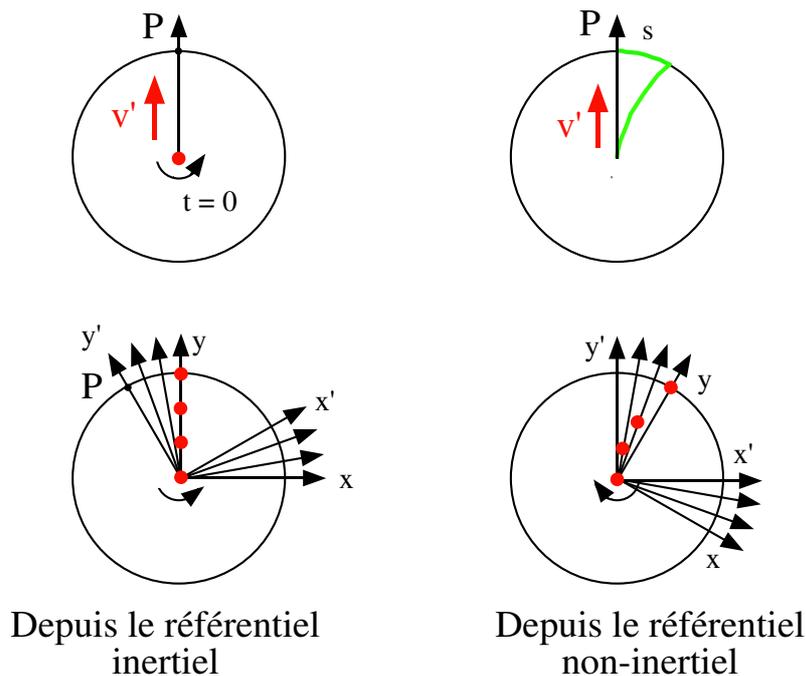
Dans un MCU

1) Dans un référentiel d'inertie, on fait tourner une particule au bout d'une fronde : la particule a une accélération centripète causée par la tension  $\vec{T}$  du fil :  $\vec{T} = m\vec{a}$  (dessin de gauche ci-dessous)



Dans le référentiel non inertiel en rotation lié à la particule, cette dernière est au repos : il n'y a pas d'accélération et on doit équilibrer la tension  $\vec{T}$  par une force  $\vec{F}'$  :  $\vec{T} + \vec{F}' = 0$  et il y a une force fictive dirigée vers l'extérieur appelée *force centrifuge*.

2) La force centrifuge ne dépend pas de la vitesse de la particule dans le référentiel non inertiel. Gaspard Coriolis a mis en évidence en 1835 une autre force fictive qui apparaît lorsque la particule a une vitesse par rapport au référentiel tournant.



## Dans les référentiels non inertiels

Sur le dessin, une plateforme circulaire portant un référentiel  $(x', y')$  tourne dans le sens anti-horaire par rapport au référentiel inertiel  $(x, y)$  à la vitesse angulaire  $\omega = cste$ . A l'instant  $t = 0$ , les axes  $(x, y)$  et  $(x', y')$  coïncident. A cet instant  $t = 0$ , une personne au centre de la plateforme lance un objet vers la personne placée en P sur la plate forme. Depuis le référentiel inertiel, l'objet se déplace en ligne droite, alors que P a parcouru une distance  $s = \omega R t$  (cf. p. 34) au moment où l'objet atteint le bord de la plateforme.

Depuis le référentiel en rotation  $(x', y')$ , on observe que les axes  $(x, y)$  tournent dans le sens horaire et que la vitesse tangentielle de l'objet croît à mesure qu'elle se déplace vers le bord de la plateforme proportionnellement au rayon : il y a par conséquent une accélération  $a'$ . Supposons que la vitesse de l'objet soit suffisante ( $v' \gg \omega R$ ), pour que la plateforme ne tourne que d'un petit angle, nous pouvons considérer l'arc parcouru comme un segment de droite ; nous pouvons faire l'approximation que l'objet parcourt ce segment en un mouvement rectiligne uniformément accéléré. En égalant les deux expressions de  $s$  :

$$s = \frac{1}{2} a' t^2 \quad \text{et} \quad s = \omega R t, \quad \text{on a} \quad \frac{1}{2} a' t = \omega R ; \quad \text{mais} \quad t = \frac{R}{v'}, \quad \text{donc}$$

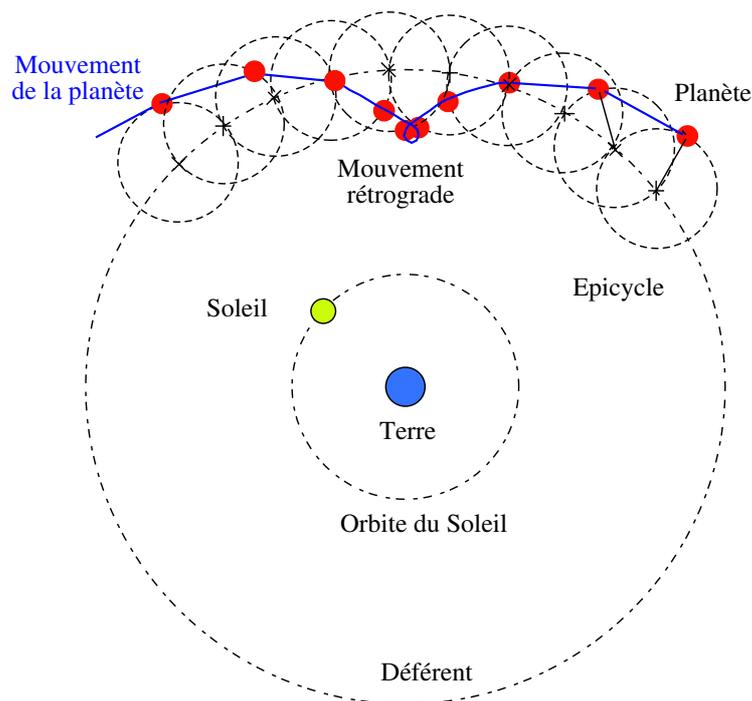
$$a' = 2 \omega v' \quad \text{accélération de Coriolis}$$

L'objet est dévié vers la droite dans le référentiel non inertiel si le mouvement de rotation de ce référentiel est dans le sens anti-horaire. Cette déviation est le résultat de la force fictive appelée *force de Coriolis*.

Exemple : circulation des masses d'air autour d'une dépression...

## Introduction historique

L'observation et l'étude du mouvement des corps célestes a, depuis toujours, passionné les hommes. Les premiers "systèmes du monde" des Grecs remontent à Pythagore et à Platon et affirmaient que le soleil et les planètes évoluaient sur des sphères concentriques par rapport à la Terre. Vers 120 après J.C., **Claude Ptolémée** (90 - 168), à Alexandrie, exposa dans la *Syntaxe* une méthode d'analyse du mouvement des planètes dont l'idée principale est la suivante :

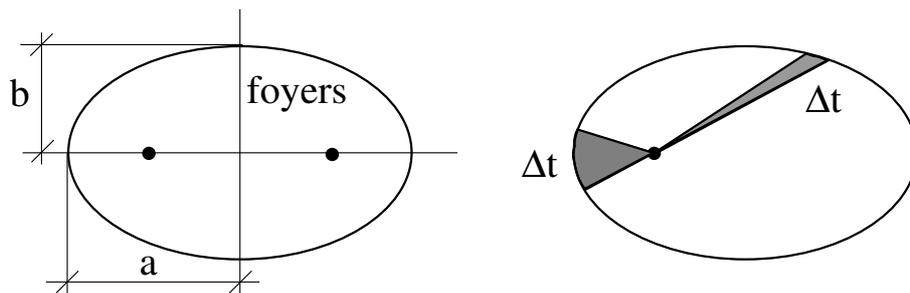


Les planètes se meuvent à vitesse constante sur des cercles appelés *épicycles* dont les centres se déplacent à vitesse constante sur un autre cercle (*déférent*) autour de la Terre. Cette théorie géocentrique explique bien le mouvement rétrograde de certaines planètes, tout comme les théories purement héliocentriques. Elle ne peut cependant pas expliquer les phases de Vénus et est, selon les mots de **Copernic** (1473 - 1543), "*insuffisamment plaisante pour l'esprit*" (dans *De Revolutionibus Orbium Celestium* 1543). Quelques années plus tard, dans le but de réconcilier les vues de l'Eglise et celles des savants, **Tycho Brahé** (1546 - 1601), un astronome danois, proposa un système mixte dans lequel la Terre est fixe, tandis que les planètes tournent autour du Soleil qui, lui-même tourne autour de la Terre. Quand on l'examine aujourd'hui, le modèle de Tycho Brahé nous apparaît comme plus compliqué que les deux précédents. Ce ne fut qu'avec **Johannes Kepler** (1571 - 1630) que les idées de Copernic purent s'imposer.

## Les trois lois de Kepler

**Première loi** (1609, publiée dans *Astronomica Nova*). La trajectoire d'une planète est une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers.

**Deuxième loi** (1609, publiée dans *Astronomica Nova*). Le rayon-vecteur Soleil-planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.



Une ellipse est une courbe plane où la somme des distances aux deux foyers est constante.

**Troisième loi** (1618, publiée dans *Harmonium Mundi*). Pour deux planètes différentes, le carré du rapport des périodes de révolution est égal au cube du rapport des grands axes de leurs orbites.

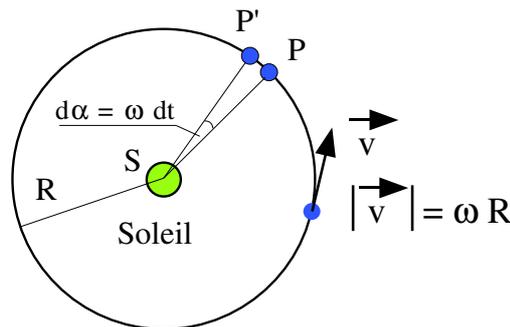
$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

### Remarques.

1. Les lois de Kepler sont des conséquences de la loi de gravitation (la force d'attraction entre deux masses  $m$  et  $M$  est  $\vec{F}^{grav.} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{u}_r$  où  $|\vec{r}|$  est la distance entre les 2 masses et  $G$  la constante de gravitation universelle) et des lois de Newton pour le Soleil et une planète avec  $M_{Soleil} \gg m_{planète}$ . Dans le cas où cette inégalité n'est pas satisfaite, c'est le **centre de masse** (CM) ou centre de gravité qui occupe le foyer. Les deux corps décrivent alors des ellipses autour du CM et les périodes de révolution sont égales.
2. Dans le cas d'un soleil et de plusieurs planètes, les lois de Kepler sont approximativement vérifiées si  $M_{Soleil} \gg m_{planète}$ . Si l'inégalité n'est pas satisfaite, on tombe dans les difficultés du problème à trois (ou plus) corps !
3. La deuxième loi est une conséquence de la conservation du moment cinétique dans le cas d'une force d'attraction centrale. Nous y reviendrons.

### Le cas particulier d'une orbite circulaire comme exemple

Le cercle est une ellipse particulière où les deux foyers sont confondus au centre. Dans cette situation, le Soleil S est au centre de la trajectoire de la planète P. Pendant un court intervalle de temps  $dt$ , la planète aura parcouru un arc de cercle  $PP'$  et le rayon  $SP$  aura balayé un angle  $d\alpha = \omega dt$ ,  $\omega$  étant la vitesse angulaire de rotation de la planète autour du Soleil.



L'arc  $PP'$  a une longueur de  $PP' = R d\alpha = R \omega dt$  de sorte que l'aire  $dA$  balayée par le rayon  $SP$  en  $dt$ , égale à celle du triangle  $SPP'$ , est :

$$dA = \frac{1}{2} R^2 \omega dt$$

D'après la deuxième loi de Kepler,  $\frac{dA}{dt}$  est constante, par conséquent :

$$\frac{dA}{dt} = cste \Rightarrow \omega = cste$$

Le mouvement est un MCU : la vitesse angulaire  $\omega$  et la vitesse de la planète sont constants en module. Ce résultat n'est pas surprenant, vu la symétrie du problème. Nous pouvons utiliser la deuxième loi de Newton et la loi de la gravitation universelle pour déterminer la vitesse angulaire  $\omega$ .

$$F^{grav.} = G \frac{m M}{R^2} = m a_P = m \omega^2 R \Rightarrow$$

$$\omega^2 = G \frac{M}{R^3} \Rightarrow v^2 = G \frac{M}{R}$$

$$\omega^2 = G \frac{M}{R^3} \Rightarrow T^2 = \left( \frac{4 \pi^2}{G M} \right) R^3$$

## Satellite géostationnaire

Nous pouvons, pour les problèmes de satellites, utiliser les équations obtenues ci-dessus, en remplaçant la masse du Soleil par celle de la Terre et celle de la Terre par celle du satellite.

Pour les télécommunications, nous avons besoin de satellites qui apparaissent fixes par rapport à la Terre. Pour cela, le plan de rotation du satellite doit être équatorial. Il doit avoir une période de révolution de 24 heures et se trouver sur une orbite de rayon  $r_{gs}$  tel que :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_{Terre}}} \sqrt{r_{gs}^3} = 24 \text{ heures}$$

En utilisant les données des tables :

$G = 6,672 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$      $M_{Terre} = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$ , on trouve :  
 $r_{gs} = 4,24 \times 10^7 \text{ m} \simeq 6,6$  rayon de la Terre. **Point de contrôle** Le satellite **1** décrit une orbite circulaire autour d'une planète alors que le satellite **2** a une orbite circulaire d'un rayon plus grand. Lequel de ces deux satellites a-t-il la période la plus longue ? la plus grande vitesse ?

## Comète de Halley

La comète de Halley tourne autour du Soleil avec une période de 76 années. En 1986, elle a atteint sa position la plus proche du Soleil (périhélie) à la distance de  $r_p = 8,9 \times 10^{10} \text{ m}$  (entre les orbites de Mercure et de Vénus). L'équation donnant la période (fin de la page précédente) s'applique également pour les orbites elliptiques, à condition de remplacer le rayon par le demi grand axe. Donc :  $T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM} \right) a^3$  : c'est la troisième loi de Kepler ! Comme la distance du Soleil à l'aphélie (point le plus éloigné),  $r_a$ , est telle que  $2a = r_a + r_p$ , avec  $a = \left( \frac{GM T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 2,7 \times 10^{12} \text{ m}$ , on trouve  $r_a = 5,3 \times 10^{12} \text{ m} \simeq$  grand axe de Pluton !

# Physique Générale

## DYNAMIQUE DE LA PARTICULE

### TRAVAIL et ENERGIES

TRAN Minh Tâm

#### Table des matières

<b>Travaux et énergie</b>	<b>57</b>
L'énergie cinétique. . . . .	57
Le travail d'une force. . . . .	57
Travaux de la force de gravitation et de la force de rappel d'un ressort	59
Le Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	60
<b>Deux applications</b>	<b>61</b>
Chute d'un ascenseur . . . . .	61
Choc contre un ressort . . . . .	62
<b>L'énergie potentielle</b>	<b>63</b>

Les forces conservatives . . . . .	63
Recherche de l'énergie potentielle . . . . .	65
La conservation de l'énergie mécanique . . . . .	66
Deux applications . . . . .	67
<b>Travail effectué sur un système par une force extérieure</b>	<b>71</b>

A partir des grandeurs fondamentales, la force, la masse, le déplacement, la vitesse et le temps, nous introduisons quelques grandeurs associées.

### L'énergie cinétique.

Une autre technique pour l'analyse du mouvement consiste en l'utilisation de l'énergie. Cependant, l'énergie apparaît dans des formes tellement diverses qu'une définition claire est *a priori* difficile. Techniquement, on peut dire que l'énergie est une grandeur scalaire associée à un état de la (ou des) particule(s). Commençons par une des formes de l'énergie.

L'énergie cinétique d'une particule est l'énergie qu'elle possède en vertu de son mouvement.

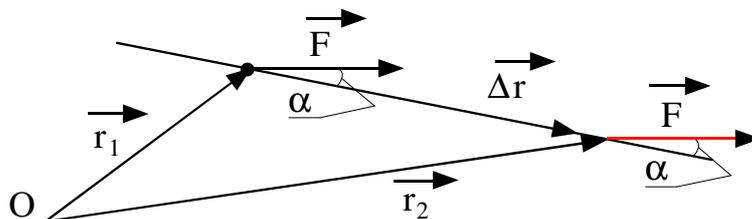
$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

Unité : Dans le système SI, l'énergie cinétique est exprimée en Joules.

### Le travail d'une force.

#### 1) Cas d'une force constante et d'un déplacement rectiligne.

Un point matériel, soumis à une force  $\vec{F}$  constante en module et en direction, se meut d'un point  $\vec{r}_1$  à un point  $\vec{r}_2$ . Son déplacement est donc  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Durant ce déplacement, la force  $\vec{F}$  exerce un travail



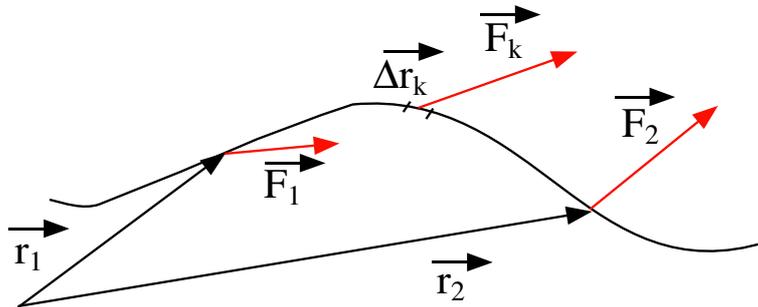
$$W_{12} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = |\vec{F}| |\Delta \vec{r}| \cos \alpha$$

Nous constatons que le travail peut être positif ou négatif. Nous y reviendrons.

#### 2) Cas général.

La force est variable et le déplacement quelconque. Nous pouvons diviser

le déplacement en déplacements élémentaires rectilignes  $\Delta\vec{r}_k$  où la force  $\vec{F}_k$  peut être considérée comme constante :



$$W_{12} = \lim_{|\Delta\vec{r}_k| \rightarrow 0} \sum_k \vec{F}_k \cdot \Delta\vec{r}_k = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \delta W$$

Unité :  $[W] = [F] \cdot [L]$  . Dans le système international (SI), le travail s'exprime en Joule J, donc :  $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  .

3) Remarques :

- a) Pour un déplacement nul, le travail est nul ! Ce qui n'est pas toujours le cas lorsque vous devez mettre la main à la pâte.
- b) Si nous avons plusieurs forces et que  $\vec{F} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}$  , alors :

$$W_{12} = \sum_{\alpha} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{\alpha} \cdot d\vec{r}$$

### La puissance.

C'est le travail exercée par une force pendant l'unité de temps.

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Unité :  $[P] = [W] \cdot [T]^{-1}$ . Dans le système SI, la puissance est exprimée en Watt W.  $1 \text{ W} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$

**Point de contrôle** Un bloc, attaché à une corde fixée à une extrémité, a un mouvement circulaire uniforme. La puissance de la force agissant sur le bloc via la corde est-elle positive, négative ou nulle ?

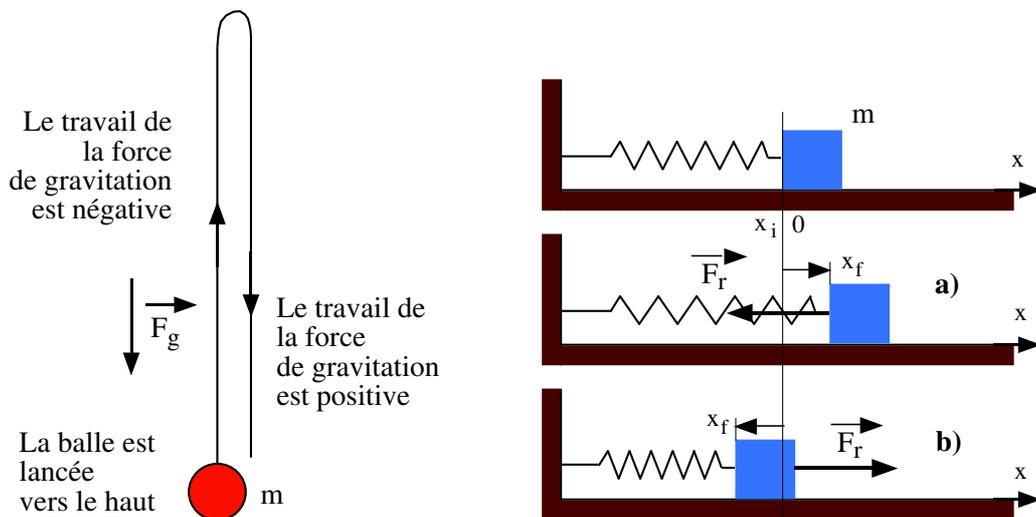
## Travaux de la force de gravitation et de la force de rappel d'un ressort

1) Lançons une balle vers le haut. Si la trajectoire de la balle est verticale, durant la partie ascensionnelle, le travail de la force de gravitation sur la balle est :

$$W_g = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = m g |\Delta \vec{r}| \cos \pi = -m g |\Delta \vec{r}|$$

Durant la partie descendante, le travail de cette force est :

$$W_g = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = m g |\Delta \vec{r}| \cos 0 = +m g |\Delta \vec{r}|$$



2) La *force de rappel* du ressort est  $\vec{F}_r = -k \vec{x}$ , où  $\vec{x}$  est la distance dont a été détendu (a) ou comprimé (b) le ressort et  $k$  la *constante du ressort*. Puisque la force de rappel du ressort dépend de son allongement (ou de son raccourcissement), pour calculer le travail de cette force, nous devons intégrer les éléments de travaux  $\vec{F}_r \cdot d\vec{x}$  : Dans le cas a) :

$$W_r = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F}_r \cdot d\vec{x} = - \int_{x_i}^{x_f} k \vec{x} \cdot d\vec{x} = -\frac{1}{2} k [x_f^2 - x_i^2] = \frac{1}{2} k [x_i^2 - x_f^2]$$

Il en est de même pour le cas b) :  $W_r = \frac{1}{2} k [x_i^2 - x_f^2]$

Remarque : nous avons ici  $-k \vec{x} \cdot d\vec{x} = -k x dx$  car le mouvement est à 1 seule dimension ici.

## Le Théorème de l'énergie cinétique

Nous avons défini le **travail** d'une force s'exerçant sur une particule, mais ne l'avons pas encore relié au mouvement de cette dernière.

Calculons la variation de l'énergie cinétique dans un référentiel  $\mathcal{R}$  quelconque :

$$dT = d \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = m \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \vec{v} \cdot \vec{a} dt = m \vec{a} \cdot \vec{v} dt = m \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

En utilisant la deuxième loi de Newton, applicable seulement pour un référentiel d'inertie :

$$dT = m \vec{a} \cdot d\vec{r} \quad \underbrace{=} \quad \vec{F} \cdot d\vec{r} = \delta W$$

*2<sup>e</sup> loi de Newton*

d'où :

$$\boxed{dT = \delta W}$$

La forme intégrale de cette équation est donc :

$$\boxed{T_2 - T_1 = W_{12}}$$

**Théorème** : Dans un référentiel d'inertie, la variation de l'énergie cinétique d'une particule est égale au travail de la force qui s'exerce sur la particule.

Ainsi, dans l'exemple de **la balle lancée verticalement** de la page précédente, dans la partie ascensionnelle, le travail de la force de gravitation est négative : la force  $\vec{F}_g$  retire de l'énergie cinétique à la balle et la vitesse de cette dernière diminue. Inversément, dans la partie descendante, le travail de  $\vec{F}_g$  est positive, l'énergie cinétique est augmentée et la vitesse de la balle augmente.

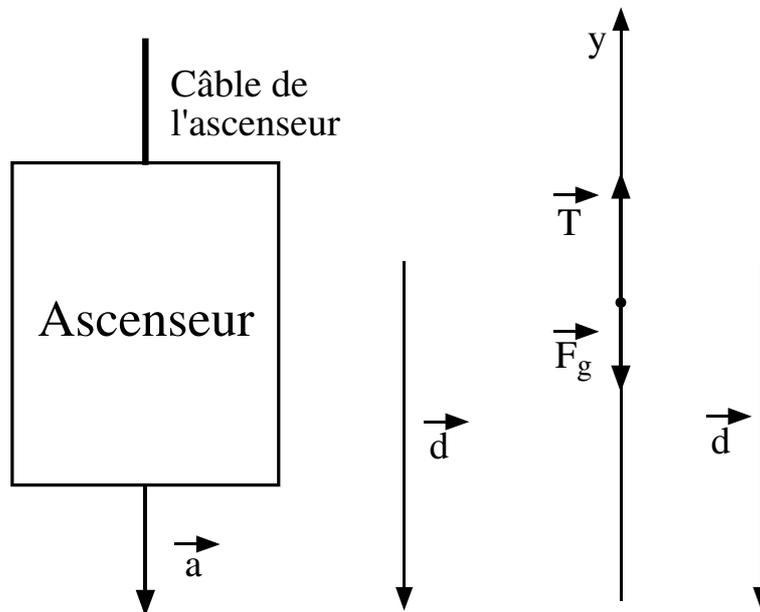
**Point de contrôle** Une particule se meut sur l'axe  $Ox$ . Son énergie cinétique augmente-t-elle ou diminue-t-elle si sa vitesse passe

- a) de  $-3$  m/s à  $-3$  m/s,                      b) de  $-2$  m/s à  $+2$  m/s?

Dans chaque situation, le travail effectué sur la particule est-il positif, négatif ou nul ?

### Chute d'un ascenseur

Un ascenseur d'une masse  $m = 500$  kg descend avec une vitesse de  $v_1 = 4,0$  m/s quand le câble qui le tient glisse : l'ascenseur descend alors avec une accélération constante de  $\vec{a} = \overline{g}/5$ .



Durant la descente  $d = 12$  m, la force de gravité (le poids)  $\vec{F}_g$  effectue un travail sur l'ascenseur de

$$W_g = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = mg d \cos 0^\circ = 5,88 \times 10^4 \text{ J}$$

Calculons le travail effectué sur l'ascenseur par la **tension** du câble.

#### Point principal

Il faut d'abord avoir la tension du câble avant de pouvoir en calculer le travail. Comme au chapitre précédent, utilisons la deuxième loi de Newton.

Sur  $Oy$  :  $T - F_g = ma$  . Donc :

$$W_T = T d \cos \pi = m(a + g) d \cos \pi = m \left( -\frac{g}{5} + g \right) d \cos \pi$$

$$W_T = -\frac{4}{5} mg d = -4,70 \times 10^4 \text{ J}$$

Le travail total effectué sur l'ascenseur est la somme des deux travaux précédents :  $W_{tot} = W_g + W_T = +1,18 \times 10^4 \text{ J}$

## Deux applications

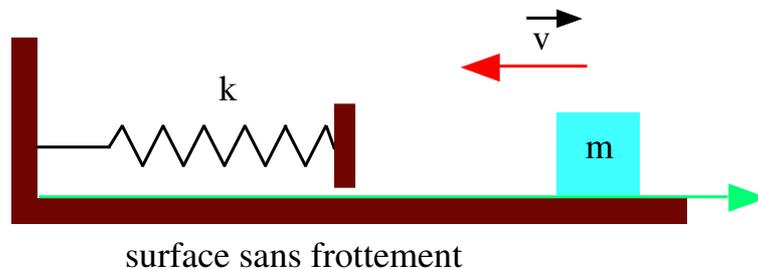
La vitesse finale de l'ascenseur sera donc, au bout de  $d = 12\text{m}$  :

$$T_2 = T_1 + W_{tot} = \frac{1}{2} m v_1^2 + W_{tot} = 1,58 \times 10^4 \text{ J}$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2T_2}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,58 \times 10^4}{500}} = 7,95 \text{ m/s}$$

### Choc contre un ressort

Un bloc de masse  $m = 0,40 \text{ kg}$  glisse sur une surface sans frottement à la vitesse de  $v_1 = 0,50 \text{ m/s}$ . Il heurte et comprime un ressort de constante  $k = 750 \text{ N/m}$ . Quand le bloc s'arrête momentanément, de quelle distance  $d$  est comprimé le ressort ?



#### Points principaux

a) Le travail qu'effectue le ressort sur le bloc fait varier l'énergie cinétique de ce dernier :  $W_{12} = T_2 - T_1$  (Théorème de l'énergie cinétique). Le bloc a une énergie cinétique initiale de  $T_1 = 1/2 m v_1^2$  et une énergie cinétique finale nulle.

b) Le travail effectué par le ressort sur le bloc est de  $W_r = 1/2 k [x_i^2 - x_f^2]$  ; ici :  $x_i = 0$ , le ressort est au repos, et  $x_f = d \Rightarrow W_r = -1/2 k d^2$ .

En utilisant le Théorème de l'énergie cinétique (point a)) et l'expression du travail du ressort (point b)) ci-dessus, nous avons :

$$T_2 - T_1 = 0 - \frac{1}{2} m v_1^2 = -\frac{1}{2} k d^2 \quad \text{et}$$

$$d = v \sqrt{\frac{m}{k}} = 0,50 \sqrt{\frac{0,40}{750}} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

## Les forces conservatives

Reprenons la discussion des travaux de la force de gravitation et de la force de rappel d'un ressort. Dans les deux cas :

1. Une particule (la balle ou le bloc) est en interaction : une force agit sur elle, qui provient de l'environnement de la particule (l'attraction gravifique de la Terre ou le ressort).
2. Dans une situation, la force effectue un travail  $W_1$  sur la particule, transférant de l'énergie de l'énergie cinétique à *une autre forme d'énergie*.
3. Quand la situation s'inverse, le sens du transfert d'énergie change et la force effectue un travail  $W_2$  .

(La situation inverse est ici celle où balle revient à la même altitude d'où elle a été lancée ou celle du ressort qui est comprimé de la même distance  $x_f$  dont il a été détendu).

Dans la situation où nous avons toujours  $W_1 = -W_2$  , l'autre forme d'énergie mentionnée plus haut est *l'énergie potentielle* et la force est dite *conservative*. Les forces de gravitation et de rappel des ressorts sont des forces conservatives.

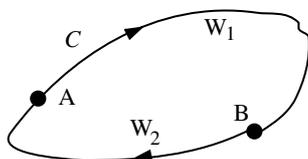
Que ce soit dans la partie ascendante de la balle ou dans la partie descendante, le changement d'énergie potentielle est  $\Delta U = -W$  où  $W$  est le travail de la force d'attraction gravifique. Il en est de même pour la force de rappel du ressort.

Par contre, les forces de frottement ne sont pas conservatives ; en effet, considérons le mouvement d'un bloc sur une surface non exempte de frottement : au fur et à mesure de son déplacement, l'énergie cinétique du bloc se transforme en énergie thermique ; il y a échauffement du bloc et de la surface et cet échauffement ne peut pas être re-transformée en énergie cinétique du bloc.

Considérons maintenant un chemin fermé quelconque sur lequel se meut la particule. Pour deux points quelconques de ce chemin, une force est

## L'énergie potentielle

conservative si et seulement si nous avons pour une partie du chemin  $W_1$  et pour la deuxième partie  $W_2 = -W_1$  : le travail total effectué par la force conservative sur tout chemin fermé est nul.

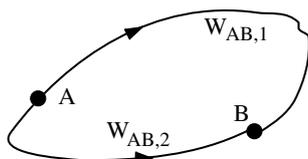


Pour une force  $\vec{F}$  conservative, nous avons donc sur un chemin fermé  $C$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

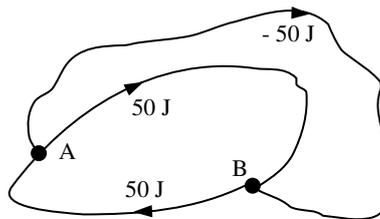
Nous savons d'expérience que la force de gravitation est conservative : quand nous lançons une balle vers le haut avec une énergie cinétique de  $1/2 mv_0^2$ , la force de gravitation la ralentit, l'arrête et la fait retomber. Quand la balle revient à son point de départ, son énergie cinétique est de  $1/2 mv_0^2$  : la force de gravitation a transféré autant d'énergie **de** la balle dans la partie ascendante qu'elle en a restituée **à** la balle dans la partie descendante.

Une conséquence de cette propriété est que le travail d'une force conservative sur une particule se déplaçant du point  $A$  au point  $B$  ne dépend pas du chemin que prend la particule pour aller de  $A$  à  $B$  :



Pour une force conservative :  $W_{AB,1} = W_{AB,2}$ , 1 et 2 étant ici deux chemins arbitraires. La démonstration de la relation précédente est immédiate à partir de la relation  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  obtenue pour une force conservative.

**Point de contrôle** Une force  $\vec{F}$  agit sur une particule se déplaçant de  $A$  à  $B$  par les trois chemins dessinés sur la figure ci-dessous. Les travaux effectués par la force sont donnés sur la figure ; la force  $\vec{F}$  est-elle conservative ?



## Recherche de l'énergie potentielle

Nous avons vu au paragraphe précédent que, lorsque la force est conservative, son travail effectuée entre deux points (ce travail est par ailleurs égal à la variation de l'énergie cinétique de la particule entre ces deux points) transfère l'énergie cinétique à l'énergie potentielle  $U$  :  $\Delta T = -\Delta U (= W)$ .

Par conséquent : 
$$\Delta U = U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1) = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W .$$

## Energie potentielle gravifique

Ce problème est à une seule dimension, la force  $\vec{F}_g$  étant toujours verticale.

La relation  $\Delta U = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  se réduit à

$$\Delta U = - \int_{y_1}^{y_2} F_g dy = - \int_{y_1}^{y_2} (-mg) dy = mg y \Big|_{y_1}^{y_2}$$

$$\Delta U = mg(y_2 - y_1) = mg \Delta y$$

Remarquons que seuls des changements  $\Delta U$  de l'énergie potentielle gravifique (ou de tout autre énergie potentielle) ont un sens : en effet, ils correspondent, au signe près, aux travaux de la force entre deux situations données. Dans notre cas de l'énergie potentielle gravifique, nous pouvons prendre arbitrairement l'énergie potentielle gravifique comme nulle à la hauteur  $y = 0$ . Avec cette définition :  $U(y) = mgy$  à condition que l'on reste assez près de la surface de la Terre pour que  $g$  demeure constant.

## Energie potentielle d'un ressort

Considérons maintenant le bloc attaché au ressort de constante  $k$  dessiné à la page 59. Nous avons montré que la force de rappel du ressort est conservative. Nous pouvons donc définir une énergie potentielle associée au ressort. Lorsque le bloc passe de la position  $x_i$  à la position  $x_f$ , la force de rappel  $\vec{F}_r = -k \vec{x}$  effectue un travail sur le bloc; la force étant conservative, nous avons :

$$\Delta U = -W_r = - \int_{x_i}^{x_f} -k \vec{x} \cdot d\vec{x} = \frac{1}{2} k [x_f^2 - x_i^2]$$

Ici aussi, choisissons la situation de référence comme étant celle où le ressort est à l'équilibre (ni comprimé ni détendu) et le bloc, est dans cette situation à  $x_i = 0$ . L'énergie potentielle du ressort est alors :  $U(x) = \frac{1}{2} k x^2$ .

## Résumé des points importants

1. Le travail effectué par une **force conservative** ne dépend que des positions initiale et finale et non du trajet parcouru.
2. **L'énergie potentielle** est l'énergie attribuable aux positions relatives de deux (ou plus) particules (ou objets) en interaction.

Dans les deux exemples que nous avons pris, les particules en interactions sont :

- ★ la balle de masse  $m$  et la Terre présente via l'accélération gravifique  $g$ .
- ★ le bloc de masse  $m$  et le ressort de constante  $k$ .

L'énergie potentielle est bien attribuable aux positions relatives de la balle par rapport à la Terre et de la masse par rapport au ressort.

3. L'énergie potentielle ne peut être définie **que** pour une force conservative.

## La conservation de l'énergie mécanique

On définit l'énergie mécanique d'un système comme la somme de son énergie potentielle et des énergies cinétiques des éléments qui le compose.

Pour un point matériel, nous avons :  $E_{méc.} = T + U$

## L'énergie potentielle

Considérons d'abord que notre système est **isolé** : aucune force extérieure au système ne cause de variation d'énergie à l'intérieur de ce système. Considérons une force conservative agissant à l'intérieur de ce système : le travail qu'effectue cette force change l'énergie cinétique de l'objet et l'énergie potentielle du système. La variation de l'énergie cinétique est  $\Delta T = W$  et celle de l'énergie potentielle de  $\Delta U = -W$ . Donc :

$$\Delta T = -\Delta U \Rightarrow T_2 + U_2 = T_1 + U_1$$

ce qui veut dire que  $E_{méc.}(2) = E_{méc.}(1) \Rightarrow \Delta E_{méc.} = 0$ .

Dans un système isolé où seules travaillent des forces conservatives, l'énergie mécanique du système est conservée.

### Exemple du ressort

Dans l'exemple dessiné sur la figure, nous pouvons utiliser le principe de la conservation de l'énergie mécanique si la surface sur laquelle glisse le bloc n'a pas de frottement. Quand nous lâchons le bloc à vitesse nulle, le ressort est détendu : son énergie potentielle est maximale  $U_{max} = 1/2 k x_{max}^2$  et son énergie cinétique est nulle  $\Rightarrow E_{méc.} = 1/2 k x_{max}^2$ . Quand le bloc passe à l'abscisse  $x = 0$ , la vitesse du bloc est maximale, son énergie cinétique est maximale et égale à  $T_{max} = U_{max} = 1/2 k x_{max}^2$ , l'énergie potentielle étant nulle et  $E_{méc.}$  étant conservée...

### Deux applications

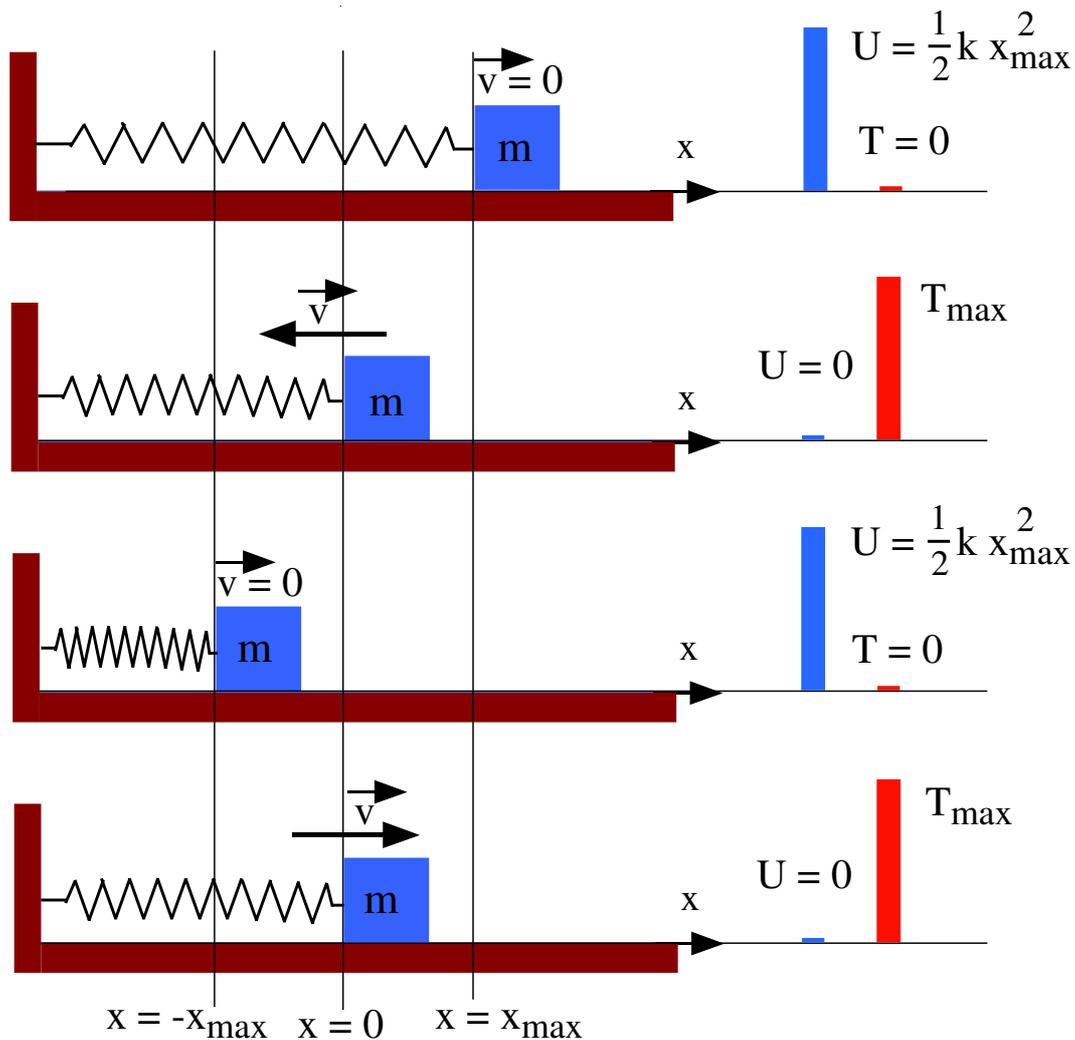
#### Pendule simple

Un pendule simple a une longueur de  $L = 2$  m et une masse de  $m = 2$  kg. Lorsque son angle  $\theta$  avec la verticale est de  $35^\circ$ , le module de sa vitesse est de  $|\vec{v}| = 1,2$  m/s. Calculez la tension du fil pour n'importe quelle position du pendule.

#### Points principaux

1. Le *système* est ici le pendule et la Terre. La force de gravitation étant conservative et agissant à l'intérieur du système, l'énergie mécanique est conservée.

## L'énergie potentielle



2. Dans le mouvement d'oscillation du pendule, l'énergie cinétique est transférée de et à l'énergie potentielle.
3. Choisissons arbitrairement l'énergie potentielle zéro comme étant à  $\theta = 0$ .
4. Lorsque le pendule atteint le maximum de sa course,  $\theta = \theta_{\max}$  et alors  $\vec{v} = 0$ .

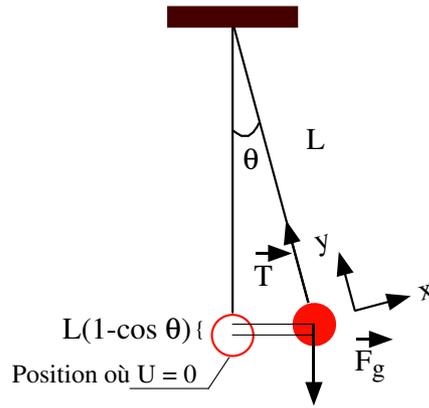
Pour résoudre ce problème, nous devons utiliser non seulement la conservation de l'énergie mécanique mais aussi la deuxième loi de Newton. Cette dernière, projetée sur l'axes  $Oy$  indiqué sur la figure, donne :

$$T - m g \cos \theta = m a_y = m \frac{v^2}{L} \Rightarrow T = m \left( g \cos \theta + \frac{v^2}{L} \right)$$

L'accélération  $a_y$  est ici l'accélération radiale d'un mouvement circulaire.

Pour obtenir la tension, nous devons connaître la vitesse du pendule que

## L'énergie potentielle



nous déduisons de la conservation de l'énergie mécanique :

$$E_{méc.} \underset{\theta \text{ quelconque}}{=} \frac{1}{2} m v^2 + m g L (1 - \cos \theta) \underset{\theta = 35^\circ}{=} 8,53 \text{ J}$$

d'où 
$$v^2 = \frac{2 [E_{méc.} - m g L (1 - \cos \theta)]}{m},$$

expression que nous pouvons introduire dans celle donnant la tension :

$$T = m g \cos \theta + \frac{2}{L} [E_{méc.} - m g L (1 - \cos \theta)]$$

L'angle maximum qu'atteint le pendule est tel que sa vitesse est nulle ; par conséquent :

$$E_{méc.} \underset{\theta \text{ maximum}}{=} m g L (1 - \cos \theta_{max.}) = 8,53 \text{ J} \Rightarrow \theta_{max.} = 38,72^\circ$$

La tension est de 28,12 N pour  $\theta = 0^\circ$  et de 15,33 N pour  $\theta = 38,72^\circ$ .

## Saut à l'élastique

Un sauteur à l'élastique d'une masse  $m = 61$  kg se jette depuis un pont à 45 mètres au dessus d'une rivière. Non détendu, son élastique a une longueur  $L = 25$  m et se comporte comme un ressort de constante  $k = 160$  N/m. L'élastique est attaché aux pieds du sauteur. A quelle hauteur se trouvera ses pieds lorsque sa vitesse sera nulle la première fois ?

### Point principal

Le *système* est ici le sauteur, son élastique et la Terre. Les forces qui interviennent sont conservatives et agissent à l'intérieur du système : l'énergie mécanique est conservée.

$$\Delta T + \Delta U_{ressort} + \Delta U_{gravifique} = \Delta E_{méc.} = 0$$

$\Delta T$  est le changement d'énergie cinétique du sauteur,  $\Delta U_{ressort}$  est le changement de l'énergie potentielle de l'élastique et  $\Delta U_{gravifique}$  le changement d'énergie potentielle du sauteur.

Utilisons cette relation entre le point d'élancement et le point le plus bas du sauteur.

Entre ces 2 points,  $\Delta T = 0$  puisque les vitesses y sont nulles.

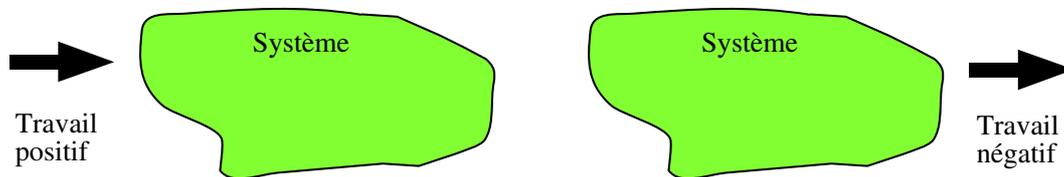
Si l'élastique s'est détendu de  $d$ ,  $\Delta U_{gravifique} = -m g (L + d)$  et  $\Delta U_{ressort} = +1/2 k d^2$ .

$$\text{Par conséquent : } \Rightarrow \underbrace{0}_{\Delta T} + 1/2 k d^2 - m g (L + d) = 0$$

Donc :  $d = 17,9$  m et les pieds du sauteur se trouvent à  $45 - (L + d) = 2,1$  m de la rivière.

## Travail effectué sur un système par une force extérieure

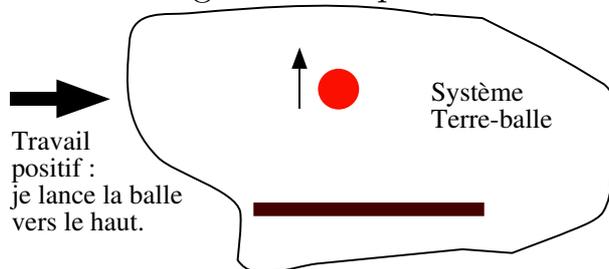
Nous allons étendre la notion de travail sur un point matériel vue aux paragraphes précédant en considérant l'effet d'une force extérieure; le système n'est donc plus isolé.



La convention adoptée est que le travail effectué est positif ou négatif suivant que ce travail est apporté ou retiré au système.

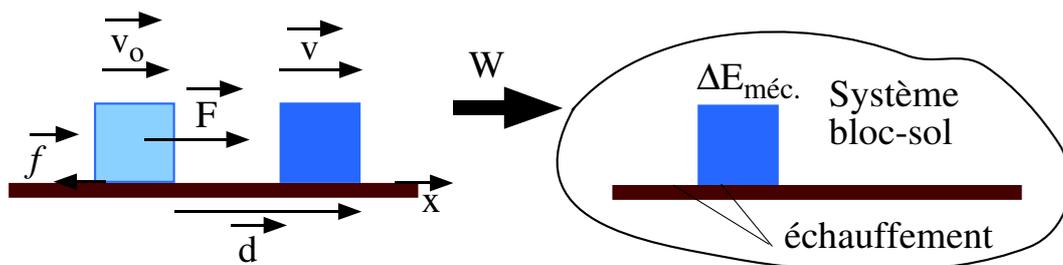
### Exemple

Considérons le système "Terre-balle". Par une action extérieure à ce système, par exemple l'action des muscles de mon bras, j'apporte de l'énergie cinétique à la balle en la lançant vers le haut. Dès ce moment, une nouvelle situation est créée, avec une nouvelle valeur de l'énergie mécanique



$$W = \Delta E_{méc.}$$

Incluons maintenant les forces non-conservatives comme les forces de frottements. Agissons sur le système "Bloc-sol" ci-après par une force  $\vec{F}$  constante :



## Travail effectué sur un système par une force extérieure

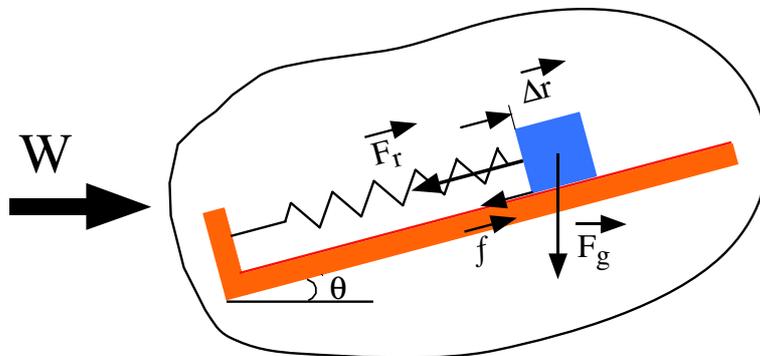
Deuxième loi de Newton sur  $Ox$  :  $F - f = m a$  ;

les forces sont constantes, nous avons un MRUA :  $\Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2 a d$

en combinant les deux équations ci-dessus :  $F d = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 + f d$

c.à.d. : 
$$W = \Delta T + \underbrace{f \cdot d}_{\text{dissipation!}}$$

Nous pouvons **généraliser** le résultat précédant aux situations comportant des changements d'énergie potentielle : dans ces situations, le "système" que nous considérons renferme des objets en interaction via des forces conservatives. Par exemple, nous pouvons considérer que notre bloc monte une rampe et est attaché à un ressort.



Dans ce cas, 
$$W = \Delta E_{méc.} + f \cdot d.$$

Le travail de la force non-conservative,  $f \cdot d$  provoque un échauffement et/ou un changement de l'état du système lui-même, c.à.d. un changement d'énergie thermique et/ou un changement d'une forme quelconque d'énergie *interne* du système. Nous ne développerons pas, à ce stade, cette notion d'*énergie interne*. Disons seulement que ce peut être, par exemple, l'énergie liée à l'état d'agrégation du bloc et du sol.

Par conséquent : 
$$W = \Delta E_{tot} = \Delta E_{méc.} + \Delta E_{int}$$

Cette loi de conservation de l'énergie ne résulte pas d'une démonstration exacte à partir de principes physiques, mais plutôt d'inombrables observations ; il n'y a pas d'exception à la loi de conservation de l'énergie.

Pour un système isolé : 
$$\Delta E_{tot} = 0 .$$

# Physique Générale

## SYSTEME DE PARTICULES

## DYNAMIQUE DU SOLIDE

TRAN Minh Tâm

### Table des matières

<b>Loi de Newton pour un ensemble de particules</b>	<b>73</b>
Quelques exemples simples . . . . .	73
Le centre de masse CM . . . . .	73
Le mouvement du centre de masse . . . . .	75
Conservation de la quantité de mouvement dans un système isolé . .	76
Les chocs . . . . .	76
Systèmes à masses variables : le principe des fusées . . . . .	80
<b>Rotation d'un corps rigide autour d'un axe fixe</b>	<b>82</b>
Rappel sur la cinématique de rotation . . . . .	82

Caractère vectoriel de la vitesse et de l'accélération angulaire . . . . .	83
L'énergie cinétique de rotation . . . . .	84
Le moment des forces, l'équation de Newton pour la rotation et le moment cinétique . . . . .	85
Forme vectorielle de l'équation de Newton pour la rotation . . . . .	89
Travail et énergie cinétique de rotation . . . . .	90
Parallèle entre la Mécanique de la particule et celle du solide autour d'un axe fixe . . . . .	92

Jusqu'à présent, nous n'avons discuté que des points matériels puis des objets pouvant être assimilés à des points matériels. Un point matériel ne peut avoir que des mouvements de translation et ses dimensions sont négligées par rapport à son déplacement. Il est évident que la réalité est plus complexe et nous devons considérer un ensemble de points matériels, pouvant tourner tout en se déplaçant ...

### Quelques exemples simples

**Collision** Dans une collision, nous devons considérer au moins deux points matériels, dont aucun n'est fixe.

**Corps rigide dont un point est fixe** L'exemple type d'un corps rigide avec un point fixe est la toupie. Dans ce problème, puisque le corps est rigide, les distances entre deux points quelconques du corps ne varient pas au cours du temps et nous avons un point fixe, celui du contact de la toupie avec le sol.

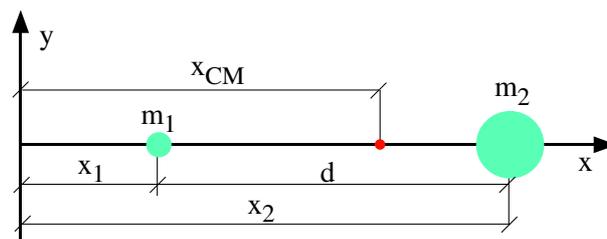
**Corps rigide avec deux points fixes** S'il existe deux points du corps rigide qui sont fixes, alors tout point de l'axe joignant les deux points est aussi fixe au cours du temps. Un exemple est une roue libre de tourner autour de son axe.

### Le centre de masse CM

Pour un système de deux particules de masses  $m_1$  et  $m_2$ , la position du centre de masse est défini par

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}$$

où  $M$  est la masse totale du système :



## Loi de Newton pour un ensemble de particules

Pour un système comportant  $N$  particules, la généralisation est immédiate :

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i$$

Si les  $N$  particules sont distribuées dans l'espace à 3 dimensions, nous aurons toujours la définition précédente pour chacune des composantes  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Comme  $\vec{r}_{CM} = x_{CM} \hat{i} + y_{CM} \hat{j} + z_{CM} \hat{k}$ , les trois définitions scalaires pour les composantes peuvent être remplacée par :

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

Pour un **solide**, nous sommes confrontés à un nombre énorme de particules et devons traiter le problème d'une manière continue : les sommations sur des particules individuelles précédentes doivent être remplacées par des intégrales :

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int x dm \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm \quad z_{CM} = \frac{1}{M} \int z dm$$

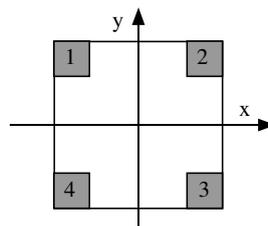
### Remarques

- 1) Le centre de masse peut ne pas coïncider avec un point matériel du système.
- 2) La symétrie du problème aide grandement dans la recherche du CM.

Le CM d'un tronc de cône creux ne coïncide pas avec un point matériel de l'objet



**Point de contrôle** La figure ci-après montre un carré uniforme. a) Où se trouve son centre de masse au départ ? b) Où se trouve son CM si on enlève le carré 1 ? c) les carrés 1 et 2 ? d) les carrés 1 et 3 ? e) les carrés 1, 2 et 3 ? f) les quatre petits carrés ? Répondez en terme de quadrants, axes ou points sans faire aucun calcul.



## Le mouvement du centre de masse

La vitesse instantanée d'une particule étant la dérivée de son vecteur position, nous avons, en dérivant le vecteur position du CM par rapport au temps :

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_{CM} = M \vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \vec{P}_{tot}$$

Nous avons ici utilisé la définition de la quantité de mouvement :  $\vec{p} = m \vec{v}$ .

La quantité de mouvement totale d'un système de particules,

$$\vec{P}_{tot} = \vec{P}_{CM} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \text{ est équivalente à celle d'une seule particule fictive}$$

de masse  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  se déplaçant à la vitesse du centre de masse  $\vec{v}_{CM}$ .

**Remarque** Ceci apporte une énorme simplification : nous pouvons traiter le mouvement de *translation* d'un système de particules ou d'un objet étendu comme s'il s'agissait de particules dont les masses seraient concentrées au CM : c'était ce que nous avons fait jusqu'à présent.

Dérivons par rapport au temps l'équation  $M \vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$ .

Nous obtenons naturellement :  $M \vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ .

Ici,  $\vec{F}_i$  est la force résultante sur la particule  $i$ . Lorsque nous faisons la somme des forces sur toutes les particules les "forces intérieures" qui s'exercent entre elles s'annulent deux à deux (3ème loi de Newton), ne

laissant que la force extérieure résultante ; par conséquent :  $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F}^{ext}$ .

$$\boxed{\vec{F}^{ext} = M \vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt}}$$

## Conservation de la quantité de mouvement dans un système isolé

Si un système de particules est **isolé**, le mouvement du CM est tel que

$$M \vec{a}_{CM} = 0 = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \Rightarrow$$

$$\vec{P}_{CM} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \text{constante}$$

(Loi de conservation de la quantité de mouvement pour un système isolé)

**Point de contrôle** Sur un sol sans frottement, un objet initialement au repos explose en deux parties. Une partie glisse sur sol dans la direction  $+Ox$ .

- a) Quelle est la somme des quantités de mouvement des deux parties après l'explosion ? b) La deuxième partie de l'objet peut-elle partir avec un angle par rapport à l'axe  $Ox$  ? c) Quelle direction prendra cette deuxième partie de l'objet ?

## Les chocs

Un choc (ou collision) est un événement isolé dans lequel deux corps (ou plus) exercent l'un (ou les uns) sur l'autre (ou sur les autres) des forces relativement fortes pendant des laps de temps relativement courts.

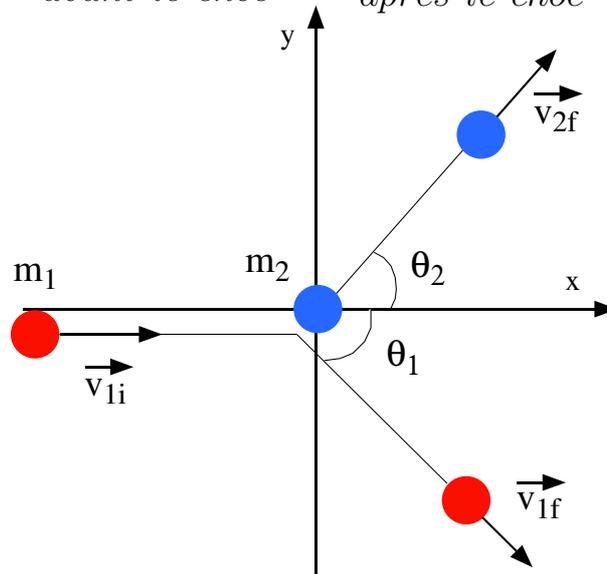
Il est très difficile de décrire précisément ce qui se passe durant la collision ; ce que l'on peut faire, c'est trouver les conditions pour appliquer les lois de conservation.

Pour un système isolé, la quantité de mouvement  $\vec{P}_{CM} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \vec{P}_{tot}$  est conservée, puisque n'agissent que les forces intérieures au système dans le choc. Ici,  $\vec{p}_i$  est la quantité de mouvement du corps  $i$ .

### Application 1 : Choc entre deux particules.

Utilisons la conservation de la quantité de mouvement :

$$\underbrace{\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}}_{\text{avant le choc}} = \underbrace{\vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}}_{\text{après le choc}}$$



Nous traitons ici de la collision d'une particule de masse  $m_1$  et de vitesse initiale  $\vec{v}_{1i}$  sur une particule  $m_2$  initialement au repos. Après la collision, les quantités de mouvement (donc les vitesses) des particules sont dirigées selon les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  par rapport à la direction initiale donnée par  $\vec{v}_{1i}$ . L'équation vectorielle de conservation de la quantité de mouvement, projetée sur les axes, donne :

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta_1 + m_2 v_{2f} \cos \theta_2 \quad \text{selon Ox}$$

$$0 = -m_1 v_{1f} \sin \theta_1 + m_2 v_{2f} \sin \theta_2 \quad \text{selon Oy}$$

Nous n'avons donc que 2 équations pour 4 inconnues qui sont  $v_{1f}$ ,  $v_{2f}$ ,  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , les masses des particules et la vitesse initiale  $v_{1i}$  étant données. Nous ne pouvons pas résoudre ce problème.

Dans le cas particulier d'une **collision élastique**, nous avons la conservation de l'énergie mécanique totale dans le choc, le système étant isolé

## Loi de Newton pour un ensemble de particules

et aucune perte interne (tel un échauffement interne ou une déformation des objets) n'étant observée. Si l'état initial (final) correspond à l'instant qui précède (suit) immédiatement la collision, la position, et donc l'énergie potentielle, ne peuvent varier. Une collision élastique est donc caractérisée par la conservation de l'énergie cinétique  $T_f = T_i$ .

Revenons à notre application. Si la collision est élastique, nous avons une équation supplémentaire :  $\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$

Nous avons ainsi 3 équations pour 4 inconnues. Si nous connaissons l'une des inconnues, par exemple l'angle  $\theta_1$ , avec les 3 équations, nous pouvons déduire les 3 autres inconnues,  $v_{1f}$ ,  $v_{2f}$  et  $\theta_2$ .

Dans le cas extrêmement particulier d'une collision élastique entre deux **particules de même masse  $m$** , les équations précédentes deviennent :

$$\begin{aligned} m \vec{v}_{1i} &= m \vec{v}_{1f} + m \vec{v}_{2f} & \frac{1}{2} m v_{1i}^2 &= \frac{1}{2} m v_{1f}^2 + m \frac{1}{2} v_{2f}^2 \\ \Rightarrow \vec{v}_{1i} &= \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f} & v_{1i}^2 &= v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \end{aligned}$$

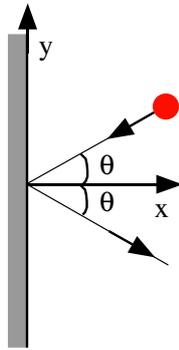
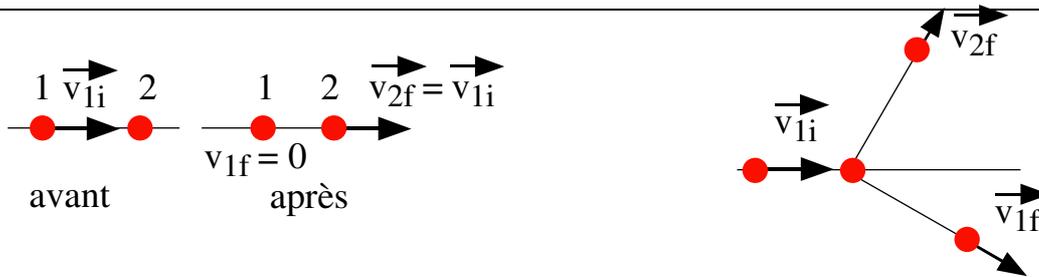
Nous pouvons multiplier la première équation, à gauche par  $\vec{v}_{1i}$ , à droite par  $\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}$ . On obtient facilement :  $v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2 \vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f}$ . En comparant avec l'équation  $v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$ , il est évident que

$$\vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f} = 0$$

Plusieurs possibilités :

1.  $\vec{v}_{1f} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{2f} = \vec{v}_{1i}$  : le choc est **frontal** et il y a "échange" de vitesses : tout se passe à 1 dimension.
2.  $\vec{v}_{2f} = 0$  : la particule 1 "frôle" la particule 2 et cette dernière n'a pas acquis de vitesse : il n'y a pas de collision !
3.  $\vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f} = 0 = |v_{1f}| |v_{2f}| \cos \theta \Rightarrow \theta = 90^\circ$

## Loi de Newton pour un ensemble de particules

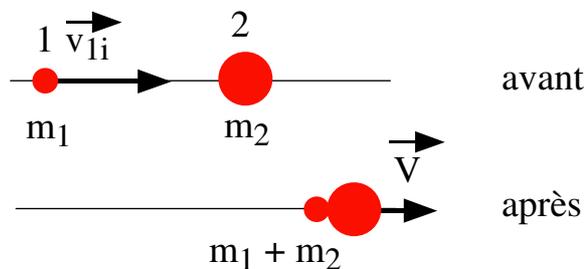


### Point de contrôle

La figure ci-contre montre une collision parfaitement élastique d'une balle contre un mur infiniment lourd. Donnez la direction de  $\Delta p$ , la variation de la quantité de mouvement de la balle.

### Application 2 : Le choc mou.

C'est un cas qui n'existe qu'en physique classique ; les deux particules adhèrent après le choc. Nous traitons ici du cas où une particule est initialement au repos ; la généralisation au cas où les 2 particules sont initialement en mouvement est immédiate (voir point de contrôle ci-après).



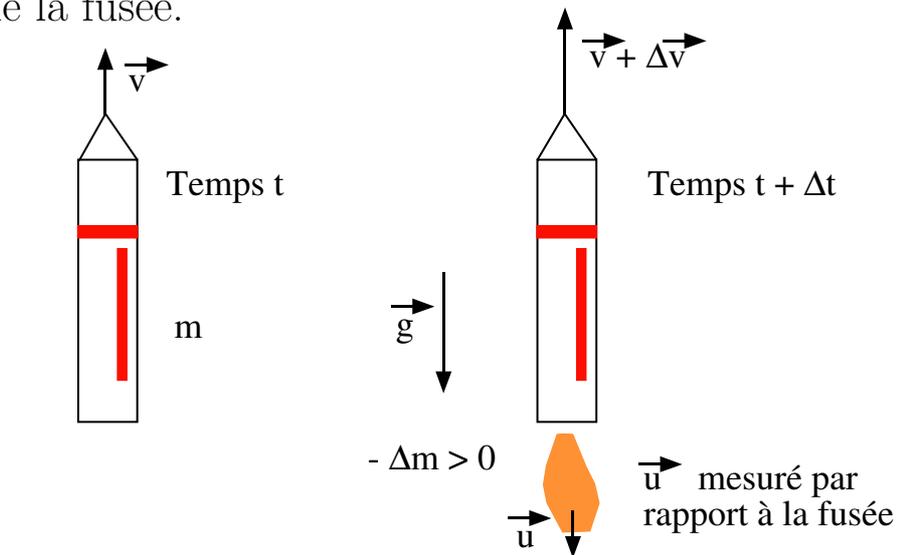
Ici aussi, le système est isolé et la quantité de mouvement totale est conservée :

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

**Point de contrôle** Un corps 1 et un corps 2 subissent un choc mou à une dimension. Quelle est leur quantité de mouvement finale si leurs quantités de mouvement initiales étaient de **a)** 10 kg.m/s et 0 ; **b)** 10 kg.m/s et 4 kg.m/s ; **c)** 10 kg.m/s et - 4 kg.m/s ?

## Systemes à masses variables : le principe des fusées

La fusée, d'une masse variable avec le temps  $m(t)$  éjecte pendant  $\Delta t$  une masse  $-\Delta m > 0$  de fluide animée d'une vitesse  $\vec{u}$  mesurée dans le référentiel de la fusée.



Utilisons la 2ème loi de Newton pour le corps de la fusée au temps  $t$  et aux deux “masses” au temps  $t + \Delta t$ .

$$\vec{F}^{ext} = \frac{d}{dt} \vec{P}_{tot} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{P}_{tot}(t + \Delta t) - \vec{P}_{tot}(t)}{\Delta t}$$

avec :

$$\vec{F}^{ext} = m(t) \vec{g}$$

$$\vec{P}_{tot}(t) = m(t) \vec{v}$$

$$\vec{P}_{tot}(t + \Delta t) = (m(t) + \Delta m) (\vec{v} + \Delta \vec{v}) - \Delta m \underbrace{(\vec{v} + \vec{u})}_{\text{vu depuis le sol !}}$$

Un observateur au sol attribue en effet la vitesse  $\vec{v} + \vec{u}$  à la masse de fluide  $-\Delta m$ .

$$\Rightarrow \vec{P}_{tot}(t + \Delta t) = m(t) \vec{v} + m(t) \Delta \vec{v} - \Delta m \vec{u} + \text{termes en } \Delta m \cdot \Delta \vec{v}$$

$$\Rightarrow m(t) \vec{g} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(t) \Delta \vec{v}}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m \vec{u}}{\Delta t} = m(t) \vec{a} - \vec{u} \frac{dm}{dt}$$

## Loi de Newton pour un ensemble de particules

L'accélération du corps de la fusée est ainsi :

$$\vec{a} = \vec{g} + (-\vec{u}) \left( -\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} \right)$$

Examinons les signes de notre expression :

1.  $\vec{g}$  est dirigé vers le bas ;

2.  $-\vec{u}$  est dirigé vers le haut ;

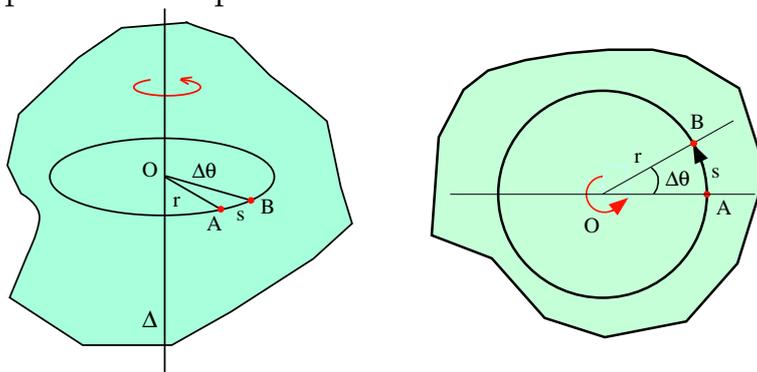
3.  $dm < 0$  est la déperdition de masse de la fusée.

Donc  $(-\vec{u}) \left( -\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} \right)$  est dirigé vers le haut.

Si  $-\frac{1}{m} \frac{dm}{dt}$  et  $|\vec{u}|$  sont assez grands,  $\vec{a}$  peut être dirigé vers le haut !

## Rappel sur la cinématique de rotation

La figure ci-après représente un corps rigide en rotation autour d'un axe  $\Delta$  fixe perpendiculaire au plan  $OAB$  et passant par  $O$ . Pendant un intervalle de temps  $\Delta t$ , l'objet tourne d'un angle  $\Delta\theta$  et tous les points de la droite  $OA$  se déplacent vers leur position correspondante sur la droite  $OB$ . Si nous traitons ce problème par les variables cinématiques tels que  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}$  le problème devient très compliqué du fait que chaque particule sur  $OA$  a une vitesse  $\vec{v}$  différente ! Il est donc plus judicieux d'introduire des variables cinématiques angulaires qui seront communs à toutes les particules qui composent le corps.



Nous avons :  $\Delta\theta = \frac{s}{r}$  par définition de l'angle (en **radian**) . Comme nous l'avons fait pour les vitesses, nous pouvons définir les vitesses angulaires moyenne et instantanée :

$$\omega_{moy} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

La **période**  $T$  est la durée d'une révolution et la **fréquence**  $\nu$  est le nombre de révolutions par seconde ; période et fréquence sont reliées par la relation  $\nu = 1/T$  . La vitesse linéaire  $\vec{v}$  est associée à un déplacement le long de l'arc et, par conséquent, est tangente au cercle et nous avons  $v = \omega r$  : bien que toutes les particules de l'objet aient la même vitesse angulaire, le module de leur vitesse linéaire est proportionnel à la distance qui les sépare de l'axe de rotation.

Lorsque la vitesse angulaire varie, nous avons une accélération angulaire. Comme nous l'avons fait pour les accélérations linéaires, nous définissons

## Rotation d'un corps rigide autour d'un axe fixe

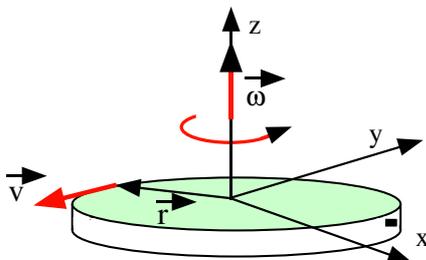
les accélérations angulaires moyenne et instantanée :

$$\gamma_{moy} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \gamma = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

(  $\gamma$  est nul pour un MCU ).

### Caractère vectoriel de la vitesse et de l'accélération angulaire

Nous pouvons aussi donner à la vitesse angulaire un caractère (pseudo) vectoriel;  $\vec{\omega}$  est dirigé selon l'axe de rotation, son sens est donné par la *règle du tire-bouchon* ou celui des *3 doigts* de la main droite (le pouce venant vers l'index dans le sens de la rotation, le majeur donne le sens de  $\vec{\omega}$ ).



La relation avec le vitesse linéaire est  $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

De même, l'accélération angulaire,  $\vec{\gamma} = \frac{d}{dt} \vec{\omega}$  est selon l'axe de rotation, son sens dépend évidemment de l'accroissement ou de la diminution de  $\vec{\omega}$ . Si  $\gamma$  n'est pas nul, nous n'avons pas un MCU : il existe donc une accélération tangentielle  $\vec{a}_t$ , en plus de l'accélération radiale  $\vec{a}_f = -\omega^2 \vec{r}$  toujours présente dans un mouvement non rectiligne. L'accélération tangentielle mesure la variation de la vitesse linéaire de la particule dans son mouvement circulaire :

$$v = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \gamma = \frac{d\omega}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{=a_t} \frac{1}{r} \Rightarrow a_t = r \gamma$$

La relation vectorielle avec l'accélération tangentielle est  $\vec{a}_t = \vec{\gamma} \wedge \vec{r}$

## L'énergie cinétique de rotation

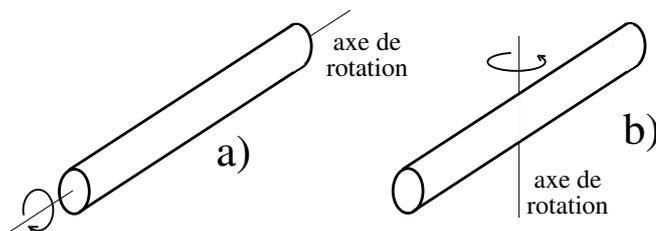
Un objet tournant autour de son axe possède certainement une énergie cinétique associée à la rotation ; nous pouvons trouver son expression en sommant les énergies cinétiques de chacune des particules qui constitue l'objet dans son ensemble :

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

La quantité entre parenthèses est le **moment d'inertie**  $I_\Delta$  du solide : il nous renseigne sur la répartition de la masse du corps autour de l'axe de rotation  $\Delta$ .

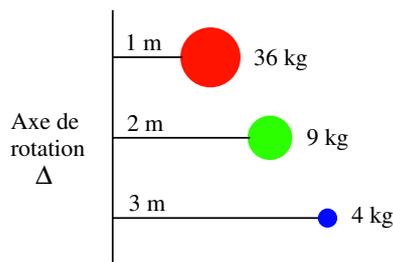
$$I_\Delta = \sum_i m_i r_i^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$$

Exemple Un long cylindre est plus facile à mettre en rotation selon son



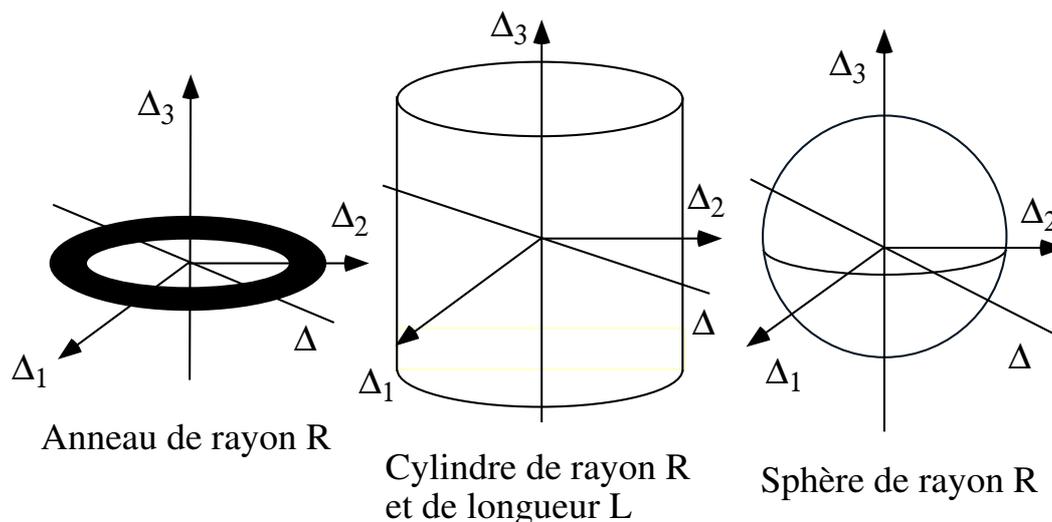
axe longitudinal que selon un axe passant par son centre et perpendiculaire à son axe longitudinal : la masse est distribuée de manière plus proche de l'axe de rotation dans le cas a) que dans le cas b). Pour une même vitesse angulaire de rotation, l'énergie cinétique du solide en rotation dans le cas a) est plus faible que dans le cas b).

**Point de contrôle** La figure suivante montre 3 petites sphères qui tournent autour d'un axe vertical. Classez les sphères suivant leur moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.



### Quelques exemples de moment d'inertie

Si le système dont nous voulons calculer le moment d'inertie ne comporte que quelques particules, nous pouvons faire la sommation  $I = \sum_i m_i r_i^2$ , Dans le cas d'un solide continu, nous devons remplacer la sommation précédente par une intégrale  $I = \int r^2 dm$ . Pour ces calculs, on tiendra compte de la symétrie du solide que nous supposons ici homogène.



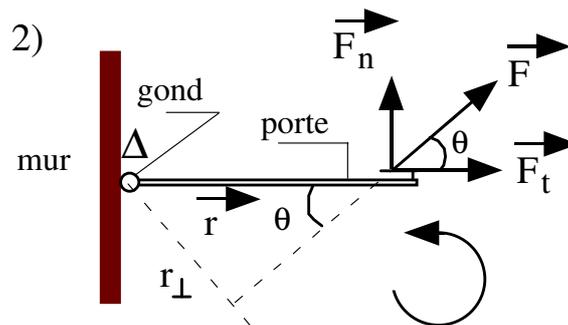
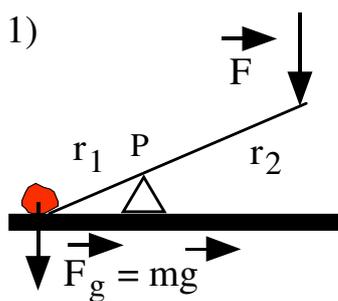
	Moment d'inertie p.r. $\Delta_3$	Moment d'inertie p.r. $\Delta$
Anneau	$MR^2$	$\frac{1}{2}MR^2$
Cylindre	$\frac{1}{2}MR^2$	$\frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$
Sphère	$\frac{2}{5}MR^2$	$\frac{2}{5}MR^2$

### Le moment des forces, l'équation de Newton pour la rotation et le moment cinétique

**Exemple 1** Pour soulever une pierre ou un objet pesant, on emploie souvent un *levier* ; pour pouvoir soulever l'objet, il faut que  $F \cdot r_2 \geq m g \cdot r_1$  et pour avoir l'équilibre  $F \cdot r_2 = m g \cdot r_1$ .

**Exemple 2** Pour ouvrir une porte, nous devons exercer une force  $\vec{F}$  qui ne peut être parallèle à la porte. Nous savons d'expérience que la force à exercer est moins grande si  $\vec{F}$  est perpendiculaire à la porte, c.à.d. à  $\vec{r}$ .

## Rotation d'un corps rigide autour d'un axe fixe



C'est **Léonard de Vinci** qui, le premier, introduisit la notion de *bras de levier* qui est la distance  $r_{\perp}$  entre l'axe  $\Delta$  (ou le pivot) et la direction (ou ligne d'action) de la force  $\vec{F}$ . Dans notre cas, le moment de la force est

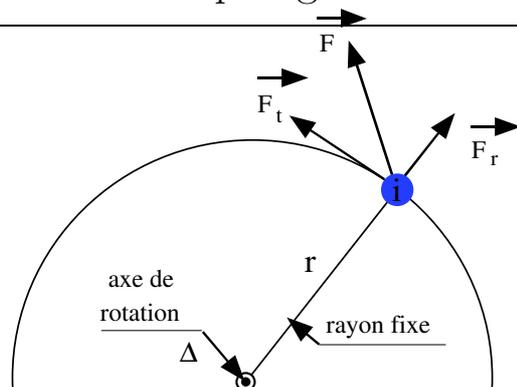
$$M_{\Delta} = r_{\perp} F = r F \sin \theta$$

**Point de contrôle** La barre dessinée ci-dessous peut tourner autour du point pivot situé sur sa gauche. Deux forces,  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  sont appliquées sur la barre ; seule  $\vec{F}_1$  est représentée sur la figure. La force  $\vec{F}_2$  est aussi perpendiculaire à la barre et est appliquée à l'extrémité droite de la barre. Si la barre ne tourne pas, **a)** quel doit être le sens de  $\vec{F}_2$  ? **b)** le module de  $\vec{F}_2$  est-il plus grand, égal ou plus petit que celui de  $\vec{F}_1$  ?



**Equation de Newton** Appliquons l'équation de Newton d'abord pour une particule " $i$ " du solide en rotation autour d'un axe. Une force  $\vec{F}$  agit sur la particule. Comme la particule appartient au solide, elle ne peut que se mouvoir selon un cercle perpendiculaire à l'axe de rotation. Seule la composante tangentielle  $\vec{F}_{t,i}$  de la force peut lui donner une accélération, forcément tangentielle. En utilisant la deuxième loi de Newton le long de la tangente à la trajectoire circulaire :  $F_{t,i} = m_i a_{t,i}$ .

## Rotation d'un corps rigide autour d'un axe fixe



Le moment de la force  $F_{t,i}$  par rapport à l'axe de rotation  $\Delta$  est :

$$M_{\Delta,i} = F_{t,i} r_i \quad \underbrace{\quad}_{\text{Eq. de Newton}} \quad \underbrace{m_i a_{t,i} r_i}_{\text{déf. acc. angulaire}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{déf. acc. angulaire}} \quad \underbrace{m_i \gamma r_i^2}_{\text{déf. acc. angulaire}} = (m_i r_i^2) \gamma$$

$\gamma$  est l'accélération angulaire et  $a_t = \gamma r$

Pour le solide en entier, nous sommes sur les particules "i" :

$$\mathbf{M}_{\Delta} = \sum_i (m_i r_i^2) \gamma = I_{\Delta} \gamma = \mathbf{I}_{\Delta} \frac{d\omega}{dt}$$

( $\omega$  est la vitesse angulaire)

L'équation  $M_{\Delta} = I_{\Delta} \gamma$  peut encore être transformée ainsi :

$$M_{\Delta} = \sum_i (m_i r_i^2) \frac{d\omega}{dt} \underbrace{\quad}_{\omega = v/r} \underbrace{\quad}_{\omega = v/r} \sum_i \frac{d}{dt} (r_i m_i v_i) = \sum_i \frac{d}{dt} \ell_i$$

$\ell_i = r_i m_i v_i$  est le **moment cinétique** de la particule "i".

Nous avons ici une dérivation par rapport au temps et une sommation sur les particules "i". Nous pouvons permuter l'ordre de ces deux opérations :

$$\mathbf{M}_{\Delta} = \sum_i \frac{d}{dt} \ell_i = \frac{d}{dt} \sum_i \ell_i = \frac{d\mathbf{L}_{\Delta}}{dt}$$

$$L_{\Delta} = \sum_i \ell_i = \sum_i r_i m_i v_i \underbrace{\quad}_{v = r\omega} \underbrace{\quad}_{v = r\omega} \sum_i (m_i r_i^2) \omega \underbrace{\quad}_{\text{déf. de } I_{\Delta}} \underbrace{\quad}_{\text{déf. de } I_{\Delta}} I_{\Delta} \omega$$

$L_{\Delta} = I_{\Delta} \omega$  est le moment cinétique du solide.

## Résumé

### Pour 1 particule

– Moment de la force  $M = r_{\perp} F$ .

– Moment cinétique de la particule en rotation  $\ell = m r v$ .

– Equation de Newton pour la rotation :  $M = (m r^2) \gamma = (m r^2) \frac{d\omega}{dt}$ .

### Pour un solide

– Moment de la force  $M_{\Delta} = r_{\perp} F$ .

– Moment cinétique de l'objet en rotation  $L_{\Delta} = \sum_i \ell_i = I_{\Delta} \omega$ .

– Equation de Newton pour la rotation :  $M_{\Delta} = \frac{dL_{\Delta}}{dt} = I_{\Delta} \frac{d\omega}{dt}$ .

## Forme vectorielle de l'équation de Newton pour la rotation

### Pour une particule

Nous avons défini le module du moment de la force

$M_{\Delta} = r_{\perp} F = r F \sin \theta$ ,  $r_{\perp}$  étant la distance entre l'axe de rotation et la direction de la force  $\vec{F}$  et  $\theta$  l'angle entre la force et le vecteur  $\vec{r}$ .

Le moment de la force est en fait une grandeur vectorielle et la forme de son module rappelle celui de la résultante d'un produit vectoriel.

Le moment de la force comme grandeur vectorielle est défini par :

$$\vec{M}_{\Delta} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

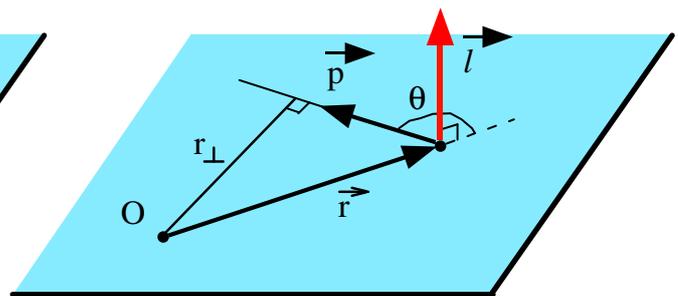
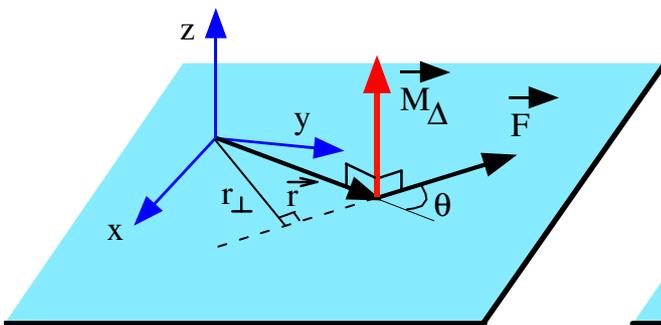
De même, le moment cinétique pour une particule en rotation à la distance  $r$  de l'axe  $\ell = m r v$  est aussi une grandeur vectorielle et est défini par :

$$\vec{\ell} = \vec{r} \wedge m \vec{v} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

Dérivons l'équation précédente par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} + \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{=\vec{v}} \wedge \underbrace{\vec{p}}_{\text{Newton}} \underset{=0}{=} \vec{r} \wedge \sum \vec{F}^{ext} + \underbrace{\vec{v} \wedge m \vec{v}}_{=0} = \vec{M}_{\Delta}$$

$$\vec{M}_{\Delta} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$



### Pour un système de particules

L'équation  $\vec{M}_{\Delta,i} = \frac{d\vec{\ell}_i}{dt}$  s'applique à chaque particule "i", pour un

système de particules

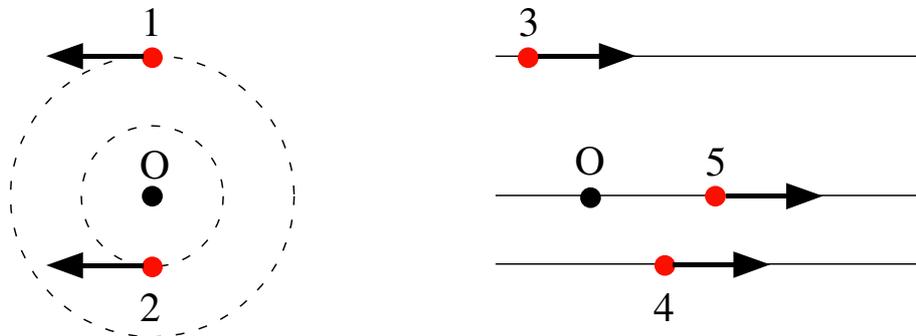
$$\vec{M}_{\Delta} = \frac{d\vec{L}_{\Delta}}{dt}$$

où  $\vec{M}_{\Delta} = \sum_i \vec{M}_{\Delta,i}$  et  $\vec{L}_{\Delta} = \sum_i \vec{\ell}_i$ .

Dans le cas où la rotation se fait autour d'un axe fixe,  $\vec{L}_{\Delta} = I_{\Delta} \vec{\omega}$  et

$$\vec{M}_{\Delta} = I_{\Delta} \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

**Point de contrôle** Les 5 particules dessinées sur la figure ci-dessous ont une même masse, leurs vitesses ont le même module. Ordonnez les particules dans l'ordre décroissant de leur moment cinétique par rapport au point  $O$ . Quelles sont les particules qui ont un moment cinétique négatif par rapport au point  $O$  ?



### Travail et énergie cinétique de rotation

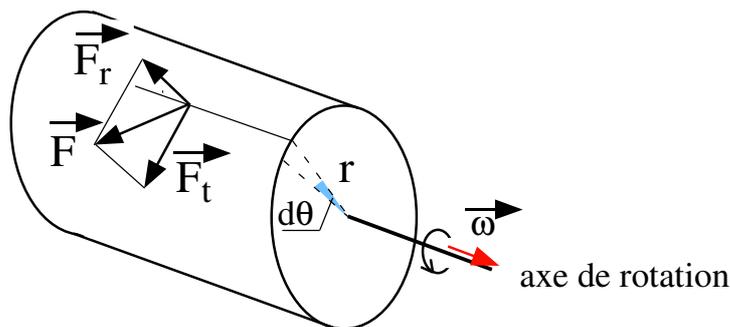
**Rappel** Nous avons vu au chapitre précédent que le travail d'une force sur une particule, entre deux points 1 et 2, résultait en une variation de l'énergie cinétique de cette particule :

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = T_2 - T_1$$

Dans ce paragraphe, nous allons rechercher une équation similaire pour la rotation.

Considérons un cylindre en rotation autour de son axe et une force  $\vec{F}$  agissant sur le cylindre :

## Rotation d'un corps rigide autour d'un axe fixe



Nous avons vu que l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe  $\Delta$  est  $T = \frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2$ . Comme expliqué précédemment, seule la composante tangentielle de la force peut agir sur le solide, la composante radiale, elle, n'a aucun effet, puisque la particule sur laquelle elle agit reste attachée au solide, que son moment par rapport à l'axe est nul et que son travail est aussi nul.

Le travail de la force est donc, pour une petite rotation  $d\theta$  du cylindre :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \underset{dr = r d\theta}{=} F_t r d\theta = M d\theta$$

Mais  $M = I_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow dW = I_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} d\theta \underset{d\theta = \omega dt}{=} I_{\Delta} \omega d\omega$

Le **travail de la force**, sur une rotation finie de l'objet entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , est ainsi :

$$W_{12} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = I_{\Delta} \int_1^2 \omega d\omega = \frac{1}{2} I_{\Delta} \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_{\Delta} \omega_1^2$$

La **puissance** est le travail effectué par la force pendant l'unité de temps :

$$P = \frac{\delta W}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M \omega$$

Nous obtenons donc des relation en tous points analogues à celles établies pour la translation de la particule, comme le montre le tableau ci- après.

**Parallèle entre la Mécanique de la particule et celle du solide autour d'un axe fixe**

Mécanique de la particule	Mécanique du solide en rotation autour d'un axe fixe
<u>Translation</u>	<u>Rotation</u>
Rayon vecteur $\vec{r}$ [m] Vitesse $\vec{v}$ [m/s] Accélération $\vec{a}$ [m/s <sup>2</sup> ]	Angle de rotation $\theta$ [sans dim.] Vitesse angulaire $\vec{\omega}$ [s <sup>-1</sup> ] Accélération angulaire $\vec{\gamma}$ [s <sup>-2</sup> ]
Force $\vec{F}^{ext}$ [N]	Moment de force $\vec{M}_\Delta = \vec{r} \wedge \vec{F}^{ext}$ [N · m]
Masse $m$ [kg]	Moment d'inertie $I_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$ [kg · m <sup>2</sup> ]
Quantité de mouvement $\vec{p}$ $\vec{p} = m \vec{v}$ [kg · m/s]	Moment cinétique pour 1 particule $\vec{\ell} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ [kg · m <sup>2</sup> /s] Moment cinétique pour un solide $\vec{L}_\Delta = I_\Delta \vec{\omega}$ [kg · m <sup>2</sup> /s]
Newton : $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a}$	$\vec{M}_\Delta = \frac{d\vec{L}_\Delta}{dt} = I_\Delta \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_\Delta \vec{\gamma}$
Travail : $W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$	$W_{12} = \int_1^2 M d\theta$
Théorème de l'énergie cinétique	Théorème de l'énergie cinétique
$W_{12} = \Delta T = \frac{1}{2} m [v_2^2 - v_1^2]$	$W_{12} = \Delta T = \frac{1}{2} I_\Delta [\omega_2^2 - \omega_1^2]$

# Physique Générale

## SYSTEME DE PARTICULES

### DYNAMIQUE DU SOLIDE (suite)

TRAN Minh Tâm

## Table des matières

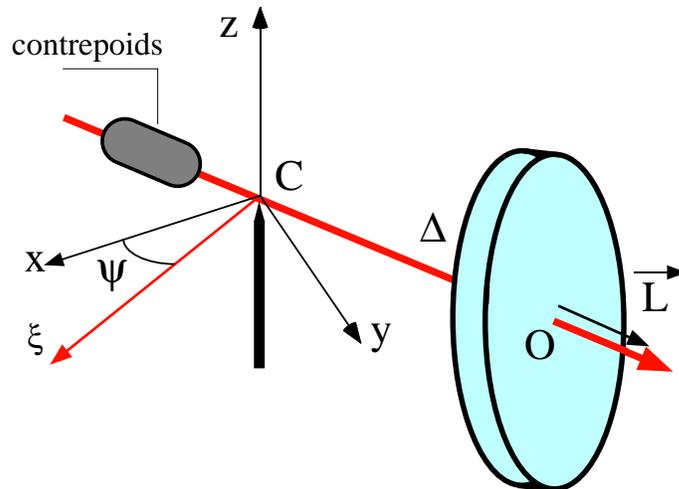
<b>Applications de la loi de Newton pour la rotation</b>	<b>93</b>
Le gyroscope . . . . .	93
L'orbite de la Terre et les saisons . . . . .	95
La précession des équinoxes . . . . .	98
Les systèmes isolés : conservation du moment cinétique .	99
<b>Importance des lois de conservation</b>	<b>102</b>
La découverte du neutrino . . . . .	102

Nous traiterons dans ce chapitre de quelques applications simples de la deuxième loi de Newton pour la rotation  $\vec{M} = \frac{d\vec{L}_\Delta}{dt}$ .

## Le gyroscope

C'est un instrument constitué d'un volant (ou un disque) pouvant tourner autour d'un axe métallique reposant sur un point  $C$ .

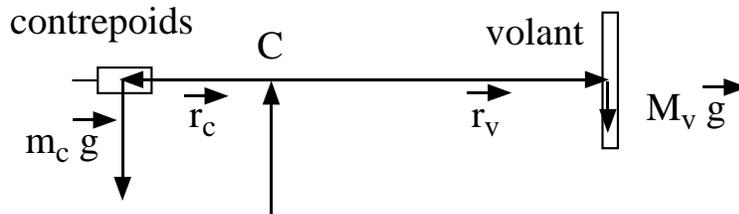
Le volant tourne à grande vitesse  $\vec{\omega}$  autour de l'axe, le moment cinétique



$\vec{L}$  est ainsi parallèle à l'axe  $\Delta$  :  $\vec{L}_\Delta = I_\Delta \vec{\omega}$ .

## Le gyroscope équilibré

Le poids du volant est exactement compensé par un contrepoids : la somme des moments des poids du volant et du contrepoids par rapport au point  $C$  est nul :



Nous nous arrangeons en effet pour que  $\vec{r}_c \wedge m_c \vec{g} + \vec{r}_v \wedge M_v \vec{g} = 0$  en faisant en sorte que  $r_c m_c = r_v M_v$  en ajustant la distance du contrepoids au point  $C$ .

En l'absence de tout moment extérieur  $\vec{M}$ , nous avons :

$$\vec{M} = 0 = \frac{d\vec{L}_\Delta}{dt}, \text{ par conséquent :}$$

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L}_\Delta = I_\Delta \vec{\omega} = \overline{\text{constant}}$$

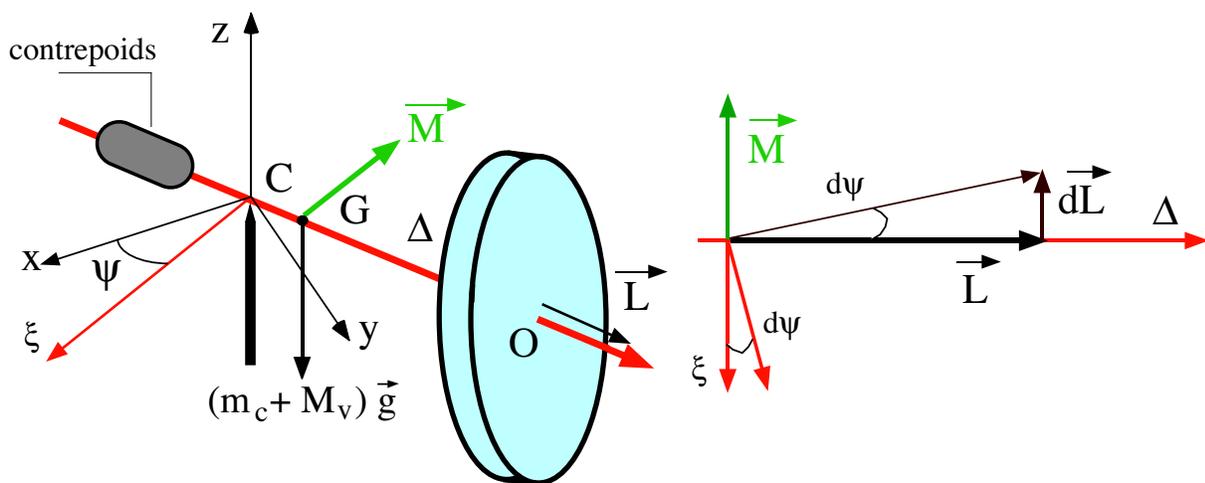
Le fait que  $\vec{\omega}$  soit une constante vectorielle implique que :

1. la vitesse angulaire de rotation du volant est une constante  
 $|\vec{\omega}| = \text{constant}$ ,
2. la direction de  $\vec{\omega}$  est invariante  $\Rightarrow$  l'axe  $\Delta$  est invariante.

### Le gyroscope déséquilibré

Nous déplaçons maintenant le contrepoids pour que l'égalité  $r_c m_c = r_v M_v$  ne soit plus satisfaite. Il apparaît alors un moment résultant.

Sur le dessin ci-après, nous avons rapproché de C le contrepoids depuis la position qu'elle avait à l'équilibre.



Le moment qui apparaît est  $\vec{M} = \overline{CG} \wedge (M_v + m_c) \vec{g}$ ,  $G$  étant le centre de masse du système. Le moment  $\vec{M}$  est, par construction, horizontal et perpendiculaire à  $\Delta$ ; par ailleurs, son module est constant. Faisons l'hypothèse que la vitesse angulaire  $\omega$  du volant est très grande pour que toute autre rotation puisse être négligée devant elle : par conséquent, le moment cinétique est toujours porté par l'axe  $\Delta$ .

L'équation de Newton  $\vec{M} = \frac{d\vec{L}_\Delta}{dt}$  peut encore s'écrire :  $\vec{M} dt = d\vec{L}_\Delta$ , ce qui exprime que la variation  $d\vec{L}_\Delta$  du moment cinétique  $\vec{L}_\Delta$  est parallèle et de même sens que le moment  $\vec{M}$  (figure de droite, p. précédente).

Comme  $\vec{L}_\Delta = I_\Delta \vec{\omega}$ ,  $\vec{L}_\Delta$  a un module constant si  $|\vec{\omega}|$  est constant. Le module de  $\vec{\omega}$  est constant si le frottement autour de l'axe peut être négligé. Faisons cette hypothèse :  $\vec{L}_\Delta$  est ainsi constant en module, mais sa direction change.

### Conséquence :

L'extrémité du vecteur  $\vec{L}_\Delta$  doit décrire un MCU avec une vitesse  $\frac{d\vec{L}_\Delta}{dt}$  et une vitesse angulaire  $\frac{d\psi}{dt}$  telles que (cf. fig. de droite, p. précédente) :

$$d|\vec{L}_\Delta| \underset{\text{par construction}}{=} |\vec{L}_\Delta| d\psi = |\vec{L}_\Delta| \frac{d\psi}{dt} dt$$

$$\Rightarrow \frac{d|\vec{L}_\Delta|}{dt} = \frac{|\vec{M}|}{|\vec{L}_\Delta|} \underset{\vec{L}_\Delta = I_\Delta \vec{\omega}}{=} \frac{CG(M_v + m_c)g}{I_\Delta \omega} = \text{cst}$$

Ainsi, pour que notre hypothèse de départ  $\frac{d\psi}{dt} \ll \omega$  (bas de la p. précédente) soit vérifiée, il faut que  $\omega^2 \gg \frac{CG(M_v + m_c)g}{I_\Delta}$ . Dans ce cas, l'extrémité de  $\vec{L}_\Delta$  décrit un MCU : c'est le mouvement de précession.

**Point de contrôle** Un gyroscope déquilibré est en train d'avoir un mouvement de précession quand son extrémité rencontre un mur. Que se passe-t-il ? Pour répondre à cette question, voyez d'abord quelle est la force qui apparaît quand la pointe du gyroscope est en contact avec le mur ; ensuite, voyez le moment de cette force.

## L'orbite de la Terre et les saisons

La force d'attraction du Soleil sur la Terre (ou sur n'importe quelle autre planète) est donnée par la loi de la gravitation universelle :

$\vec{F}^{grav.} = -G \frac{m M}{r^2} \hat{u}_r$ . Cette force est dirigée du centre de la Terre au centre du Soleil; son moment, par rapport au centre du Soleil est

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}^{grav.} = \vec{r} \wedge \left( -G \frac{m M}{r^2} \hat{u}_r \right) = 0, \quad \vec{r} \text{ et } \hat{u}_r \text{ étant colinéaires.}$$

Le moment des forces par rapport au soleil étant nul, le moment cinétique (par rapport au soleil) est conservé :  $\vec{L}_{sol} = \overrightarrow{\text{const}} = \vec{r} \wedge (m \vec{v})$ .

Le fait que le moment cinétique de la Terre par rapport au Soleil,  $\vec{L}_{sol}$ , soit un vecteur constant signifie que le plan qui lui est perpendiculaire est invariant au cours du temps; précisément, ce plan est celui qui contient le Soleil et la trajectoire puisqu'il contient  $\vec{r}$  et  $\vec{v}$ .

**Conclusion 1 :** La trajectoire des planètes est une courbe fermée plane contenant le Soleil

Calculons le module du moment cinétique de la Terre par rapport au Soleil, les deux astres étant considérés comme ponctuels :

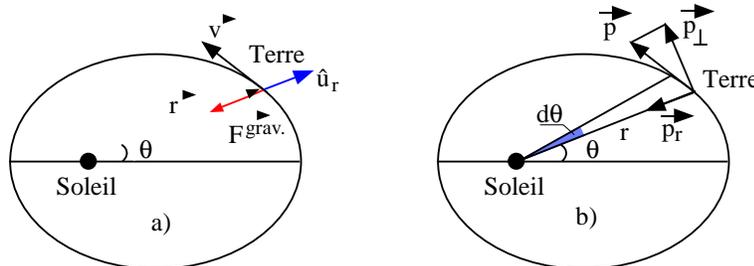
$$L_{sol} = r p_{\perp} = r m v_{\perp} = r (m \omega r) = m r^2 \omega$$

[Rappel :  $\omega$  est la vitesse angulaire de la planète; la relation entre vitesse tangentielle et vitesse angulaire est  $v_{\perp} = r \omega$ ;  $m$  est la masse de la Terre.]

Calculons aussi l'aire balayée par le rayon-vecteur Soleil-Terre pendant  $dt$  :

$$dA = \frac{1}{2} r r d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \underset{\omega = \text{vitesse angulaire}}{=} \frac{1}{2} r^2 \omega$$

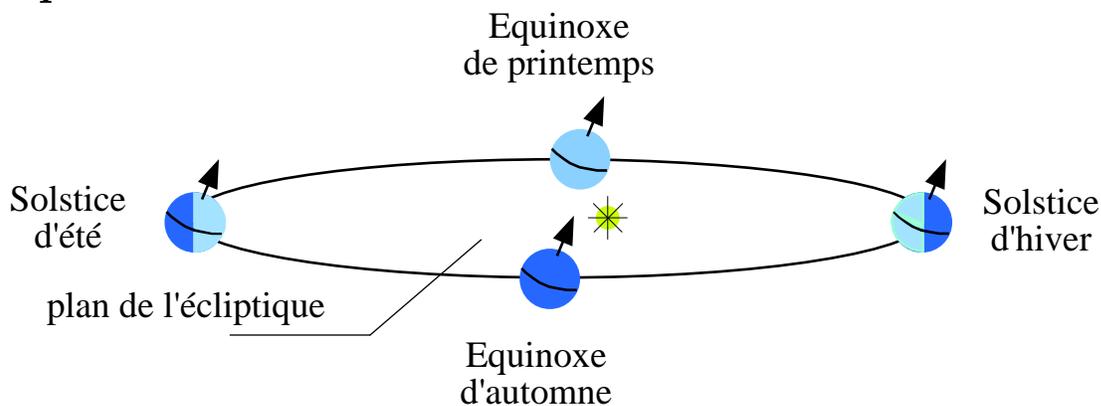


**Conclusion 2 :**  $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{constant} .$

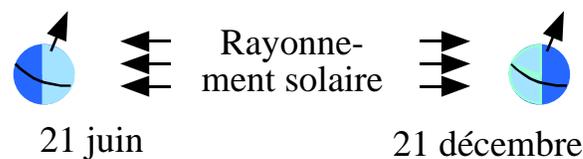
C'est la deuxième loi de Kepler, ou loi des aires : le rayon-vecteur Soleil-planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

En plus de son mouvement de rotation autour du Soleil, la Terre a un mouvement de rotation sur elle-même autour d'un axe  $\Delta$  qui fait un angle de  $23^\circ 17'$  par rapport à la normale au plan de l'écliptique. A ce mouvement de rotation correspond également un "moment cinétique de rotation propre". Puisque, dans notre approximation, le moment de la force d'attraction du Soleil sur la Terre est nulle, ce moment cinétique de rotation propre sera aussi conservé et l'axe de rotation de la Terre sur elle-même ne change pas, du moins sur des intervalles de temps "faibles".

**Conséquence :** Les saisons.



L'inclinaison de l'axe terrestre  $\Delta$  est responsable de l'existence des saisons

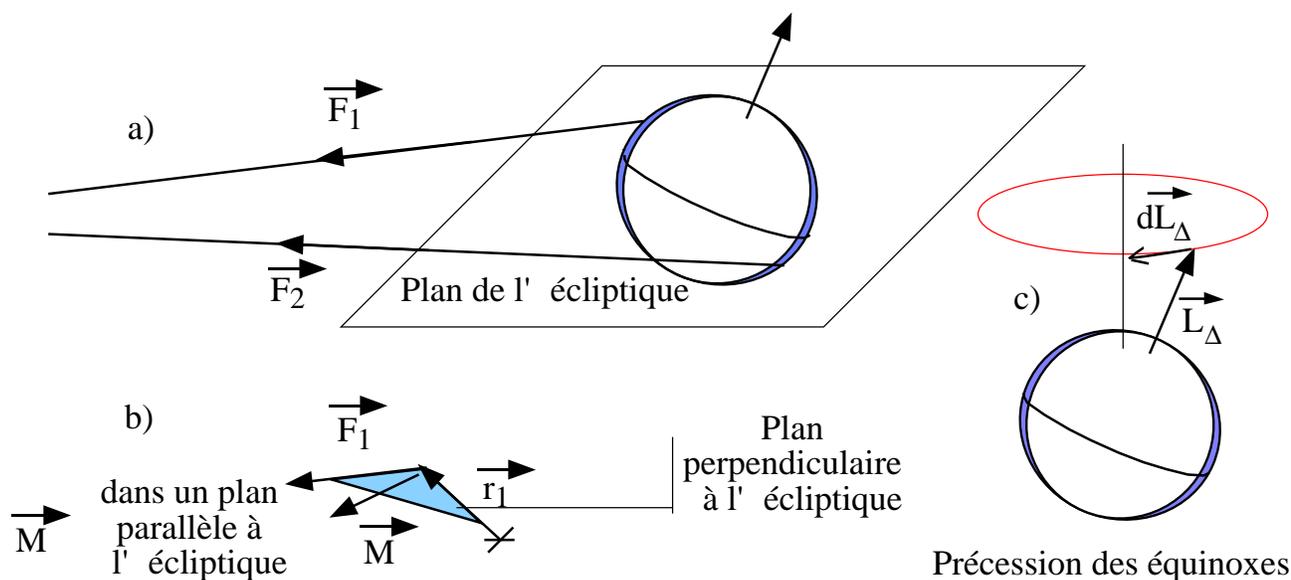


Pour un point de l'hémisphère Nord, au solstice d'été, la plus grande part de sa trajectoire se fait de jour et l'incidence des rayons lumineux est plus proche de la verticale au sol qu'elle ne l'est en hiver : il fait plus chaud et les jours durent plus longtemps. C'est le contraire qui se passe en hiver.

## La précession des équinoxes

Dans tout le développement précédent, nous avons considéré que la Terre et le Soleil comme des points matériels. Cette considération est possible si les deux astres sont des sphères : en effet, la sphère est une figure d'une symétrie parfaite qui peut être réduite à un point où serait concentrée toute sa masse.

En fait, la Terre n'est pas sphérique, mais écrasée aux pôles et renflée à l'équateur. Comme, en plus, les autres astres du système solaire sont en moyenne dans le plan de l'écliptique, le résultat est que, sur les renflements s'exercent les forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  (figure a) ci-dessous).



Le moment de ces deux forces par rapport au centre de la Terre,  $\vec{M}$ , est constamment dans un plan parallèle à l'écliptique (figure b) ci-dessus). On peut admettre que le module de ce moment est constant.

Ce moment, par la loi de Newton pour les rotations  $\vec{M} = \frac{d\vec{L}_\Delta}{dt}$ , déplace l'extrémité de  $\vec{L}_\Delta$  (qui coïncide avec l'axe de rotation de la Terre) sur un cercle (figure c) ci-dessus) parallèle au plan de l'écliptique : la résolution de ce problème est identique à celle que nous avons vue pour la précession du gyroscope.

L'axe de rotation de la Terre décrit ainsi un cône en quelque 25800 ans : c'est ce que l'on appelle la précession des équinoxes. Ce phénomène a été découvert par Hipparque, astronome grec du II<sup>ème</sup> siècle avant J.C., en comparant ses observations à celles des astronomes babyloniens faites 2000 ans plus tôt. Il en résulte que l'Etoile polaire, vers laquelle pointe approximativement l'axe de rotation terrestre, n'aura plus ce privilège dans les millénaires à venir.

### **Les systèmes isolés : conservation du moment cinétique**

Nous avons jusqu'ici discuté de deux lois de conservation : la conservation de l'énergie et la conservation de la quantité de mouvement (pour un système isolé). Partant de l'équation de Newton pour les rotations  $\vec{M} = \frac{d\vec{L}_\Delta}{dt}$ , si la résultante du moment des forces extérieures est nulle ou le système isolé :

$$\vec{L} = \overrightarrow{const.} \quad (\text{système isolé}), \quad \text{ou :}$$

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \quad (\text{système isolé})$$

C'est la loi de conservation du moment cinétique pour un système isolé.

Nous avons vu deux exemples de conservation du moment cinétique dans ce chapitre : la conservation, dans le cas d'une force centrale d'attraction gravifique, du moment cinétique de rotation des planètes autour du Soleil et du moment cinétique de rotation propre de la Terre et la conservation du moment cinétique du gyroscope équilibré.

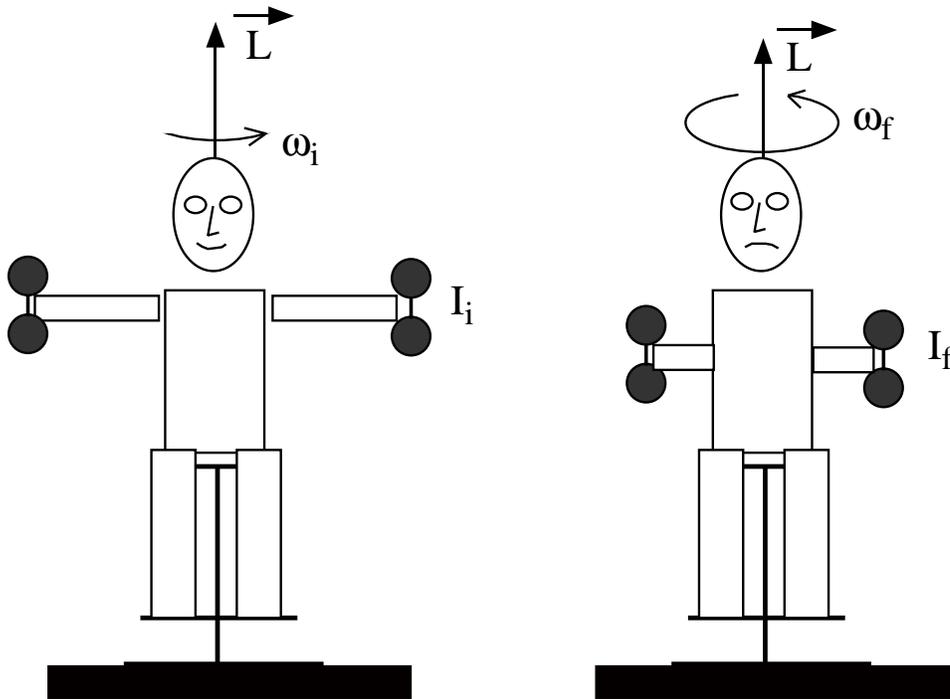
Les équations précédentes sont des équations vectorielles. Elles sont donc équivalentes chacune à trois équations correspondantes à la conservation du moment cinétique selon les 3 axes.

Si la composante selon un axe du moment des forces extérieures agissant sur un système est nulle, alors la composante du moment cinétique selon cet axe ne changera pas, quelques soient les changements du système. Si

la rotation se fait autour de l'axe selon lequel le moment cinétique est conservé, nous aurons :

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

**Exemple 1 :**

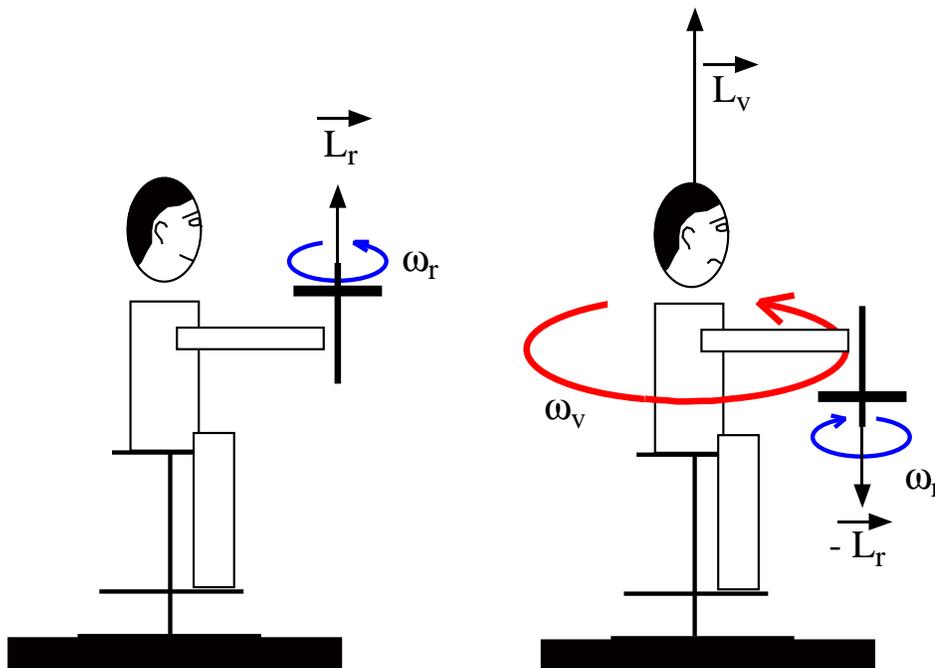


Un étudiant se porte volontaire pour s'asseoir sur un tabouret tournant en tenant dans chacune de ses mains une haltère. Il est lancé à une vitesse angulaire  $\omega_i$ , les bras tendus. En ramenant ses bras, il tourne à une vitesse  $\omega_f > \omega_i$ .

Explication : Le système peut être considéré comme isolé, la force de gravitation étant exactement compensée par la réaction de la chaise ; en supposant les frottements nuls, on peut dire que le moment résultant des forces agissant sur le système est nul. Sur l'axe vertical, en particulier, le moment cinétique selon l'axe vertical est conservé. En ramenant ses bras, le volontaire diminue son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation ( $I = \sum_i m_i r_i^2$ ).

Comme  $I_i \omega_i = I_f \omega_f$ , le fait que  $I_f < I_i$  entraîne  $\omega_f > \omega_i$ .

## Exemple 2 :



Un autre étudiant se porte volontaire pour s'asseoir sur un tabouret tournant en tenant une roue tournant autour de son axe vertical à la vitesse angulaire  $\omega_r$ . A un certain moment, il s'arrange pour renverser la roue; dès ce moment-là, l'étudiant sur son tabouret tourne à la vitesse angulaire  $\omega_v$ . En effet, ici aussi, le moment cinétique est conservé, en particulier, la projection du moment cinétique selon l'axe vertical. Si  $L_v$  et  $L_r$  sont les moments cinétiques de l'étudiant et de la roue :

$$\text{avant le renversement : } L_i = \underbrace{L_v}_{=0} + L_r .$$

$$\text{après le renversement : } L_f = L_v - L_r \Rightarrow L_v = 2 L_r .$$

Nous avons vu les lois de conservation suivantes pour les systèmes isolés :

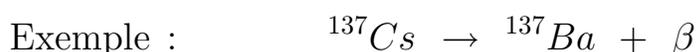
- Conservation de l'énergie,
- Conservation de la quantité de mouvement,
- Conservation du moment cinétique.

Ces lois de conservation sont **toujours** valables, elles s'appliquent pour les particules subatomiques ultra-relativistes. Aucune exception n'a été jusqu'à présent trouvée à ces lois de conservation.

Dans ce qui suit, vous trouverez en lecture l'histoire de la découverte du **neutrino** qui illustre parfaitement l'utilisation des lois de conservation précédentes.

### La découverte du neutrino

L'histoire commence en 1914 avec la mesure par Chadwick du spectre des bêta ( $\beta$ ) émis par certains noyaux radioactifs. Les  $\beta$  sont des électrons. Dans une *désintégration  $\beta$* , un noyau de  $Z$  protons et  $A$  nucléons (protons et neutrons) (noté  $(A, Z)$ ) se transforme en un noyau ayant un proton de plus et le même nombre de nucléons. La désintégration  $\beta$  est accompagnée de l'émission d'un électron que l'on peut détecter. On pensait à l'époque que, dans l'état final, on n'avait que le noyau  $(A, Z+1)$  et l'électron, la réaction étant :

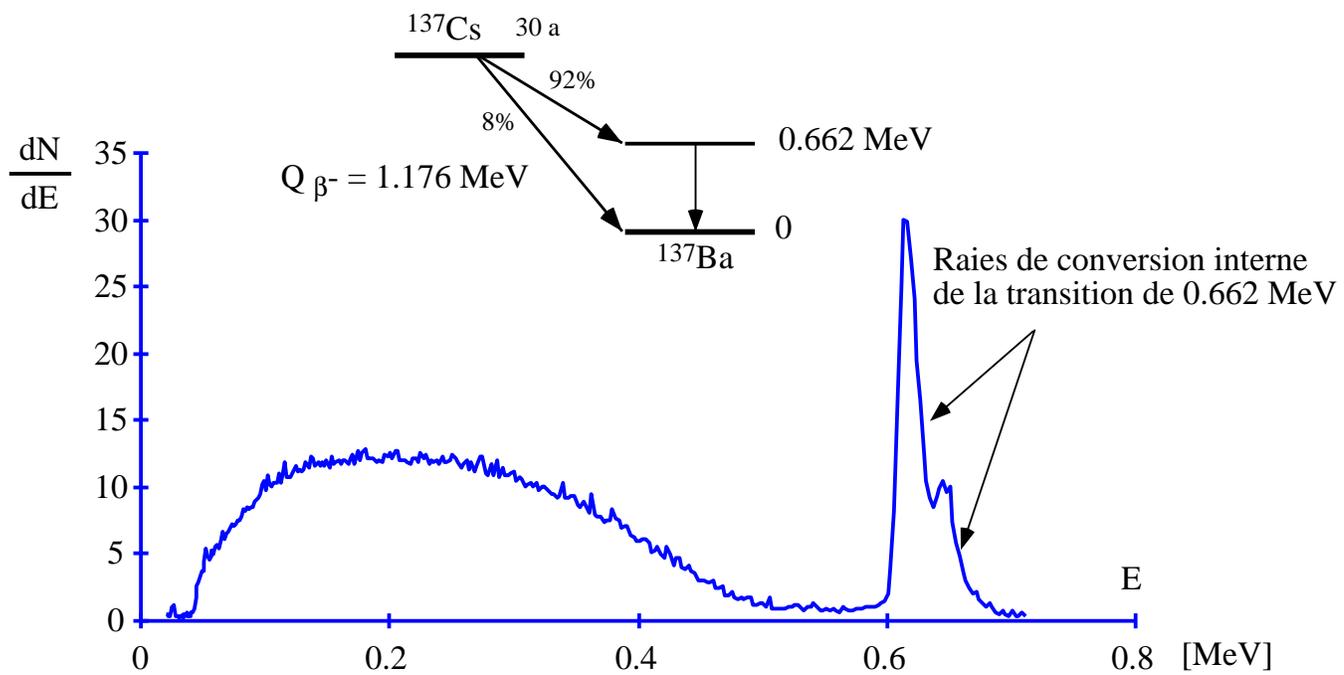


Dans ce cas, par conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, le  $\beta$  devait être monocinétique (c.à.d. qu'il a une énergie bien définie et unique).

Or, on obtient un spectre continu !

Visiblement, une loi de conservation fondamentale pouvait être violée ! Même Niels Bohr pensait, à l'époque, que l'énergie et la quantité de mouvement pouvaient ne pas être conservées dans les désintégrations  $\beta$  !

Il y avait aussi d'autres observations qui n'étaient pas en accord avec les théories sur la composition du noyau atomique ; on pensait en effet qu'un noyau  $(A, Z)$  était un système de  $A$  protons et de  $(A-Z)$  électrons. Protons et électrons sont des particules ayant des "spin"  $1/2$ , le spin est le moment cinétique intrinsèque de la particule.



Spectre d' énergie des bêta mesuré à l' IPHE

On obtient ainsi les spins des noyaux de  ${}^6_3\text{Li}$  et  ${}^{14}_7\text{N}$  :

- ★ Noyau de  ${}^6_3\text{Li}$  : 6 protons et 3 électrons = 9 particules de spin 1/2,
- ★ Noyau de  ${}^{14}_7\text{N}$  : 14 protons et 7 électrons = 21 particules de spin 1/2.

Avec un nombre impair de particules de spin 1/2, on s'attend à un spin demi entier (du type  $(2n + 1) \times \frac{1}{2}$ ) pour ces deux noyaux. On mesure des spin entiers !

Nous avons ici une contradiction entre la composition des moments cinétiques intrinsèques et la mesure du moment cinétique total du noyau !

La première bonne idée vint en décembre 1930 de **Wolfgang Pauli** ; dans une lettre adressée à la Société allemande de Physique réunie à Tübingen, il postule l'existence à l'intérieur du noyau, de particules légères, électriquement neutres, de spin 1/2 qu'il appelle "neutron". Dans une désintégration  $\beta$ , cette particule neutre serait émise avec l'électron. Cette hypothèse permet de lever les deux contradictions précédentes :

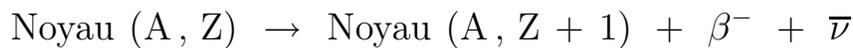
- ★ Dans la désintégration  $\beta$  il y a donc 3 particules dans l'état final : le noyau final, le "neutron" de Pauli et l'électron ; par conséquent, l'énergie doit être distribuée parmi ces 3 particules et l'électron peut prendre toutes les énergies entre 0 et une

énergie maximale : son spectre est ainsi continu.

★ L'addition de particules neutres de spin  $1/2$  permet d'éviter d'avoir, pour les noyaux  ${}^6_3\text{Li}$  et  ${}^{14}_7\text{N}$ , un nombre impair de particules de spin  $1/2$  et d'obtenir un spin total entier.

En 1932, Chadwick découvre le neutron : c'est une particule massive, d'une masse approximativement égale à celle du proton ; ce n'est donc pas la particule postulée par Pauli. **Werner Heisenberg** réalisa dans la même année 1932 que le neutron n'est pas formé de proton et d'électron, mais que c'est une "particule élémentaire", de spin  $1/2$ , au même titre que le proton. Le problème du spin du  ${}^6_3\text{Li}$  et  ${}^{14}_7\text{N}$  est ainsi résolu puisque  $A = Z + N$ ,  $N$  étant le nombre de neutrons dans le noyau.

On donnera plus tard le nom de "**neutrino**" (ou : petite particule neutre) à la particule postulée par Pauli et émise avec l'électron dans une désintégration  $\beta$  :



Dans la désintégration  $\beta$  où un électron négatif est émis, la particule neutre accompagnante est un "antineutrino". Dans une désintégration  $\beta$  où un positon positif est émis, il y a émission d'un neutrino. Ce n'est qu'en 1953 qu'on a pu détecter pour la première fois les antineutrini. En effet, ces particules, neutrini et antineutrini, sont des particules extrêmement élusives qui nécessitent, pour leur détection, un appareillage extrêmement massif : ainsi, au CERN, notre détecteur avait une masse de 3 tonnes et, au Japon, pour la détection des neutrini qui viennent de la haute atmosphère, on a à disposition un détecteur de 50'000 tonnes. Les propriétés des neutrino et antineutrino ne sont pas encore toutes élucidées actuellement .

# Physique Générale

## ÉLÉMENTS D'ÉLASTICITÉ

### HYDROSTATIQUE

TRAN Minh Tâm

#### Table des matières

<b>Rappel sur l'équilibre</b>	<b>105</b>
Les équilibres . . . . .	105
<b>Notions d'élasticité (lecture)</b>	<b>106</b>
La traction . . . . .	106
La compression hydrostatique . . . . .	108
Le cisaillement . . . . .	109
Origine de l'élasticité des matériaux . . . . .	109
<b>Hydrostatique</b>	<b>112</b>

Solides - liquides - gaz : généralités . . . . .	112
Hypothèse du continu . . . . .	115
Forces agissant sur un élément de fluide . . . . .	115
Fluide au repos sous l'effet de la gravitation . . . . .	117
Le Principe d'Archimède . . . . .	121
<b>A la limite entre deux milieux</b>	<b>123</b>
Tension superficielle . . . . .	123
Explication . . . . .	124
Pression dans une goutte ou dans une bulle . . . . .	124
Contact entre 3 milieux. Capillarité . . . . .	126

## Rappel sur l'équilibre

Nous rappelons très brièvement les conditions d'équilibre d'un corps.

### Les équilibres

Considérez les objets suivants : (1) un livre reposant sur une table, (b) un puck de hockey glissant sur la glace sans frottement, (c) les ailes d'un ventilateur tournant sans accroc au plafond. Pour ces 3 objets, nous avons :

1.  $\vec{P}_{CM} = \overline{Cst}$  : la quantité de mouvement du CM de l'objet est constant,
2.  $\vec{L}_{CM} = \overline{Cst}$  : le moment cinétique par rapport son CM est aussi constant.

Nous dirons que ces objets sont en **équilibre**, puisque  $\vec{P}_{CM} = \overline{Cst}$  et  $\vec{L}_{CM} = \overline{Cst}$ ; mais, seul des 3 objets, le livre reposant sur la table est en **équilibre statique**.

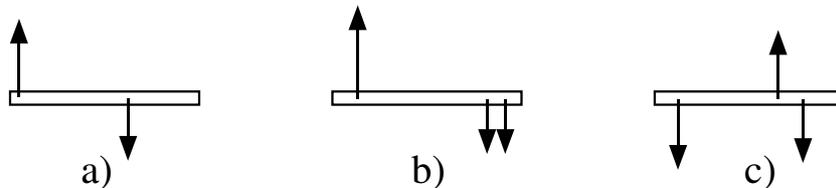
### Conditions d'équilibre

Comme le mouvement de translation est régi par la loi de Newton et le mouvement de rotation par la loi de Newton pour les rotations, les conditions d'équilibre sont évidemment :

$$\sum \vec{F}^{ext} = 0 \quad \sum \vec{M}^{ext} = 0$$

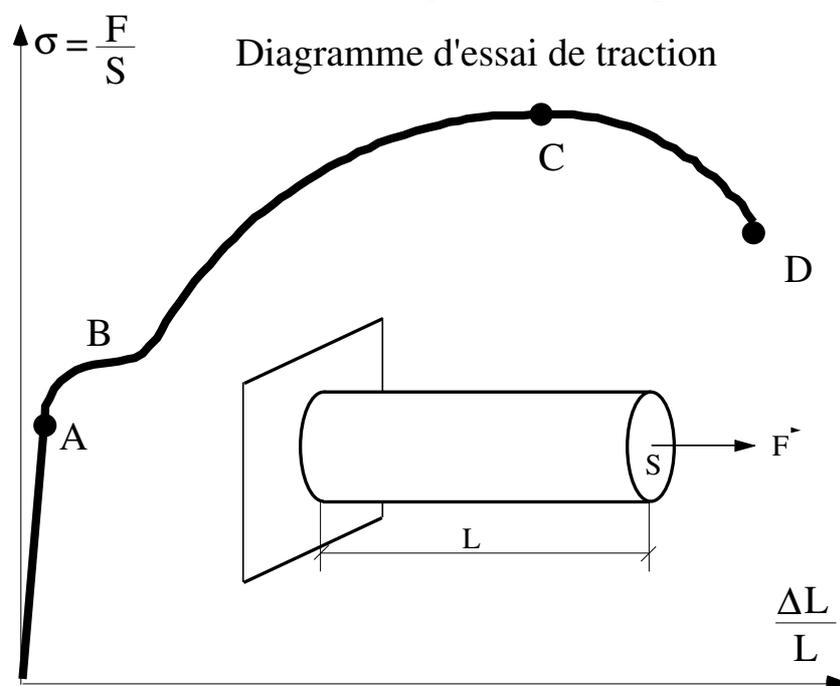
L'équilibre statique requiert, elle, la nullité des vecteurs  $\vec{P}_{CM}$  et  $\vec{L}_{CM}$ .

**Point de contrôle** Sur la figure ci-après, une barre uniforme est soumise à plusieurs forces agissant perpendiculairement à elle. Les modules de ces forces peuvent être ajustées individuellement sans pour autant pouvoir être réduites à zéro. Dans quels cas la barre peut-elle être en équilibre statique ?



## La traction

Prenons un cylindre solide, de longueur  $L$  et de rayon  $R$ , de section  $S = \pi R^2$ . Le cylindre est encastrée à une de ses extrémités. Une force  $F$  est exercée sur le cylindre selon sa longueur. Définissons la **tension** par  $\sigma = F/S$ . On observe que, pour des forces appliquées inférieures à une certaine limite, le solide reprend sa forme initiale : on a alors des **déformations élastiques** et on est dans les "limites de l'élasticité" (jusqu'au point (A) du diagramme d'essai de traction ci-après). Au delà, la déformation est permanente : si on relâche la tension, il existera toujours une déformation résiduelle. En (B) le barreau s'allonge soudainement sans qu'il y ait eu d'augmentation appréciable de la tension  $\sigma$  : la contrainte correspondante au point B est appelée "limite d'allongement". Au cours d'un étirement ultérieur, le barreau recouvre sa résistance et la traction croît avec l'allongement jusqu'au point (C) ; la contrainte correspondante est la "résistance limite" du matériau. Après le point (C) l'allongement s'opère avec une diminution de la charge et, finalement, le barreau se rompt pour une sollicitation correspondant au point D du diagramme.



Si l'on applique des tensions qui sont des fonctions du temps, par exemple périodiques, on observe des phénomènes de **fatigue** et d'hystérèse.

## Notions d'élasticité (lecture)

Dans les limites de l'élasticité, on observe donc que  $\Delta L \propto F$  (loi de Hooke), plus précisément :  $\frac{\Delta L}{L} \propto \frac{F}{S}$ , puisqu'il faut quand même rapporter l'allongement à la longueur initiale et la force à la section du cylindre.

$$\boxed{\frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E}}$$

A côté de l'allongement du cylindre, on observe un rétrécissement de sa section :

$$\boxed{\frac{\Delta R}{R} = -\frac{\nu \sigma}{E}}$$

Les coefficients  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le **module de Young** et le **coefficient de Poisson**. Voici quelques valeurs de  $E$  et  $\nu$  :

	$E$ $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$	$\nu$	Limite élasticité $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$	Charge de rupture $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$
Al (99.5)	$6.9 \cdot 10^{10}$	0.33	10 à 13 $10^7$	11 à 15 $10^7$
Acier	18 à 29 $10^{10}$	0.27	25 à 80 $10^7$	80 à 150 $10^7$
Cu	10 à 14 $10^{10}$	0.33	3 à 12 $10^7$	20 à 40 $10^7$
Plomb	0.5 à 1.8 $10^{10}$	0.4	0.4 à 1 $10^7$	1.3 à 2.2 $10^7$
Verre	5 à 8 $10^{10}$	0.3		4 à 6 $10^7$

## La compression hydrostatique

Appliquons au solide une pression uniforme  $P = \Delta F / \Delta S$  (par exemple, par une pression hydrostatique), en le plongeant dans un bassin. Pour de faibles pressions, la variation relative de volume est proportionnelle à la pression :

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa P$$

$\kappa (> 0)$  est le coefficient de compressibilité.

Considérons le cas d'un parallélépipède de dimensions  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$ . Par le principe de superposition (la déformation due à l'action de plusieurs forces est égale à la somme des déformations causées par chacune d'elles agissant séparément), nous avons :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L_1}{L_1} + \frac{\Delta L_2}{L_2} + \frac{\Delta L_3}{L_3}$$

Mais l'allongement relatif de  $L_i$  résulte de la compression sur la face  $i$  et de l'allongement due aux compressions dans les deux autres directions :

$$\frac{\Delta L_1}{L_1} = \frac{\Delta L_2}{L_2} = \frac{\Delta L_3}{L_3} = \underbrace{-\frac{P}{E}}_{\text{Loi de Hooke}} + \underbrace{\frac{\nu P}{E} + \frac{\nu P}{E}}_{\text{"rétrécissement"}}$$

Le "rétrécissement" est du à l'allongement sur des deux autres côtés. Allongement et rétrécissement sont ici dotés d'un signe, positif pour un allongement et négatif pour un rétrécissement.

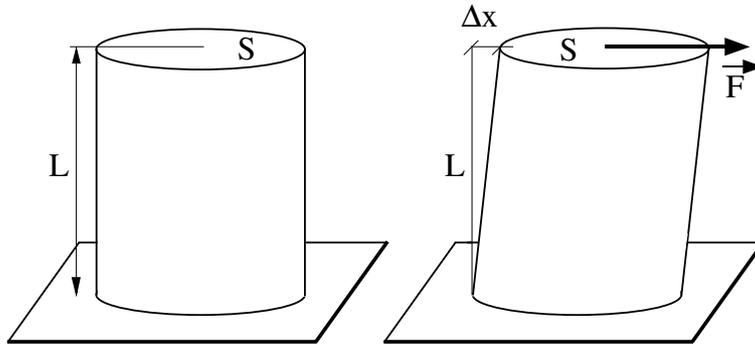
$$\sigma = P, \text{ d'où : } \frac{\Delta L_i}{L_i} = -\frac{\sigma}{E} (1 - 2\nu) \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = -\frac{3\sigma}{E} (1 - 2\nu)$$

$$\boxed{\kappa = 3 \frac{1 - 2\nu}{E}}$$

Comme  $\kappa \geq 0$ ,  $\Rightarrow \nu \leq 0.5$ .  $\nu = 0.5$  dans le cas d'un solide incompressible.

## Le cisaillement

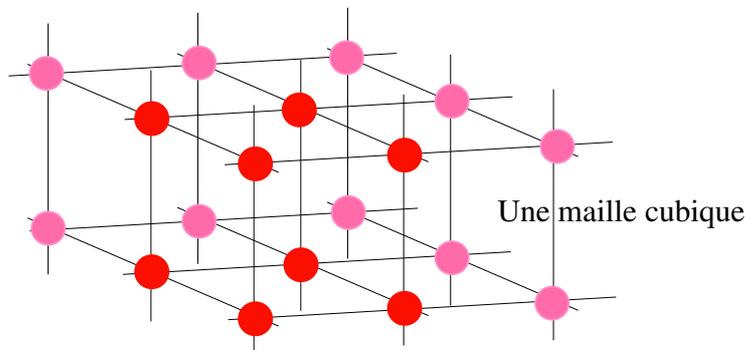
Ici aussi, prenons un cylindre de longueur  $L$  encastrée à une de ses extrémités et exerçons une force tangentielle sur son autre extrémité. Ici, comme pour la traction, dans les limites de l'élasticité, il existe une proportionnalité entre la tension tangentielle  $\sigma = F / S$  et la déformation  $\Delta x / L$



$$\frac{\Delta x}{L} = \frac{\sigma}{G}, \quad G \text{ est le module de cisaillement}$$

## Origine de l'élasticité des matériaux

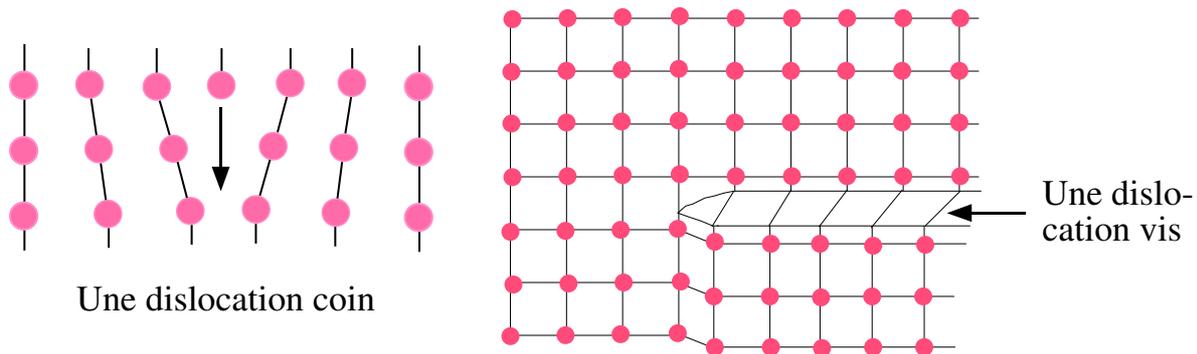
Lorsqu'un grand nombre d'atomes forme un solide métallique, ils se mettent en équilibre sur des sites bien précis dictés par l'équilibre des forces électrostatiques, formant ainsi un réseau cristallin à trois dimensions. L'interaction entre les atomes peut être modélisé par de "petits ressorts" reliant les atomes. Le fait que le solide est rigide, nous fait penser que ces petits ressorts sont extrêmement durs.



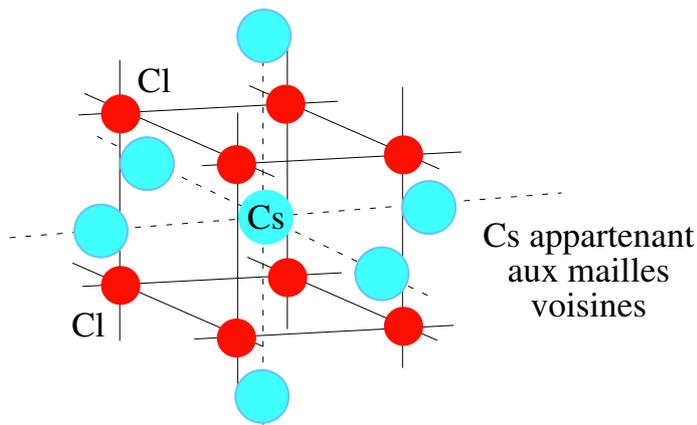
Le solide peut cependant être "élastique", ce qui veut dire que nous pouvons légèrement changer sa forme ou ses dimensions, en le tirant, en le tordant ou

en le comprimant : certains petits ressorts seront alors comprimés, d'autres détendus.

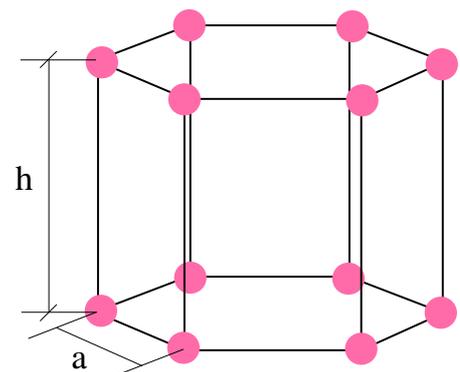
En augmentant la tension  $F/S$  sur le solide, certains des "ressorts" peuvent être détendus de manière permanente : on atteint et dépasse alors la limite élastique. En augmentant encore la tension, certains "ressorts" peuvent être rompus ; s'installent alors dans le réseau des dislocations qui augmentent davantage les déformations.



Nous avons jusqu'ici considéré que les corps que nous avons étaient homogènes et isotropes, qu'ils avaient les mêmes propriétés selon n'importe quel axe. Du point de vue microscopique, ce n'est pas le cas ; nous venons de voir que les atomes occupent des sites si nos atomes forment un cristal : la symétrie, pour un cristal, est moindre que pour un corps isotrope :



Une maille cubique centrée de chlorure de Césium

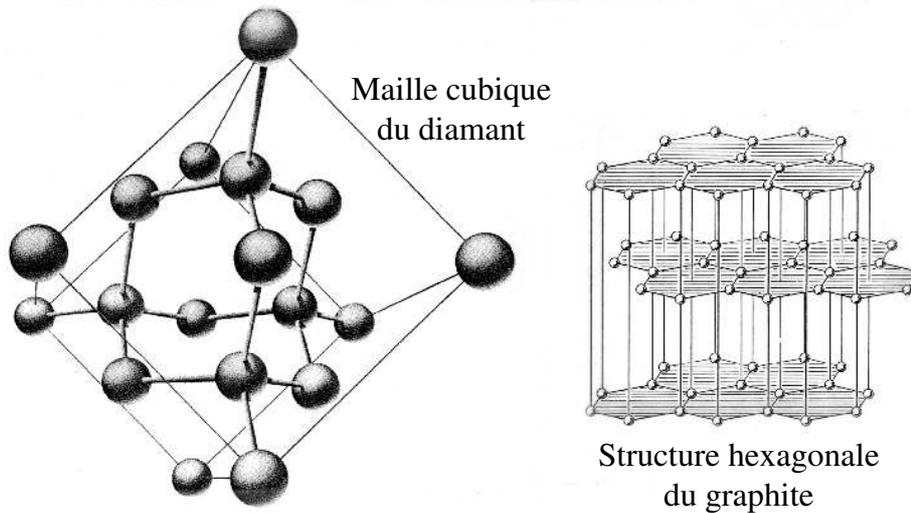


Une maille hexagonale

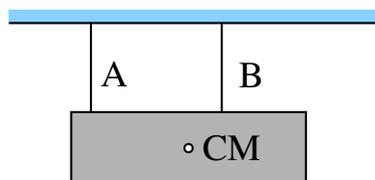
La maille hexagonale, en particulier pour le graphite, présente une très grande anisotropie ; la cohésion dans le plan des hexagones est en effet

plus grande que dans la direction perpendiculaire : ces plans peuvent “glisser” les uns sur les autres et, comme application, on utilise parfois une pâte chargée au graphite pour la lubrification des pièces mécaniques. La conduction thermique, une propriété globale, n'est aussi pas isotrope dans le graphite : elle est bien meilleure dans le plan des atomes de Carbone que dans la direction orthogonale à ce plan.

Contrairement au graphite, dans le diamant les atomes de Carbone sont entourés chacun par 4 autres atomes équidistants et, pour cette raison, présente des propriétés mécaniques exceptionnelles.



**Point de contrôle** Un bloc est attaché au plafond par deux fils A et B en tous points identiques, à l'exception de leur longueur initiale. Le centre de masse du bloc est plus proche du fil B que du fil A. a) Si on mesurait les moments des tensions des fils par rapport au CM du bloc, le moment de la tension du fil A serait-il plus grand, égal ou plus petit à celui de la tension du fil B? b) Quel est le fil qui exerce la plus grande force sur le bloc? c) Si les deux fils ont maintenant la même longueur, lequel des deux était le plus court initialement?



## Solides - liquides - gaz : généralités

Une force appliquée à un solide produit une déformation. Appliquée sur un fluide, elle produit un mouvement, c'est à dire une déformation arbitrairement grande, croissant avec le temps. L'étude de ce mouvement en fonction des forces appliquées fera l'objet du chapitre de la **dynamique des fluides**.

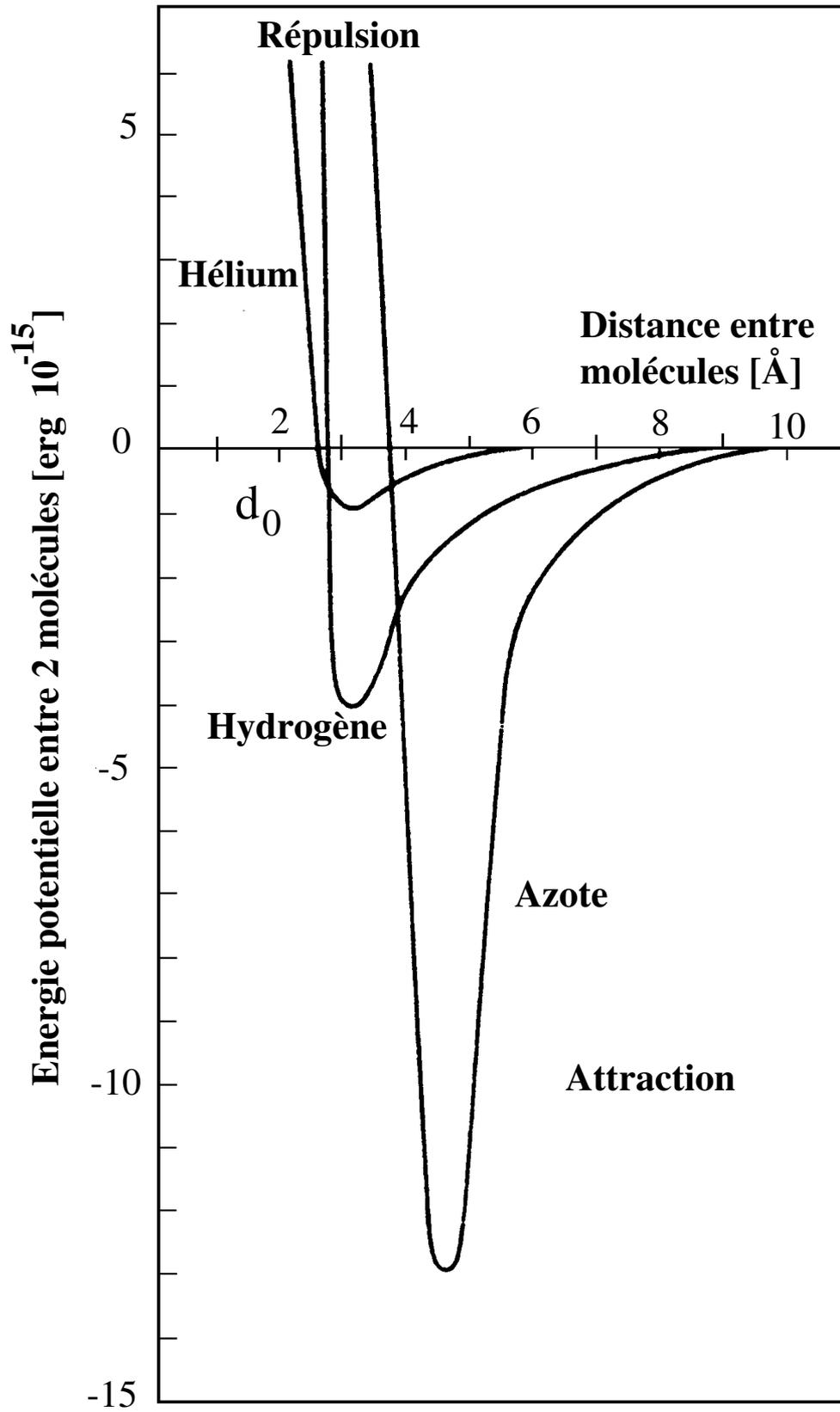
Un **fluide**, contrairement à un solide, est une substance qui peut "couler" ; un fluide épouse les formes du vase qui le contient ; il se comporte ainsi car il ne résiste pas aux forces tangentielles qui agissent sur lui (pour utiliser le vocabulaire que nous venons de voir, un fluide "coule" par ce qu'il ne peut pas résister au cisaillement). Par contre, il peut résister à des forces perpendiculaires à sa surface.

Un gaz est, en général, plus compressible qu'un liquide : des variations de pression entraînent des variations importantes de volume ; il ne faut cependant pas perdre de vue le fait que, sous certaines conditions "critiques", il y a passage continu entre la phase gazeuse et la phase liquide (nous y reviendrons en thermodynamique).

Les propriétés globales des solides, liquides et gaz, comme nous l'avons entrevu, sont liées à leur cristallisation, à leur structure moléculaire et à la nature des forces entre les molécules. Ces dernières sont, en général, fortement répulsives à faible distances ( $d < d_0$ ) et faiblement attractives à grandes distances ( $d > d_0$ ) avec  $d_0 \simeq 10^{-8}cm = 1\text{\AA}$ .

La figure ci-après donne l'énergie potentielle entre deux molécules ou entre deux atomes en fonction de la distance qui les sépare. On a évidemment une position d'équilibre stable correspondante à la distance  $d_0$ .

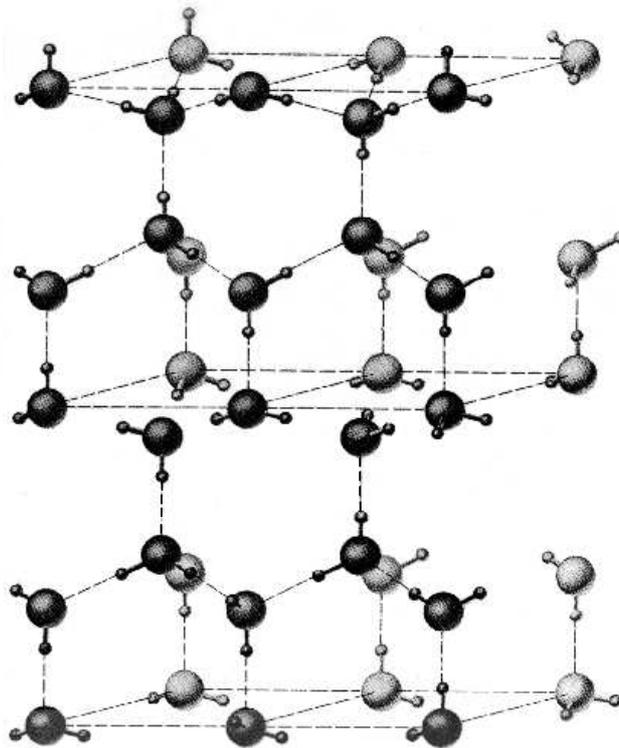
Dans un solide ou dans un liquide, les molécules "voisines" sont à des distances de l'ordre de  $d_0$ , c.à.d. aussi près que les forces de répulsion le permettent. Dans un gaz, elles sont à des distances plus grandes qui dépendent



de la pression. L'énergie potentielle d'interaction entre deux molécules d'un gaz est ainsi faible par rapport à l'énergie cinétique des molécules (l'énergie potentielle entre deux corps est celle qui dépend de la distance relative de ces deux corps) : à la limite du *gaz parfait*, on peut entièrement négliger cette énergie potentielle. Dans un gaz, en de rares occasions, on a des "collisions".

Dans le cas d'un solide, l'arrangement géométrique des molécules est permanent et les molécules ont des positions stables autour desquelles elles peuvent avoir de petits mouvements d'oscillation.

À la température de fusion, il y a augmentation du volume (sauf pour l'eau, le bismuth et l'antimoine) : les molécules sont libres de se mouvoir les unes par rapport aux autres tout en gardant une distance à peu près constante. Dès lors, une force appliquée produit une déformation qui croît aussi longtemps que la force est maintenue.



**Arrangement des molécules dans la glace**

Chaque oxygène est au milieu d'un tétraèdre constitué des 4 oxygènes les plus proches. Il y a un hydrogène sur chaque axe oxygène-oxygène.

## Hypothèse du continu

À l'échelle microscopique, la structure de la matière est donc extrêmement inhomogène et cette structure détermine les propriétés macroscopiques de la matière (densité, viscosité, compressibilité, etc...)

Cependant, en Mécanique des Fluides comme en Mécanique des Solides déformables, on fait l'hypothèse **d'un milieu continu** dont les propriétés sont données. L'expérience montre que cette *hypothèse du continu* est justifiée dans la plupart des circonstances et il est préférable d'utiliser les valeurs empiriques des paramètres plutôt que de chercher à les déduire d'une théorie microscopique.

Quand nous parlerons par la suite de “petits” éléments de matière (même infinitésimal!), ces éléments seront assez “gros” pour contenir un très grand nombre de molécules. La grandeur physique attachée à un point est en fait une moyenne prise sur plusieurs millions de molécules et sera traitée comme une fonction continue des coordonnées spatiales et du temps.

## Forces agissant sur un élément de fluide

On distingue deux types de forces qui s'exercent à l'échelle macroscopique.

– Forces à longue portée ou forces de volume.

Elles varient peu d'un point à l'autre, elles peuvent pénétrer à l'intérieur d'un fluide et s'exercent sur chaque élément du fluide.

Exemples : la gravitation, les forces électromagnétiques (si le fluide transporte des charges ou est traversé par un courant électromagnétique), les forces “fictives” (comme la force centrifuge) liées à l'utilisation d'un référentiel accéléré.

La force sur un élément de fluide est proportionnelle au volume  $\Delta V$  de cet élément :  $\vec{f}(\vec{x}, t) \rho \Delta V$ . La force ici est arbitrairement rapportée à l'unité de masse, d'où la présence de la masse spécifique  $\rho$ .

Dans le cas de la pesanteur :  $\vec{f} = \vec{g}$

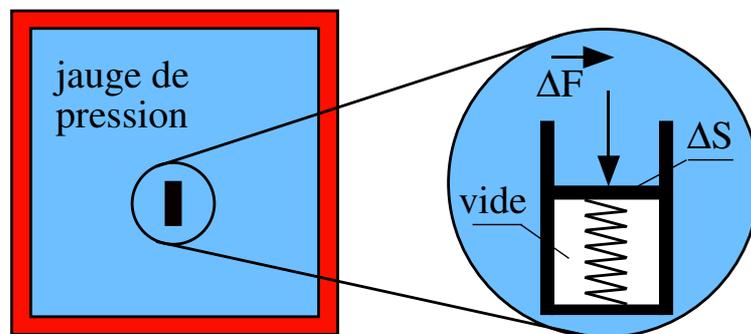
– Forces à courte portée ou forces de surface.

Elles varient rapidement avec la distance des éléments interagissant et sont produites par l'action d'une couche de molécules sur une couche voisine (pour les solides, c'est le contact direct entre deux solides) ou par la migration de molécules à travers la surface commune de deux éléments (pour le gaz). Pour les liquides, ces deux effets existent.

Si un élément de matière subit des forces à courte portée, celles-ci agissent essentiellement sur une couche mince à la surface de l'élément de matière. L'étendue et l'orientation de cette surface déterminent la force. La composante tangentielle de cette force mettra forcément en mouvement l'élément de fluide. Comme nous sommes en hydrostatique, nous ne pouvons considérer ces forces tangentielles de surface. Ces forces tangentielles de surface réapparaîtront dans le chapitre de l'hydrodynamique.

Dans un fluide en équilibre statique, il y a équilibre entre les forces de volume et les forces normales de surface.

**La pression** Mettons une petite jauge à l'intérieur d'un fluide comme indiqué sur la figure :



La jauge consiste en un piston de surface  $\Delta S$  appuyant sur un ressort calibré. Le ressort est dans le vide, alors que le piston est en contact avec le fluide. L'indication du ressort permet de connaître la force s'exerçant perpendiculairement à surface du piston. Nous définissons la pression par

$$P = \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad [\text{Pa}]$$

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ Pascal} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

## Hydrostatique

Expérimentalement, en un point donné du fluide la pression est indépendante de l'orientation de la jauge de pression. La pression est une grandeur scalaire, bien que formée à partir de grandeurs à caractère vectoriel. D'autres unités de pressions sont parfois utilisées :

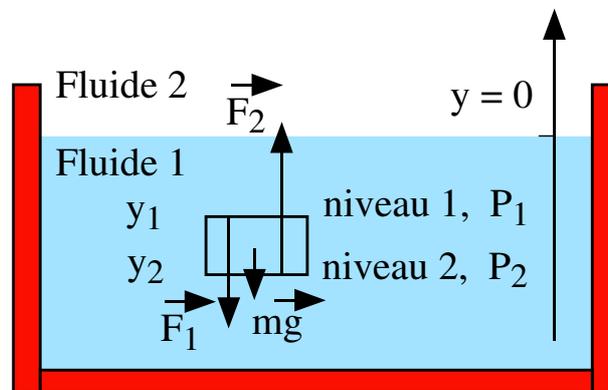
$$1 \text{ atm} = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ Torr}$$

### Fluide au repos sous l'effet de la gravitation

Considérons un élément parallélépipédique de fluide dans un fluide au repos. Nous avons ici un équilibre statique : les forces qui s'exercent sur l'élément de fluide s'équilibrent parfaitement. Ce sont : le poids de l'élément de fluide et les forces s'exerçant sur les faces du parallélépipède. De ces dernières, seules subsistent les forces verticales, les autres devant s'annuler deux à deux.

Force sur la face du niveau 1 à la cote  $y_1$  :  $F_1 = S \cdot P(y_1) = S \cdot P_1$

Force sur la face du niveau 2 à la cote  $y_2$  :  $F_2 = S \cdot P(y_2) = S \cdot P_2$



$$F_2 = F_1 + m g \Rightarrow S \cdot P_2 = S \cdot P_1 + \rho (y_1 - y_2) S g$$

$$\Rightarrow P_2 = P_1 + \rho (y_1 - y_2) g$$

Dans ces expressions,  $\rho$  est la masse spécifique du liquide et  $\rho V g = \rho (y_1 - y_2) S g$  est le poids de la masse de fluide. En prenant de petites différences de profondeur  $\Delta y = y_1 - y_2$ , nous aboutissons à de petites différences de pression :  $\Delta P = P_1 - P_2$ , par conséquent :

$$\Delta P = -\rho g \Delta y \quad \text{ou} \quad \boxed{dP = -\rho g dy}$$

Cette expression générale est valable même si la masse spécifique  $\rho$  du fluide dépend de la cote  $y$ . Pour trouver la dépendances de la pression avec la profondeur, nous devons faire des hypothèses sur la masse spécifique.

**Densité uniforme**  $\rho = \rho_0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P = P_0 - g \rho_0 y}$$

Sous l'hypothèse d'une densité uniforme, la pression dans un fluide en équilibre statique ne dépend que de la profondeur du point considéré et non des dimensions horizontales du fluide et de son conteneur.

**Atmosphère isotherme pour un gaz parfait**

On a  $PV = NkT$  (c'est l'équation d'état d'un gaz parfait) et  $M = Nm$  avec  $N$  = nombre de molécules dans le volume  $V$  et  $m$  = masse d'une molécule.

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{M}{V} = \frac{Nm}{NkT} P = \frac{m}{kT} P$$

$$\frac{dP}{dy} = -g\rho(y) = -\frac{mg}{kT} P \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{mg}{kT} dy$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P = P_0 \exp\left(-\frac{mg}{kT} y\right)} \quad [T = cst]$$

La pression hydrostatique dans un gaz parfait est, sous l'hypothèse que la température est constante, décroît de manière exponentielle avec l'altitude.

**Principe de Pascal**

Partant du fait que la pression dans un fluide incompressible au repos dépend uniquement de la profondeur, Pascal énonça le principe suivant en 1653 :

## Hydrostatique

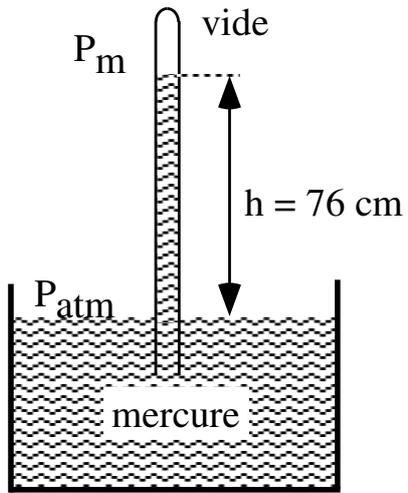
“Une pression extérieure exercée sur un fluide incompressible dans un récipient fermé est transmise intégralement à toutes les parties du fluide et aux parois du récipient.”

### **Point de contrôle**

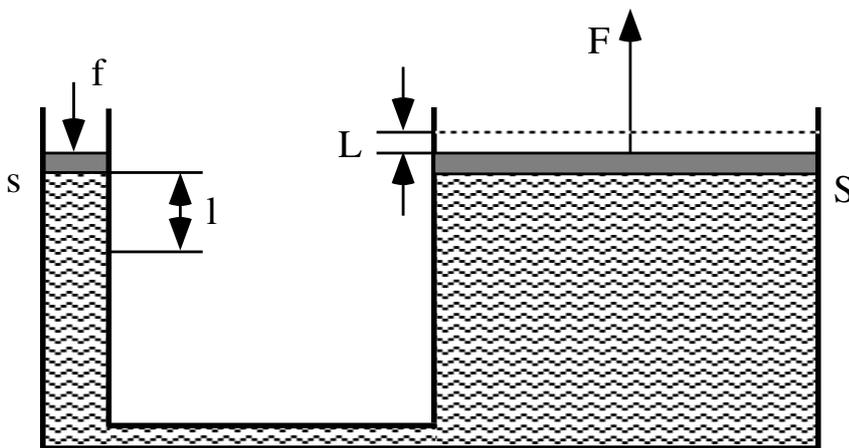
1) Dans le paradoxe hydrostatique dessiné sur la figure de la page suivante, les fonds des 3 récipients sont les plateaux de 3 balances et contre-balançés par des poids identiques. On ajoute du liquide aux trois récipients ; quel est le fond qui cèdera le premier si le volume de liquide versé dans chaque récipient est le même ?

2) Que se passe-t-il si on verse du vin dans le tonneau de Pascal dessiné sur la figure de la page suivante ?

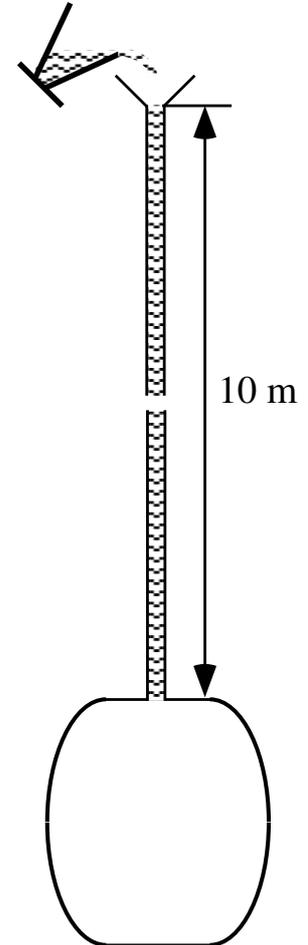
# Hydrostatique



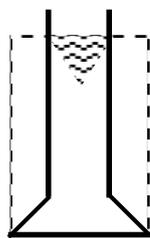
Baromètre à mercure



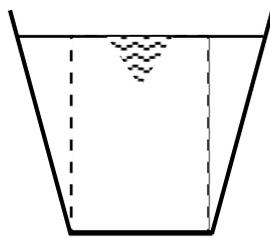
Presse hydraulique:  
application du Principe de Pascal



Le tonneau de Pascal



a)



b)



c)

Le paradoxe hydrostatique

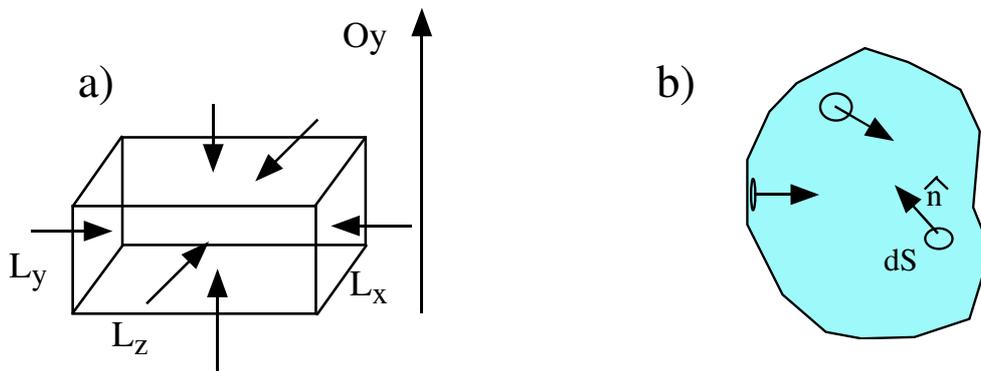
## Le Principe d'Archimède

Considérons un corps parallélépipédique de masse  $m$ , de volume  $V = L_x \cdot L_y \cdot L_z$ . Les forces qui s'exercent sur ce corps sont :

1. Son poids  $\vec{F}_g = m \vec{g}$ ,
2. La résultante des forces de pression qui s'exercent sur la surface de la masse : comme les forces horizontales s'annulent deux à deux, il ne reste plus que les 2 forces verticales s'exerçant sur les 2 faces perpendiculaires à  $Oy$ . La résultante de ces 2 forces est (fig. a) ci-après) verticale, dirigée de bas en haut :

$$L_x \cdot L_z \cdot \rho g \Delta y = L_x \cdot L_z \cdot \rho g L_y = V \cdot \rho g$$

Dans cette expression,  $\rho$  est la masse spécifique du fluide.



[ Le résultat précédent demeure le même pour une forme quelconque du corps plongé dans le fluide. La résultante des forces de pression qui s'exerce sur la masse est  $\int P \hat{n} dS$ . Dans cette expression,  $P$  est la pression du fluide sur le corps à l'endroit de l'élément de surface  $dS$ ; le vecteur unité  $\hat{n}$  est dirigé vers l'intérieur du corps (b) ci-dessus). Comme la pression hydrostatique augmente avec la profondeur, la résultante des forces de pression est verticale et dirigée de bas en haut. Le calcul exact de l'intégrale précédente fait intervenir le Théorème de Gauss et donne  $V \cdot \rho g$  .]

## Hydrostatique

On appelle **poussée d'Archimède** la force exercée sur un corps plongé entièrement ou partiellement dans un fluide par ce dernier ; cette force est verticale, dirigée de bas en haut et son module est égal à  $V \cdot \rho g$ , c.à.d. égal au poids du fluide déplacé.

**Point de contrôle** Un glaçon flotte à la surface de mon verre d'eau. Au bout d'un moment, il a entièrement fondu. Le niveau de l'eau a-t-il monté, descendu ou est-il resté le même ?

## Interface entre deux milieux

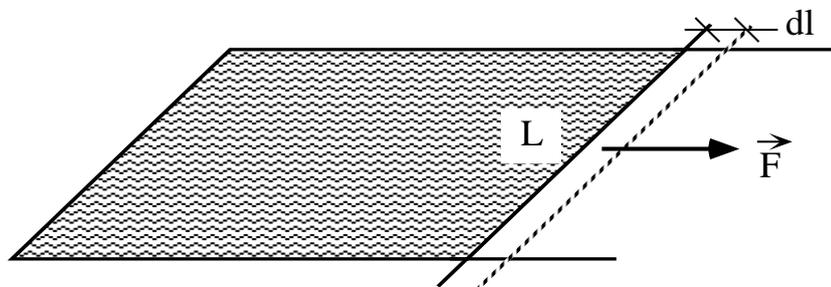
Les deux milieux considérés peuvent être deux phases différentes ou deux milieux de composition différentes. Nous supposons les deux milieux en équilibre thermique (même température) et mécanique (vitesse relative nulle).

### Tension superficielle

Une petite goutte de liquide ou une petite bulle de gaz dans un liquide sont sphériques : l'interface entre deux fluides tend à avoir une aire minimale.

En effet, à volume égal, la sphère présente la surface minimale. Cette propriété, qui semble évidente, n'a trouvé sa démonstration complète qu'à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle.

Considérons une lame d'eau savonneuse telle que représentée sur la figure. Pour la maintenir à une surface  $S$  donnée, il faut exercer une force  $\vec{F}$  perpendiculaire à la tige. On trouve que cette force est proportionnelle à la longueur  $L$  de la tige qui tient la lame :  $F = \gamma L$



Pour augmenter l'aire de la lame, il faut fournir un travail

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = 2\gamma L dl = 2\gamma dS$$

Il y a un facteur 2 car il y a 2 interfaces !

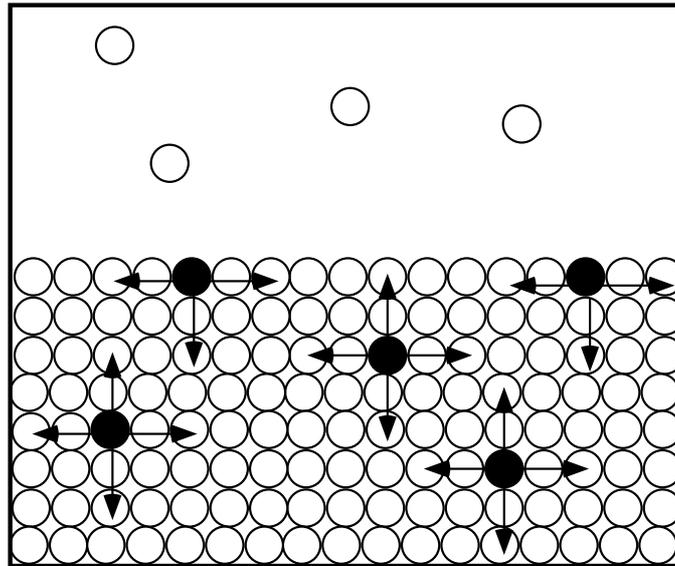
$\gamma$  est la tension superficielle ou coefficient de tension superficielle. C'est une énergie par unité de surface ou une force par unité de longueur. Ainsi

$H_2O$	$\gamma = 70 \times 10^{-3} \text{ N} \times \text{m}^{-1}$
$Hg$	$\gamma = 460 \times 10^{-3} \text{ N} \times \text{m}^{-1}$

En fait,  $\gamma$  dépend des deux milieux de part et d'autre de l'interface et on le note par  $\gamma_{12}$ . Dans l'exemple ci-dessus, le deuxième milieu est l'air.

### Explication

L'explication du phénomène réside dans les forces inter-moléculaires. Considérons l'interface liquide-gaz représenté sur la figure ci-dessous.



Une molécule à l'intérieur du liquide est dans un champ de force uniforme ; une molécule à la surface est sujette à une attraction nette vers l'intérieur du liquide qui n'est pas compensée par une attraction égale de la part des molécules de gaz trop dispersées et rares. Toute surface de liquide, en l'absence de toute autre force, tend ainsi à se contracter pour présenter une **surface minimale**. Il faut ainsi fournir de l'énergie pour amener une molécule à la surface, à plus forte raison, pour augmenter la surface d'un liquide.  $\gamma$  est donc positif (ce n'est pas forcément le cas entre 2 liquides). Normalement,  $\gamma$  diminue quand la température augmente.

### Pression dans une goutte ou dans une bulle

Nous supposons dans ce qui suit que la goutte ou la bulle est sphérique. À l'équilibre, il y a une surpression  $\Delta P = P_{int} - P_{ext}$  dans la goutte pour que l'effet de la tension superficielle puisse être compensée. Quand il y a une augmentation  $dR$  du rayon de la goutte, le travail mécanique correspondant

## A la limite entre deux milieux

est égal au travail des forces de pression utilisées pour gonfler la goutte ou la bulle :

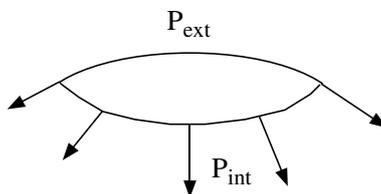
$$\delta W = \underbrace{\Delta P S}_{\text{Force}} \cdot dR = \Delta P \underbrace{(4\pi R^2)}_{\text{surface sphère}} dR$$

mais 
$$\delta W = \gamma dS = \gamma d(4\pi R^2) = 4\pi\gamma 2R dR$$

Donc

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R}$$

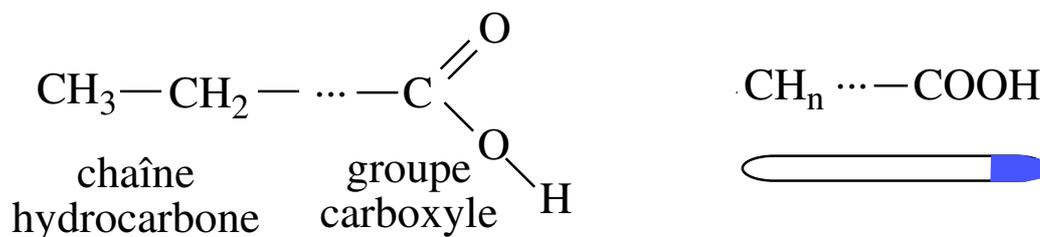
Dans le cas d'une bulle, nous avons deux interfaces :  $\Rightarrow \Delta P = \frac{4\gamma}{R}$



**Point de contrôle** Vous soufflez deux bulles de savon, une grosse et une plus petite, et vous les mettez en contact avec une paille. Que se passe-t-il ? Les deux bulles restent-elles comme elles étaient initialement ? Expliquez.

## Les lames d'eau savonneuse

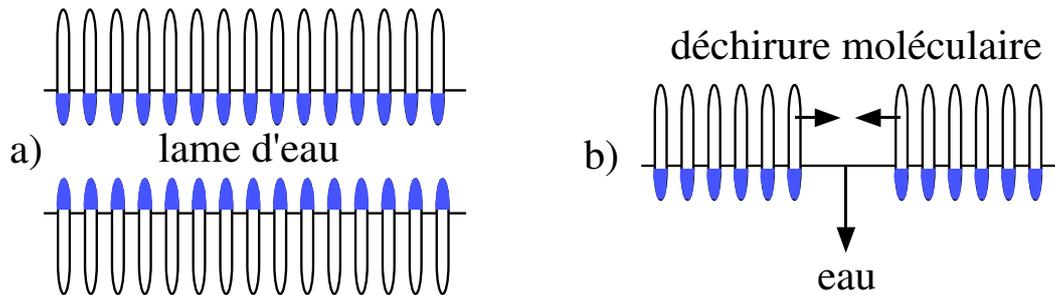
L'eau pure ne permet pas de faire des lames ; par contre, des lames persistantes peuvent être faites avec de l'eau de savon. En gros, le savon est un sel d'acide gras, l'acide oléique, dont la molécule a la structure suivante :



dans l'eau, le groupe carboxyle est hydrophile (à cause des Hydrogène du COOH qui peut avoir, avec l'eau, des ponts hydrogène) , tandis que la chaîne

## A la limite entre deux milieux

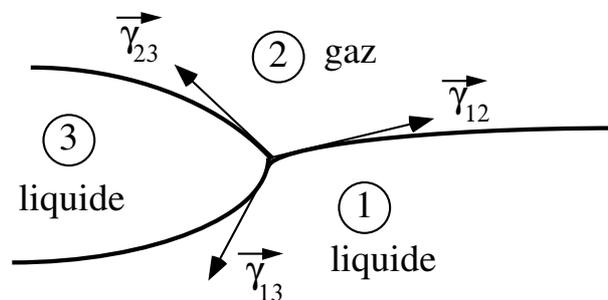
hydrocarbure est hydrophobe. Les molécules de savon se mettent alors ainsi (figure a))



et le savon abaisse la tension superficielle de l'eau puisqu'à la surface, il y aura moins de molécules  $H_2O$ . Lorsqu'il y a une déchirure moléculaire, il y a relèvement de la tension superficielle, ce qui amène à la fermeture de la fente (b)) : on peut ainsi faire des lames persistantes d'eau savonneuse.

## Contact entre 3 milieux. Capillarité

Liquide + liquide + gaz



À l'équilibre, les trois forces de tensions superficielles ont une résultante nulle ; puisque ces forces agissent sur un même élément  $dL$  (perpendiculaire à la figure), nous pouvons écrire pour l'équation vectorielle suivante pour les coefficients de tension superficielle :

$$\vec{\gamma}_{12} + \vec{\gamma}_{23} + \vec{\gamma}_{31} = 0$$

ce qui n'est possible que si

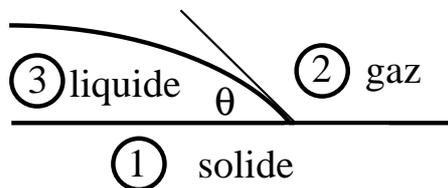
$$| \vec{\gamma}_{12} | < | \vec{\gamma}_{23} | + | \vec{\gamma}_{31} |$$

## A la limite entre deux milieux

Les angles aux interfaces sont déterminés par les valeurs des coefficients de tension superficielle  $\gamma$ . C'est le cas pour la graisse fondue sur l'eau (les "yeux" du bouillon).

Si la condition précédente pour les  $\gamma_{ij}$  n'est pas satisfaite, il n'y a pas d'équilibre possible : c'est le cas du pétrole ou de l'essence sur l'eau. Le liquide léger se répand sur le liquide lourd, éventuellement jusqu'à former une pellicule monoatomique.

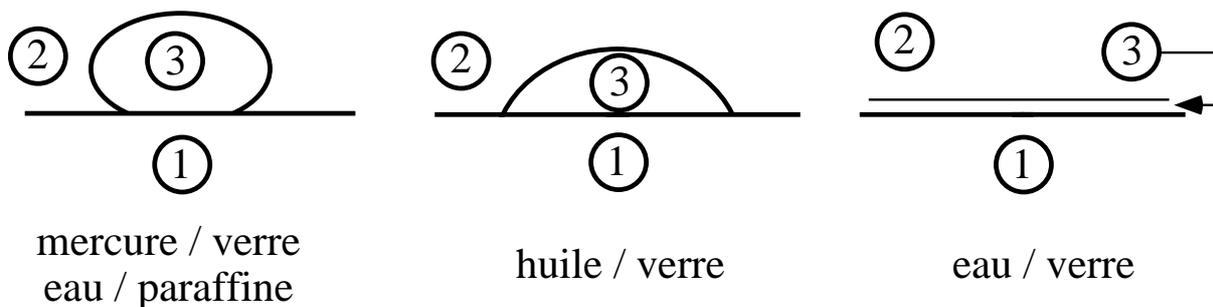
Solide + liquide + gaz



$$\cos \theta = \frac{\gamma_{12} - \gamma_{31}}{\gamma_{23}}$$

(mais peut-on parler de "tension superficielle" d'un solide? !)

Selon la valeur et le signe de  $(\gamma_{12} - \gamma_{31})$ , on peut avoir :

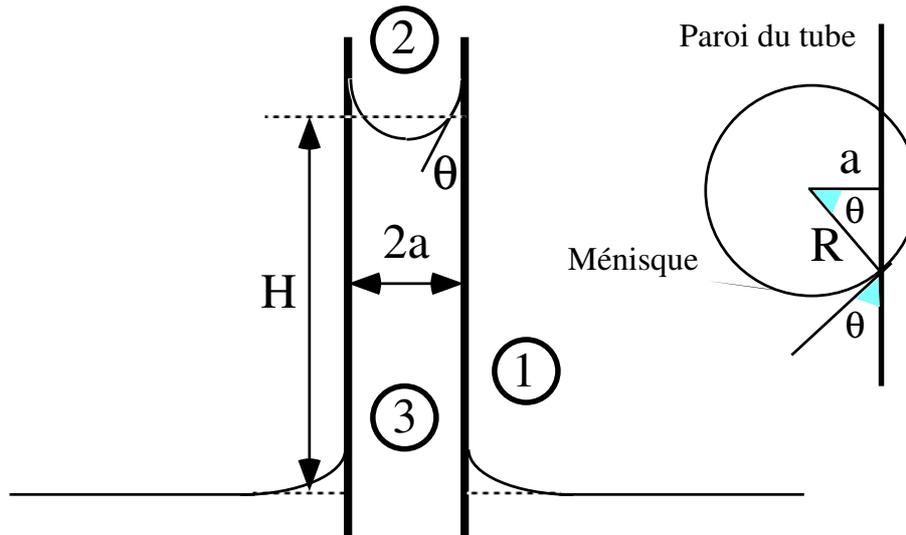


Ascension capillaire (effet Jurin)

Pour calculer la hauteur d'ascension  $H$ , on égalise la pression due à la courbure de la surface libre (cette surface est sphérique) à la pression hydrostatique due à la colonne de liquide de hauteur  $H$ .

L'angle de raccordement,  $\theta$ , est donné par les coefficients de tension super-

A la limite entre deux milieux



ficielle des 3 milieux.

$$\rho g H = \Delta P = \frac{2 \gamma_{23}}{R} = \frac{2 \gamma_{23} \cos \theta}{a}$$

avec  $\cos \theta = \frac{\gamma_{12} - \gamma_{31}}{\gamma_{23}}$  (page précédente).

$$H = \frac{2 (\gamma_{12} - \gamma_{31})}{a g \rho}$$

Pour le **mercure** :  $H < 0$

# Physique Générale

## HYDRODYNAMIQUE

TRAN Minh Tâm

### Table des matières

<b>Les fluides en mouvement</b>	<b>129</b>
Introduction . . . . .	129
Les hypothèses sur l'écoulement . . . . .	130
Équation de continuité . . . . .	131
<b>L'équation de Bernoulli</b>	<b>134</b>
Énoncé de l'équation . . . . .	134
Application : formule de Torricelli . . . . .	136
Application : effet Venturi . . . . .	137
<b>Écoulement autour d'un obstacle</b>	<b>139</b>
L'effet Magnus . . . . .	139

<b>Force de viscosité dans un fluide réel</b>	<b>141</b>
Définition de la viscosité . . . . .	141
Application : écoulements de Poiseuille . . . . .	142
Perte de charge . . . . .	144
<b>Écoulements laminaires et turbulents</b>	<b>146</b>
Deux exemples . . . . .	146
Le nombre de Reynolds . . . . .	147
Interprétation du nombre de Reynolds . . . . .	148

## Introduction

Nous avons déjà évoqué au chapitre de l'hydrostatique la notion de *fluide*. Les états liquide et gazeux sont des fluides par opposition à l'état solide. Nous avons également déjà évoqué "l'hypothèse du continu" par lequel nous considérons le fluide comme un milieu continu dont nous connaissons de manière empirique les propriétés : ces propriétés découlent bien entendu des caractéristiques microscopiques de la matière, mais leur déduction de ces caractéristiques microscopiques est difficile ; il est plus aisé de tirer de l'expérience les propriétés macroscopiques et de les "réinjecter" dans notre développement.

Nous avons également parlé de *particules ou éléments de fluide*. À cette échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique, nous considérerons quelques  $10^{10}$  à  $10^{16}$  molécules, ce qui permet déjà d'avoir accès à des moyennes locales ayant un caractère macroscopique et, ainsi, de définir ces grandeurs macroscopiques qui décrivent le fluide comme un milieu continu.

L'étude de l'écoulement peut se limiter à la connaissance du mouvement d'ensemble des "particules" de fluide. Deux approches sont dès lors possibles.

1. Le mouvement est décrit par la donnée des trajectoires des particules de fluide au cours du temps, connaissant leurs positions à une date initiale  $t_0$ . C'est l'approche lagrangienne (Louis de Lagrange, astronome et mathématicien français (1736 - 1813)).
2. Le mouvement est décrit par la connaissance de la vitesse de toutes les particules de fluide à tout instant  $t$ . C'est l'approche eulérienne (Leonhard Euler, mathématicien suisse (1707 - 1783)).

En fait, l'approche de Lagrange devient très rapidement difficile à utiliser, en particulier pour les écoulements turbulents où la notion d'élément (ou particule) de fluide est difficile à saisir. Nous adopterons dans ce qui suit l'approche eulérienne.

## Les hypothèses sur l'écoulement

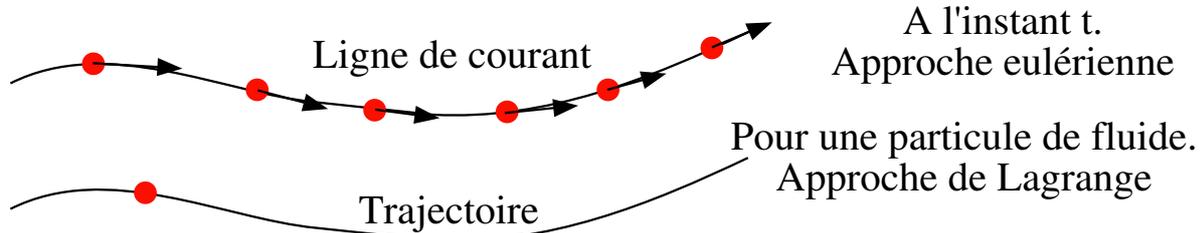
La description de l'écoulement d'un fluide réel est très compliqué et certainement au delà du cadre de ce cours de Physique Générale. Nous ferons les hypothèses limitatives suivantes :

1. **Écoulement stationnaire.** La vitesse des particules de fluide passant en un point donné ne change pas au cours du temps, que ce soit en module ou en direction.
2. **Fluide incompressible.** Le fluide est incompressible : sa masse spécifique est constante et uniforme.
3. **Écoulement non visqueux.** Nous avons vu dans le chapitre de l'hydrostatique que, dans un fluide, existaient des forces de volume et des forces de surface. Les premières sont des "forces à longue portée" et s'exercent sur des éléments de volume, alors que les forces de surfaces s'exercent entre deux "couches" de fluide. Alors que pour un fluide en équilibre les forces de surface ne peuvent être que normales (ce sont les forces de pression), dans l'étude du mouvement des fluides, les forces de surface tangentielles participent directement au mouvement du fluide et agissent comme des forces de frottement, les couches de fluide rapides entraînant les couches lentes. La composante tangentielle des forces de surface est appelée "force de viscosité". Comme son nom l'indique, elle caractérise des fluides réels visqueux, que nous étudierons prochainement. Dans les deux premiers paragraphes de ce chapitre, nous ferons **l'hypothèse du fluide parfait** où les forces de viscosité seront négligées.
4. **Écoulement irrotationnel.** Nous n'allons pas considérer les écoulements dans lesquels les éléments de fluide tournent autour d'un axe passant par son centre de masse.
5. Il n'y a ni source ni puits dans notre fluide.

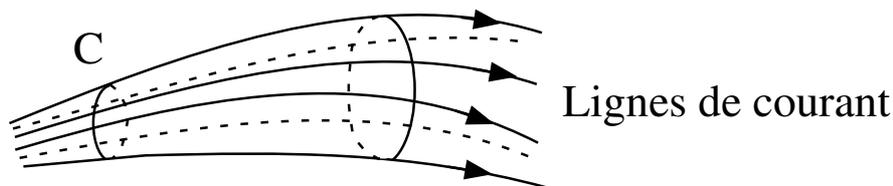
La première hypothèse sur un écoulement stationnaire permet d'écrire :

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}(\vec{x}, t_0) \quad \forall t, \quad \forall \vec{x}$$

La trajectoire d'une particule de fluide (approche de Lagrange) coïncide ici avec la **ligne de courant**, ligne qui, à un instant donné, est tangente aux vitesses des divers éléments de fluide (approche eulérienne).



**Tubes de courant** Considérons une courbe fermée  $C$  dont aucun tronçon ne coïncide avec une ligne de courant. L'ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur  $C$  définit un tube de courant. Par construction,



aucune ligne de courant ne sort transversalement du tube de courant : aucun élément de fluide ne traverse le tube de courant. Comme, de plus, nous sommes en régime stationnaire, les lignes de courant sont constantes, donc, les tubes de courant ne seront pas déformés.

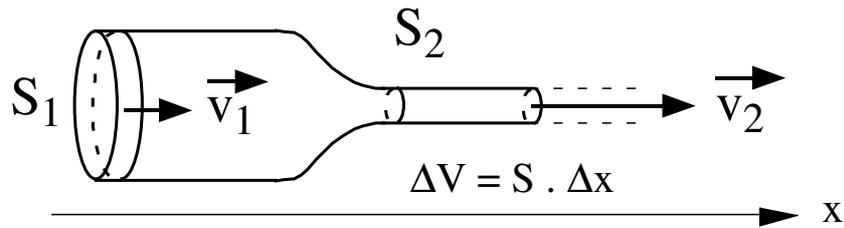
Exemple : Un “filet” d'eau coulant d'un robinet constitue un tube de courant.

### Équation de continuité

Un fluide incompressible passe dans un tube ayant un rétrécissement. Il a une vitesse  $\vec{v}_1$  à gauche, là où le tube a une section  $S_1$ . Pendant un intervalle de temps  $\Delta t$ , un volume  $\Delta V$  de fluide entre dans le tube. Comme le fluide est incompressible, un même volume  $\Delta V$  de fluide sortira du tube.

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t \quad \Rightarrow \quad S_1 v_1 = S_2 v_2$$

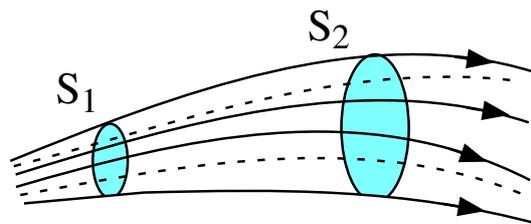
Cette dernière équation est l'équation de continuité, elle montre que, pour



un fluide incompressible, la vitesse du fluide augmente si la section du tube conducteur décroît.

Le produit  $S v$  est le débit de fluide et est constant :  $D_V = S v = \text{cst.}$

L'équation de continuité  $S_1 v_1 = S_2 v_2$  est aussi valable pour un tube de courant : puisqu'aucun élément de fluide ne traverse le tube de courant, ce qui entre dans le tube de courant doit en ressortir !



Remarque : Dans tout notre développement, nous n'avons pas de source ni de puits dans notre fluide ! Si nous en avions eu, nous n'aurions pas eu de conservation du débit à l'endroit de la source ou du puits.

### Exemple :

La section de l'aorte chez une personne normale au repos est de  $3 \text{ cm}^2$  et la vitesse du sang y est de  $v_a = 30 \text{ cm/s}$ . Un capillaire type a une section d'environ  $3 \times 10^{-7} \text{ cm}^2$  et le sang y circule avec une vitesse de  $v_c = 0,05 \text{ cm/s}$ . Combien de capillaires cette personne a-t-elle ?

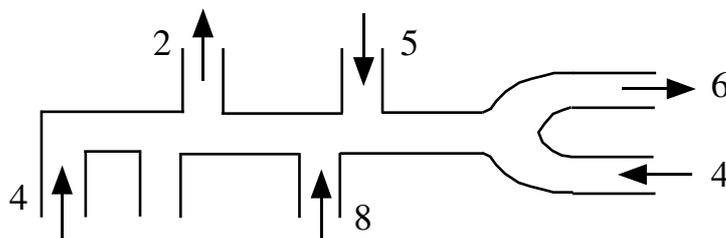
**Point principal** : Le sang qui passe dans les capillaires a du passer par l'aorte ; par conséquent, le débit du sang au travers de l'aorte est égal au volume total de sang passant par seconde dans les capillaires.

Le débit du sang étant conservé entre les capillaires et l'aorte, nous avons :

$$S_a v_a = N \times S_c v_c$$

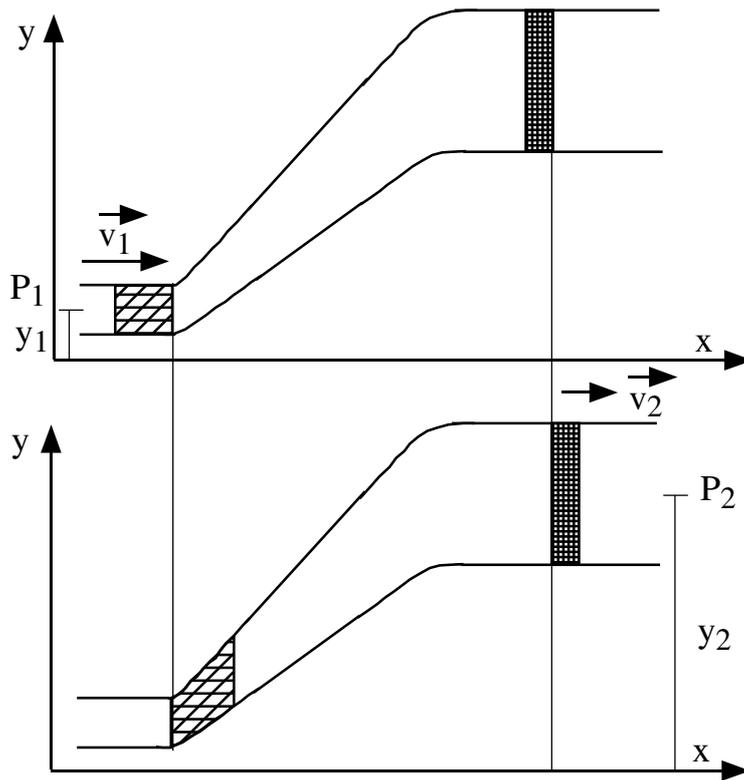
$$N = \frac{S_a v_a}{S_c v_c} = \frac{3 \times 30 \text{ cm}^3/\text{s}}{3 \times 10^{-7} \times 0,05 \text{ cm}^3/\text{s}} = 6 \times 10^9$$

**Point de contrôle** La figure ci-dessous montre un tuyau avec diverses ramifications. Le débit de fluide en  $\text{cm}^3/\text{s}$  est indiqué pour chacune des ramifications, sauf une. Dans quel sens le fluide s'y écoulera-t-il et avec quel débit ?



## Énoncé de l'équation

Considérons un tube de courant en régime stationnaire. Le fluide est un fluide parfait incompressible. Isolons par la pensée un bout de ce tube de courant et considérons-le comme un système sur lequel s'exercent des forces extérieures.



Dans le système, nous n'avons pas de dissipation, le fluide est en effet parfait (sans viscosité) ; sur lui s'exerce une force conservative : la force de gravitation dont le potentiel est  $\Delta m g y$ . Le travail des forces extérieures sur notre système est donc égal à la variation de l'énergie mécanique du système :  $W = \Delta E^{méc.}$  .

Les forces extérieures à notre système sont ici sont les forces de pression : nous devons *fournir* un travail *au* système pour pousser la masse de fluide à l'entrée et le système doit aussi *céder* du travail pour expulser dehors la masse de fluide à la sortie.

Le travail d'une force de pression est  $W = F \cdot \Delta x = P \cdot (S \Delta x) = P \cdot \Delta V$ .

## L'équation de Bernoulli

Ainsi, les travaux des forces de pression sont :

$$W = P_1 \Delta V - P_2 \Delta V = -(P_2 - P_1) \Delta V$$

Ainsi :

$$W = \Delta E^{méc.} \Rightarrow -(P_2 - P_1) \Delta V = \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2) + \Delta m g (y_2 - y_1)$$

$$-(P_2 - P_1) \Delta V = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2) + \rho g \Delta V (y_2 - y_1)$$

$\Delta m = \rho \Delta V =$  masse de fluide qui entre et sort pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ .

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 + P_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2 + P_2$$

ou

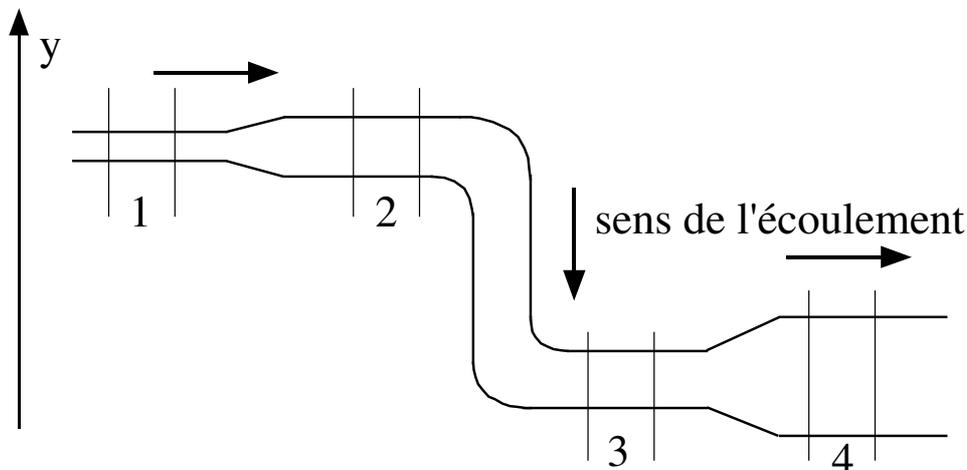
$$\boxed{\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y + P = \text{constant}}$$

le long d'une ligne de courant.

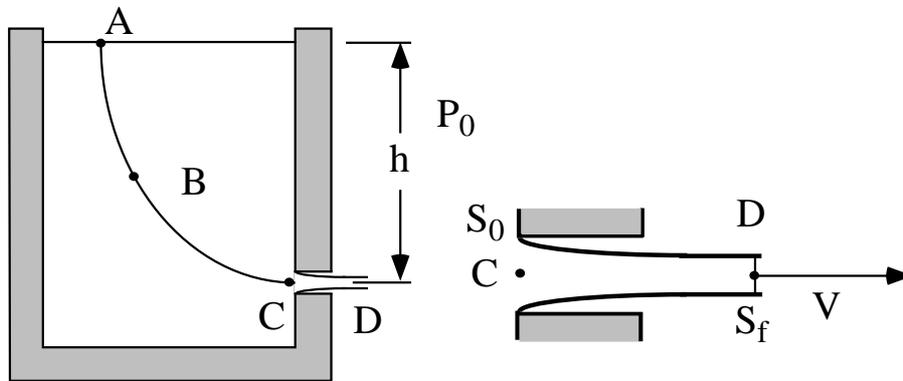
En effet, on peut réduire progressivement la section du tube de courant. L'équation précédente constitue le théorème de Bernoulli.

### Point de contrôle

De l'eau coule dans la canalisation verticale dessinée sur la figure ci-après selon le sens indiqué. Donnez dans l'ordre décroissant les sections selon **a)** le débit d'eau qui les traverse, **b)** la vitesse de l'eau, **c)** la pression au sein de l'eau qui y coule.



**Application : formule de Torricelli**



Appliquons le théorème de Bernoulli à la ligne de courant ABCD pour un volume  $\Delta V$  unité :

En A :  $v \approx 0$

$P = P_0$  (pression atmosphérique) et

$E^{pot} = 0$  (origine du potentiel gravifique)

En C ou D :  $v =$  inconnue

$P = P_0$  si on est dans la partie du jet à section constante

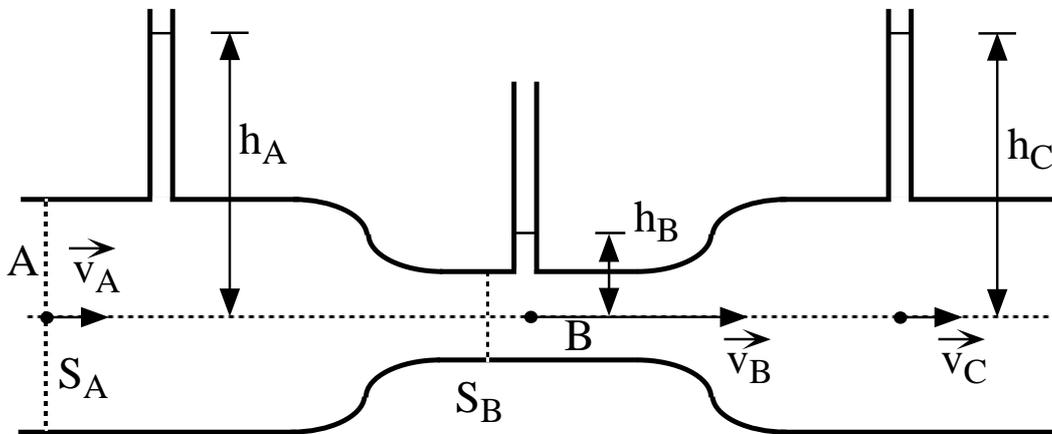
$E^{pot} = -\rho g h$

$$\frac{1}{\rho} P_0 = \frac{1}{\rho} P_0 + \frac{1}{2} v^2 - g h \Rightarrow v = \sqrt{2 g h}$$

C'est la vitesse d'un corps en chute libre d'une hauteur  $h$ .

Attention : nous avons fait l'hypothèse que la section du tube de courant en D,  $S_f$ , est beaucoup plus petite que la section au point A, ce qui nous a permis de négliger la vitesse du fluide en A (équation de continuité!). Par ailleurs, la section  $S_f$  est d'environ 0.5 à 0.6 fois  $S_0$ , la section réelle du trou (en C).

**Application : effet Venturi**



Appliquons le théorème de Bernoulli à la ligne de courant horizontale ABC d'un écoulement stationnaire incompressible :

$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = P_C + \frac{1}{2} \rho v_C^2$$

Mais  $P_A = P_0 + \rho g h_A$ , ( $P_0$  est la pression atmosphérique), donc :

$$h_A + \frac{1}{2g} v_A^2 = h_B + \frac{1}{2g} v_B^2 = h_C + \frac{1}{2g} v_C^2$$

La pression est plus basse en B qu'en A ou qu'en C puisque  $v_B > v_A$  et  $v_B > v_C$  par l'équation de continuité.

**Remarque :** La pression en C est la même que celle en A à condition que la viscosité soit nulle ; ce n'est en général pas le cas.

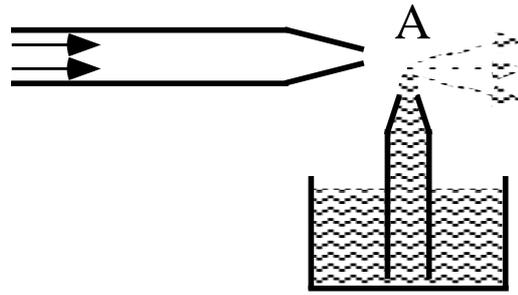
**Autres applications**

– Mesure du débit. Nous avons :  $D_V = S_A v_A = S_B v_B$ . En utilisant la relation déduite de l'expérience du tube de Venturi, nous avons :

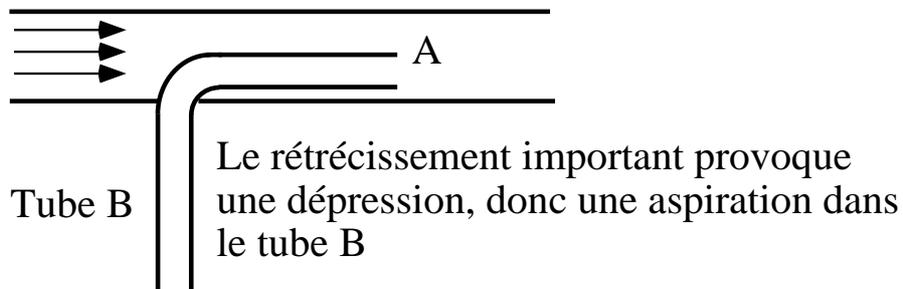
$$D_V = S_A v_A = S_A \sqrt{\frac{2g(h_A - h_B)}{\left(\frac{S_A}{S_B}\right)^2 - 1}}$$

ce qui permet de trouver le débit  $D_V$  à partir de  $(h_A - h_B)$ , le reste étant connu par construction.

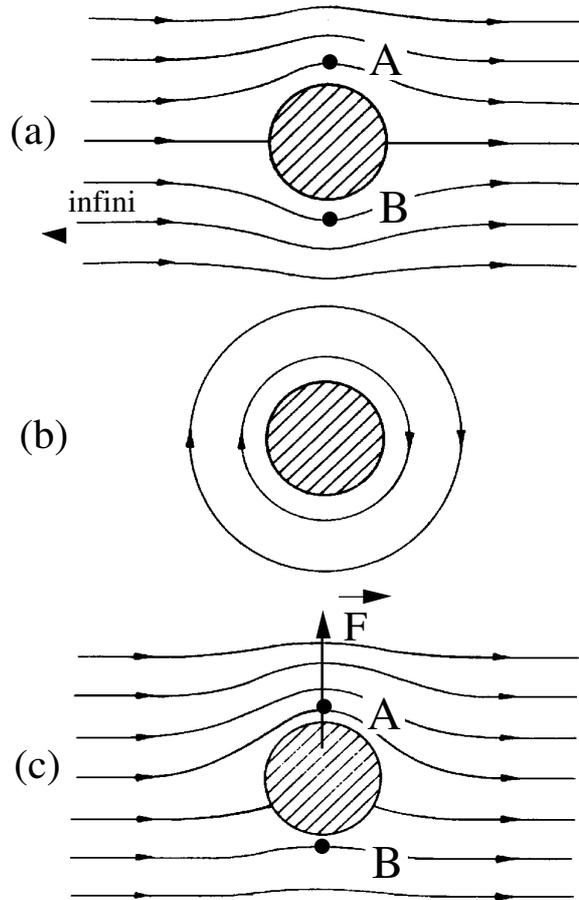
## L'équation de Bernoulli



- Vaporisateur Le rétrécissement en A donne naissance à une dépression qui permet l'aspiration du fluide et ainsi de le pulvériser. Soumis à un ouragan, le toit d'une maison peut se soulever pour les mêmes raisons.
- Trompe à eau



### L'effet Magnus



Sur la figure a), le fluide s'écoule de gauche à droite et rencontre un cylindre infiniment long. Pour les deux points  $A$  et  $B$  situés symétriquement autour du cylindre, nous avons en négligeant les petites différences de pression hydrostatique entre  $A$  et  $B$  :

$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = P_\infty + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2$$

La vitesse et la pression en  $A$  sont égales à celles en  $B$ .

Sur la figure b), le fluide est mis en mouvement par la rotation du cylindre ; ceci n'est possible que si le fluide lui-même est visqueux.

Sur la figure c), nous avons la superposition de l'écoulement a) du fluide et du mouvement de rotation b). Avec cette superposition, en  $A$  les vitesses dues aux deux mouvements s'additionnent et en  $B$ , elles se retranchent.

## Écoulement autour d'un obstacle

Donc :  $v_A > v_B \Rightarrow P_A < P_B$  si nous avons à la fois l'écoulement du fluide et la rotation du cylindre entraînant celle du fluide. Puisque  $P_A < P_B$ , une force verticale apparaît qui soulève le cylindre.

On obtient l'écoulement dessiné sur la figure b) en faisant tourner l'obstacle. Dans un fluide parfait, cela n'a aucun effet ! Mais grâce à la viscosité, le mouvement de l'obstacle (balles de ping-pong, de tennis, de golf, ballon de football et autres objets plus sérieux) se transmet au fluide. Dans ces exemples, c'est l'obstacle qui se meut à la vitesse  $\vec{v}_\infty$ , le fluide étant immobile, du moins à grande distance.

## Définition de la viscosité

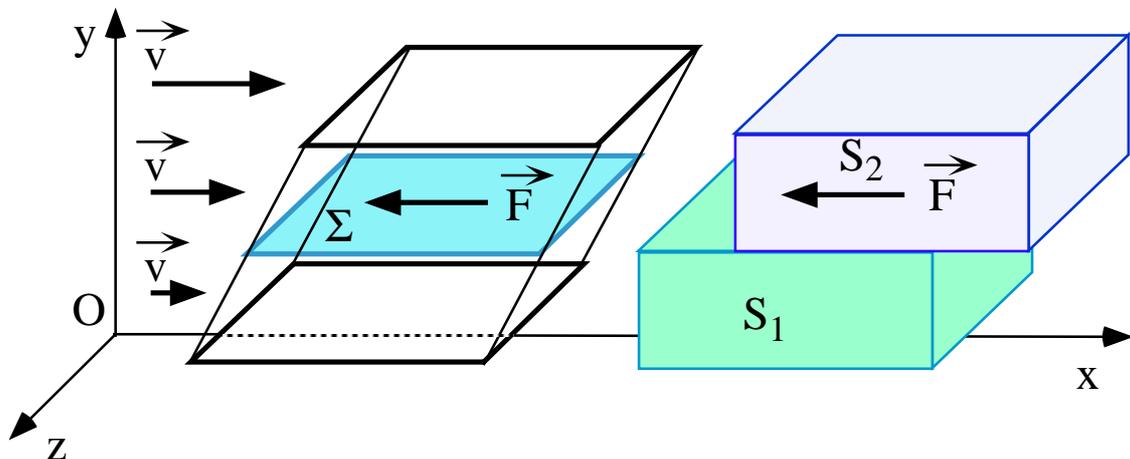
Dans le modèle du fluide parfait, nous avons considéré que les forces de surface entre deux “couches” de fluide étaient uniquement normales à l’interface entre ces deux couches. Les observations faites sur les fluides réels ne peuvent cependant être expliquées qu’avec l’introduction de la composante tangentielle des forces de surface (exemple : effet Magnus).

Ces forces sont opposées aux vitesses relatives des éléments de fluide : elles sont, par conséquent, toujours dissipatives de l’énergie mécanique du fluide puisque toujours opposées au mouvement.

Considérons le cas simple où les couches de fluide parallèles au plan  $Oxz$  glissent les uns sur les autres. Ce cas est une bonne approximation d’un écoulement réel dans lequel les dimensions  $Ox$  et  $Oz$  sont très grandes par rapport à l’épaisseur  $Oy$  du fluide.

Supposons que les vitesses des particules de fluide sont parallèles à l’axe  $Ox$ . Comme les dimensions du fluide selon  $Ox$  et  $Oz$  sont très grandes, la seule variation possible des vitesses des particules ne peut être que selon l’axe  $Oy$  :  $\vec{v} = v_x(y) \hat{i}$ .

Considérons deux éléments de fluide  $S_1$  et  $S_2$  séparés par la surface  $\Sigma$  normale à  $Oy$ .



La force de viscosité, exercée à travers  $\Sigma$  par  $S_1$  sur  $S_2$  est :

- tangente à  $\Sigma$
- proportionnelle à l'aire  $S$  de  $\Sigma$
- de sens opposé à  $\hat{i}$  si  $v_x(y)$  est une fonction croissante de  $y$
- son module est proportionnel au taux d'accroissement de la vitesse en fonction de  $y$ ,  $\frac{dv}{dy}$  :  $F = \eta \frac{dv}{dy} S$

Cette force  $\vec{F}$  tend à ralentir les couches de fluide rapides et à accélérer les couches lentes. Le coefficient  $\eta$  est le *coefficient de viscosité* ou, simplement, la *viscosité* du fluide et dépend de la température assez fortement.

L'unité de viscosité est le poiseuille (Pl) :  $1 \text{ Pl} = 1 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2 = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Dans la situation décrite ici,  $\frac{dv}{dy}$  est le taux de variation des vitesses de deux nappes de fluide planes et voisines. La force de viscosité apparaît ici car il y a *tendance au glissement* d'une nappe sur l'autre.

### Application : écoulements de Poiseuille

(Jean-Louis Marie Poiseuille, physiologiste et physicien français (1799-1869) a étudié la circulation des liquides dans des tuyaux cylindriques)

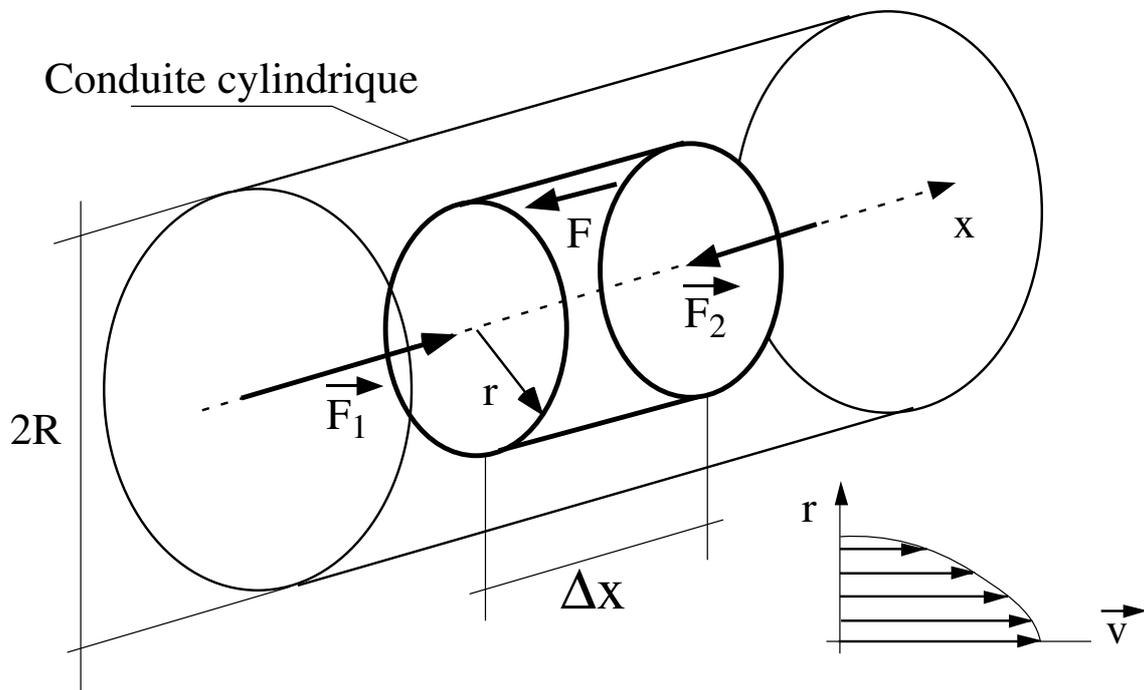
Un **écoulement de Poiseuille** est un écoulement laminaire permanent dans un domaine limité par une paroi cylindrique immobile de section quelconque.

Nous considérons un conducteur cylindrique et un élément de fluide de même axe que le conducteur et de longueur  $\Delta x$ . Cet élément de fluide est en mouvement rectiligne uniforme le long de l'axe sous l'effet de deux forces :

1. les forces de pression  $F_1 = P_1 \pi r^2$  et  $F_2 = P_2 \pi r^2$  (cf. dessin),
2. la force de viscosité  $F = -\eta \frac{dv}{dr} \Delta x 2\pi r$  (la dérivée  $\frac{dv}{dr}$  est négative : la vitesse des nappes de fluide de même axe que la conduite décroît

## Force de viscosité dans un fluide réel

quand  $r$  augmente. En  $r = R$ , cette vitesse est nulle : le fluide visqueux “colle” à la paroi de la conduite).



Le mouvement de l'élément de fluide étant rectiligne uniforme, nous avons l'égalité des forces agissant sur lui :

$$\pi r^2 (P_1 - P_2) = -\eta \frac{dv}{dr} \Delta x 2\pi r$$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{r}{2\eta} \frac{\Delta P}{\Delta x}$$

L'intégration de l'équation précédente, avec la condition à la limite suivante  $v(r = R) = 0$ , donne

$$v(r) = \left| \frac{\Delta P}{\Delta x} \right| \frac{1}{4\eta} (R^2 - r^2)$$

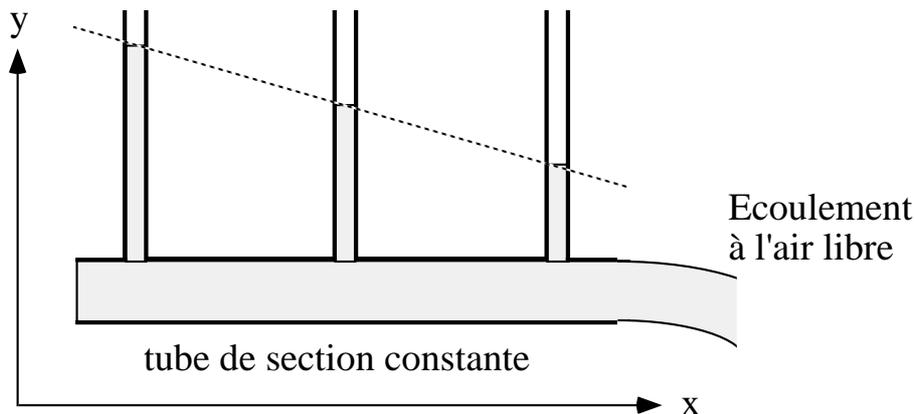
## Perte de charge

Nous avons vu, pour un fluide parfait, que le débit volumique dans une conduite de section  $S$  est de  $S v$ . Dans notre cas, la vitesse varie en fonction du rayon de la conduite : nous devons effectuer l'intégrale suivante

$$D_V = \int v(r) dS = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \left| \frac{\Delta P}{\Delta x} \right| \frac{\pi}{2\eta} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$

$$D_V = \frac{\pi}{8\eta} \left| \frac{\Delta P}{\Delta x} \right| R^4$$

Poiseuille, auteur de travaux sur la circulation sanguine et sur l'instrumentation physique, énonça cette loi en 1844.



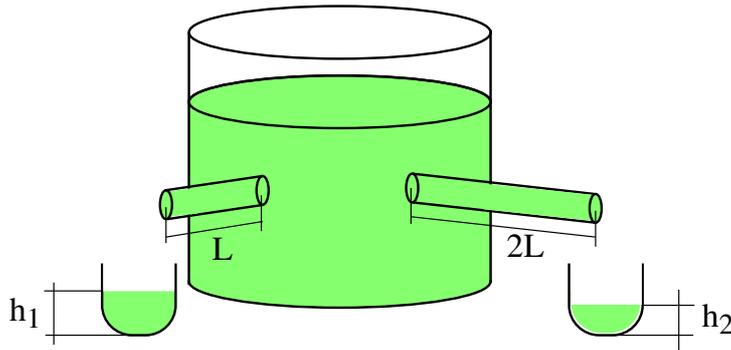
## Remarques

1. Pour un liquide en écoulement laminaire dans un tube de section  $S$  et de longueur  $\ell$ , le débit est proportionnel à la quantité  $\frac{S^2}{\ell}$ . On peut vérifier expérimentalement ce résultat, en prenant deux tubes de même section mais de longueur différente, placés à une même hauteur d'un réservoir.
2. Pour obtenir un même débit, la pression varie comme la puissance 4 du diamètre du tuyau !

## Force de viscosité dans un fluide réel

3. Pour un débit constant et une section constante de la conduite,  
 $\frac{\Delta P}{\Delta x} = \text{cst}$  : la pression décroît linéairement avec la distance  $x$ .

**Point de contrôle** Un fluide coule d'un bassin au travers de deux tubes de même section (quelques  $mm^2$ ) mais de longueur (quelques dizaines de  $cm$ ) double l'une de l'autre. Les deux tubes sont placés à la même hauteur de la base du bassin. Quelle relation trouvez-vous entre les volumes de liquide recueilli dans les béchers ?



## Deux exemples

- Lorsque nous laissons la fumée d’une cigarette monter dans l’atmosphère, nous voyons que la fumée a un aspect régulier au début, puis, à partir d’une certaine hauteur, se transforme en un écoulement turbulent dans lequel nous n’arrivons pas à distinguer les lignes de courant ; nous n’arrivons pas à associer aux éléments de fumée des trajectoires bien définies et stables. L’explication en est la suivante : initialement, l’air chaud a un écoulement laminaire car sa vitesse d’ascension est relativement faible ; ce mouvement est cependant accéléré parce que l’air chaud monte dans un environnement d’air plus froid. Arrive un moment où la vitesse de l’air chaud est telle que nous avons des turbulences.
- Observons l’eau qui sort d’un tuyau. Si le débit est faible, un filet d’eau transparent s’écoule régulièrement ; ce type d’écoulement ne se rencontre que si la vitesse est faible ou lorsque le fluide est très visqueux. Si nous augmentons progressivement le débit en augmentant la vitesse de l’eau ( $D_V = Sv$ ), la surface du jet d’eau n’est plus parfaitement lisse et son aspect varie avec le temps, puis il perd sa transparence. Les lignes de courant n’ont plus la forme régulière du régime laminaire ; elles forment un réseau complexe enchevêtré et changent rapidement et constamment de forme : c’est le régime turbulent. Ce régime turbulent est atteint d’autant plus rapidement que le diamètre du robinet est grand.

Un écoulement est *laminaire* si les lignes de courant “glissent” les unes sur les autres en restant parallèles ; un écoulement laminaire existe généralement si la “vitesse” est faible.

Dans le cas contraire, pour des vitesses “élevées”, l’écoulement est *turbulent*. Il est instable et sa structure est chaotique.

## Le nombre de Reynolds

Nous recherchons une grandeur sans dimension qui nous permette de déterminer de manière quantitative la “frontière” entre écoulements laminaire et turbulent.

### Choix des paramètres

D’après les expériences précédentes, la transition entre écoulements laminaire et turbulent est fonction de

- La vitesse d’écoulement : c’est le paramètre que nous avons mis en évidence dans les deux expériences.
- La viscosité  $\eta$  du fluide : il est bien plus difficile d’obtenir un écoulement turbulent dans l’huile que dans l’eau.
- Le diamètre du tube : il est plus facile d’obtenir un écoulement laminaire dans un tube de faible diamètre !
- La masse spécifique du fluide : ce paramètre n’est pas évident, mais il apparaît dans toutes les équations d’évolution du fluide.

### Analyse dimensionnelle

Les dimensions des différents paramètres précédents sont

$$[v] = L \cdot T^{-1} \quad [\eta] = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$$

$$[D] = L \quad [\rho] = M \cdot L^{-3}$$

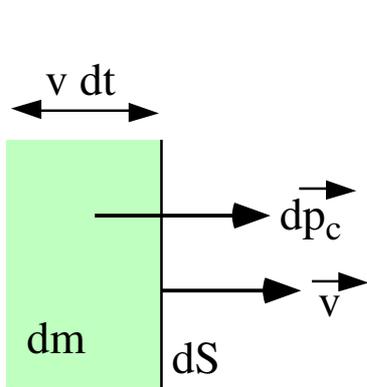
$Re = \frac{\rho v D}{\eta}$  est la seule grandeur sans dimension que l’on peut former à partir des paramètres précédents.

Pour  $Re \leq 1$  l’écoulement est laminaire. Pour  $Re \gg 1$ , l’écoulement est turbulent. L’écoulement peut être laminaire pour  $Re \simeq 1 - 2000$  dans le cas où la vitesse est contrainte à avoir une direction déterminée (dans un tuyau, par exemple)

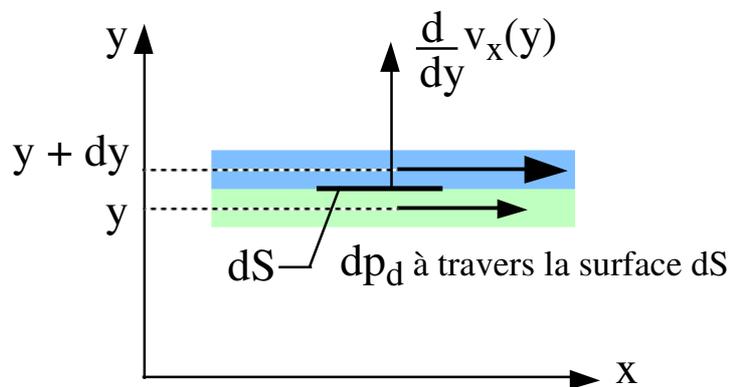
## Interprétation du nombre de Reynolds

Rappelons d'abord que dans un fluide en mouvement, un élément de fluide de masse  $dm$  traversant une surface  $dS$  à la vitesse  $v$  pendant  $dt$  transfère de proche en proche au fluide une quantité de mouvement : ce transfert est appelé transfert convectif de quantité de mouvement et vaut :

$$dp_C = v dm = v \underbrace{\rho v dS dt}_{= dm} = \rho v^2 dS dt$$



Transfert convectif de  $\vec{p}$



Transfert par diffusion de  $\vec{p}$

D'autre part, comme nous l'avons vu, dans un fluide visqueux, les couches de fluide rapides entraînent les couches lentes : il y a là aussi un transfert de quantité de mouvement, mais lié à la viscosité. On appelle en Physique ce transfert le transfert par "diffusion", car du point de vue microscopique, c'est le passage des molécules d'une couche à l'autre qui en est à l'origine.

Nous avons vu que la force de frottement visqueux est de

$$dF = \eta \frac{dv}{dy} dS \quad \text{pour une surface } dS. \quad \text{On peut estimer l'ordre de grandeur de } \frac{dv}{dy} \text{ par } \frac{v}{L} \text{ où } L \text{ est une distance caractéristique normale à la direction de l'écoulement. Comme le transfert de quantité de mouvement par "diffusion" est } dp_D = dF dt = \underbrace{\frac{\eta v}{L}}_{= dF} dS dt .$$

## Écoulements laminaires et turbulents

Le nombre de Reynolds est défini comme étant le rapport du transfert de quantité de mouvement par convection et du transfert de quantité de mouvement par diffusion.

$$Re = \frac{p_C}{p_D} = \frac{(\rho v^2)}{\left(\frac{\eta v}{L}\right)} = \frac{\rho L v}{\eta}$$

nombre de Reynolds faible $Re \ll 1 \Leftrightarrow p_D \gg p_C$	nombre de Reynolds élevé $Re \gg 1 \Leftrightarrow p_D \ll p_C$
prédominance des transferts de quantité de mouvement par <b>diffusion</b> L'écoulement est plutôt laminaire On peut définir des veines de fluide	prédominance des transferts de quantité de mouvement par <b>convection</b> L'écoulement est plutôt turbulent On ne peut plus définir de veines de fluide

La définition du nombre de Reynold contient une ambiguïté dans la définition de la longueur caractéristique de l'écoulement  $L$  : cette longueur est, par exemple, le diamètre ou le rayon de la conduite, la distance entre deux plans où l'on force le liquide.

**Point de contrôle** Deux sphères sont lâchées dans un bassin dont les dimensions sont très grandes par rapport aux dimensions des sphères.

- a) Comment définiriez-vous la "longueur caractéristique"  $L$  de l'écoulement.
- b) L'une des sphères est proche d'une paroi fixe. Quelle est la sphère qui a la plus grande vitesse ?



# Physique Générale

## ELECTROSTATIQUE

TRAN Minh Tâm

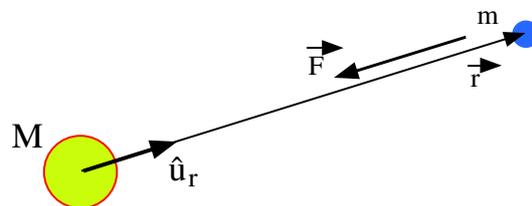
### Table des matières

<b>L'électrostatique</b>	<b>150</b>
Parallèle entre la force de gravitation et la force électrostatique . . . . .	150
Le champ électrique . . . . .	153
Dans un champ électrique . . . . .	157
La loi de Gauss . . . . .	160
Le potentiel électrique . . . . .	165
Le potentiel électrique dans quelques circonstances . . . . .	167

## Parallèle entre la force de gravitation et la force électrostatique

Par sa présence, une masse  $M$  est la cause d'une force de gravitation agissant sur une autre masse  $m$  :  $M$  est donc la source de l'interaction gravifique, tout comme l'est la masse  $m$ , par la 3<sup>ème</sup> loi de Newton.

$$\vec{F}_{grav} = -G \frac{m M}{r^2} \hat{u}_r \quad \hat{u}_r \text{ est le vecteur unité selon } \vec{r}$$

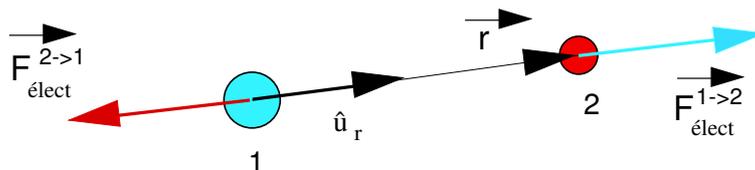


La force électrostatique possède des caractéristiques similaires : la cause de la force est ici des charges, dont l'unité est le Coulomb (C), et la force varie également en  $r^{-2}$ . La similitude s'arrête ici. Contrairement à la force de gravitation, la force électrostatique peut être attractive ou répulsive ; pour deux charges placées dans le vide cette force s'écrit :

$$\vec{F}_{élect}^{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{élect}^{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u}_r \quad \hat{u}_r \text{ est le vecteur unité selon } \vec{r}$$

Force de Coulomb entre deux charges statiques (1784)

Charles Augustin de Coulomb (1736 - 1806)



Dans l'expression précédente,  $\epsilon_0$  est la *permittivité du vide*, est empirique et est une constante universelle  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2$ .

## L'électrostatique

La charge électrique apparaissant dans la loi de Coulomb est une grandeur quantifiée : en effet, pour les particules que nous avons pu isoler, la charge apparaît toujours comme multiple entier de la charge de l'électron

$$q = n \cdot e \quad e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad n \text{ entier}$$

Depuis les années 1960, on pense que les particules soumises à l'interaction forte [*l'interaction forte* est celle qui assure la cohésion du noyau atomique] sont composés de 2 ou 3 **quarks** et ces quarks sont de charge fractionnaire, c.à.d. d'un multiple fractionnaire (et non entier) de la charge de l'électron.

Quark	Nom	Charge
u	up	$\frac{2}{3} e$
d	down	$-\frac{1}{3} e$
c	charm	$\frac{2}{3} e$
s	strange	$-\frac{1}{3} e$
t	top	$\frac{2}{3} e$
b	bottom	$-\frac{1}{3} e$

Les particules soumises à l'interaction forte, appelées **hadrons** sont les **ba-ryons** et **mésons**, les premiers sont constitués de 3 quarks et les deuxièmes d'un quark et d'un anti-quark ; voici quelques particules et leur composition en quarks :

Classe de hadron	Nom	Association de quark
Mésons	Pion $\pi^+$	$u\bar{d}$
	Kaon $K^+$	$u\bar{d}$
	$D^+$	$c\bar{d}$
	$J/\psi$	$c\bar{c}$
	$B_d^0$	$b\bar{d}$
Baryons	proton	$uud$
	antiproton	$\bar{u}\bar{u}\bar{d}$
	neutron	$udd$
	Lambda $\Lambda$	$uds$
	Omega $\Omega^-$	$sss$

## L'électrostatique

Dans le système SI, ce n'est pas la charge qui est une grandeur fondamentale, mais le courant ; si un courant  $i$  passe dans un conducteur pendant un instant  $\Delta t$ , il véhicule une charge de  $\Delta q = i \Delta t$ . Nous reviendrons sur la définition de l'intensité du courant. L'unité de charge est le **Coulomb C**.

La **charge électrique est strictement conservée**, quelque soit le processus envisagé.

**Point de contrôle** Initialement, la sphère A porte une charge de  $-50 e$ , et la sphère B une charge de  $+20 e$ . Les sphères sont conductrices et ont les mêmes dimensions. Si les sphères se touchent, quelle est la charge que portera la sphère A ?

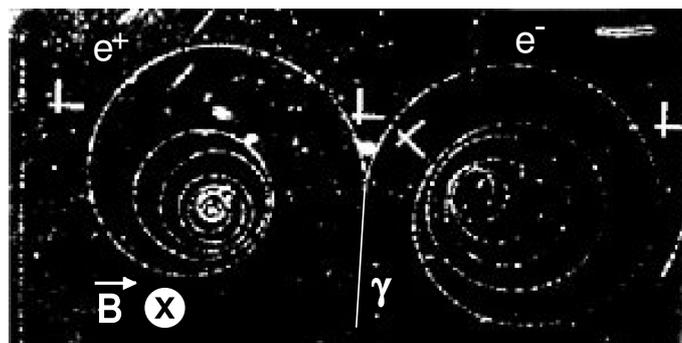
### Exemples

1. La désintégration radioactive de l'Uranium 238  $U^{238}$ . Cet isotope de l'uranium constitue la majeure partie ( $> 99\%$ ) de l'Uranium naturel, il se désintègre en émettant une particule  $\alpha$ , noyau de l'atome d'Hélium, et en se transformant en Thorium  $Th^{234}$ .



Le noyau d'Uranium contient 92 protons, sa charge est donc  $92 e$ , le noyau de Thorium contient 90 protons et celui de l'Hélium 2 protons. La charge est donc conservée.

2. Quand un photon  $\gamma$  de haute énergie ( $E_\gamma > 1,2 \text{ MeV}$ ) passe dans de la matière, plus précisément près d'un noyau atomique, il se matérialise en un électron et un positon, l'anti-particule de l'électron :  $\gamma \rightarrow e^- + e^+$



## Le champ électrique

Fixons une charge positive  $q_1$  en une position donnée, et amenons une deuxième charge positive  $q_2$  à proximité. Nous savons que  $q_1$  exerce une force répulsive sur  $q_2$  dont nous pouvons déterminer la direction et le module. Mais, puisque les deux charges ne se touchent pas, comment  $q_1$  peut-il “exercer une force” sur  $q_2$  ?

A cette question sur une *action à distance*, la réponse est de dire que  $q_1$  génère autour de lui un **champ électrique**. A chaque point de l'espace ce champ électrique a une direction et un module qui dépend de la distance à la charge  $q_1$ .

Une autre question sur l'action à distance : si nous déplaçons la charge  $q_1$ , par exemple vers  $q_2$ , nous savons que la force répulsive augmente en module, mais est-ce que ce changement du champ électrique (donc, de la force répulsive) est-il instantané ? La réponse est **non**, l'information sur le mouvement de  $q_1$  s'étend autour de cette charge dans toutes les directions sous forme d'une onde électromagnétique se propageant à la vitesse de la lumière.

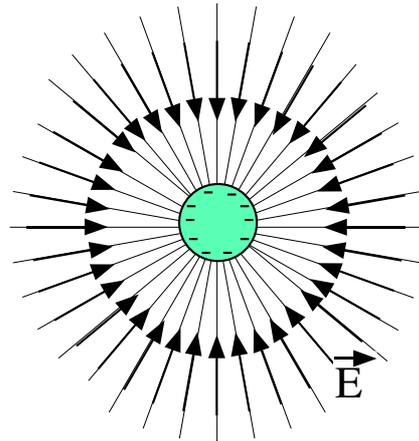
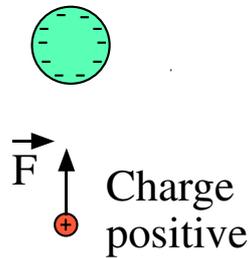
**Définition** d'un champ vectoriel : Un ensemble de vecteurs  $\vec{a}$  définis en chaque point  $\vec{r}$  d'un domaine  $\mathcal{D}$  et satisfaisant à certaines relations de continuité, constitue un **champ vectoriel**  $\vec{a}(\vec{r})$ .

Si la force exercée sur la charge  $q_2$  est de  $\vec{F}_{\text{élect}}^{1 \rightarrow 2}$ , le champ produit par  $q_1$  est de

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{\text{élect}}^{1 \rightarrow 2}}{q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{u}_r$$

et nous pouvons réécrire la force sur la charge  $q_2$  :  $\vec{F}_{\text{élect}}^{1 \rightarrow 2} = q_2 \vec{E}$

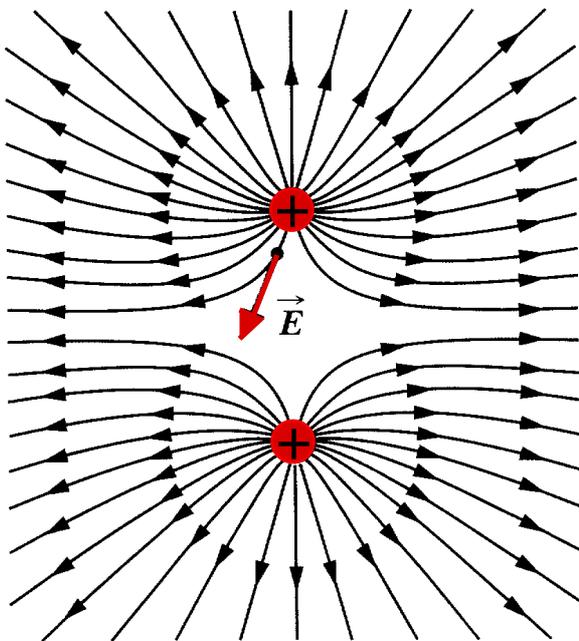
**Lignes de champ** : A partir d'un champ vectoriel  $\vec{a}(\vec{r})$ , on définit les lignes du champ comme la famille des courbes qui, en chaque point  $\vec{r}$ , sont tangentes au vecteur  $\vec{a}(\vec{r})$ .



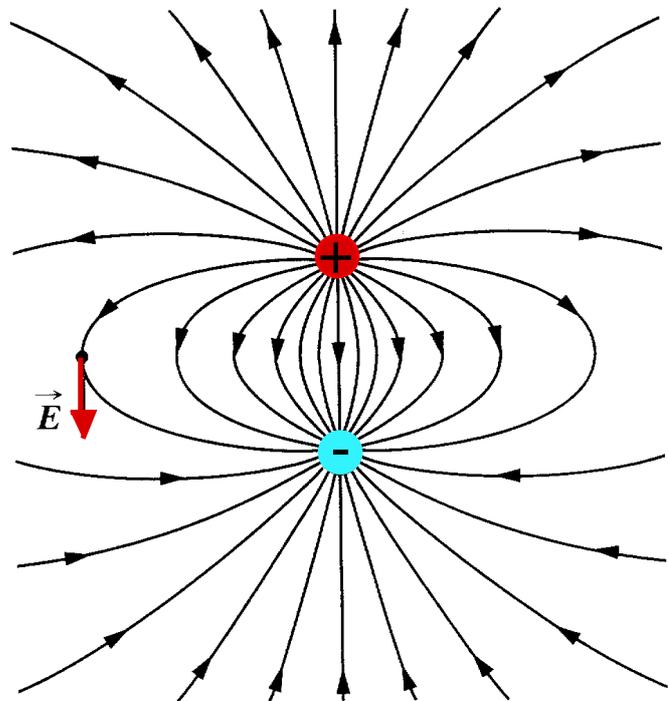
On oriente les lignes d'après l'orientation locale du champ ; ainsi,

- les lignes convergent vers une charge négative,
- elles s'éloignent d'une charge positive.

La figure suivante donne les lignes de champ de deux charges égales, fixes, de même signe (figure a)) et de signe opposés (figure b)). Cette dernière configuration est celle d'un **dipôle électrique**.

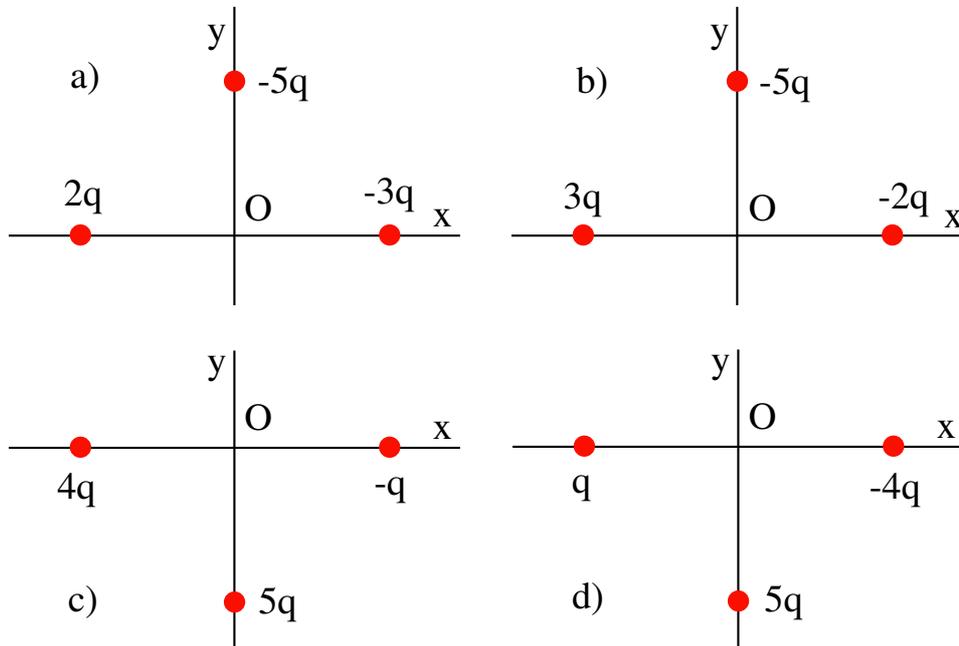


a)



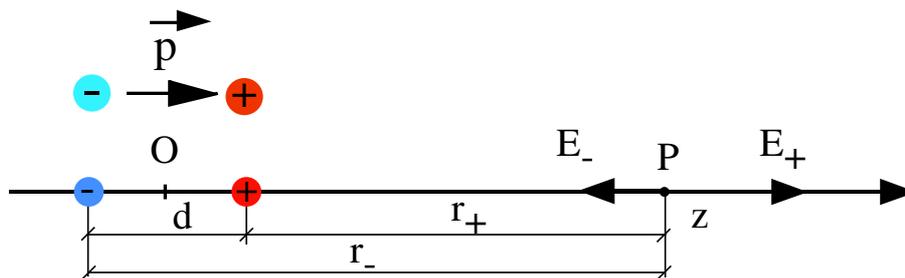
b)

**Point de contrôle** La figure ci-dessous montre 4 situations où des charges sont placées à égales distances de l'origine. Classez ces situations selon l'importance du module du champ  $\vec{E}$  à l'origine  $O$ .



### Champ électrique d'un dipôle

Le dipôle que nous considérons est constitué de deux charges  $\pm q$  placées à une distance  $d$  l'une de l'autre. Calculons le champ électrique que ce dipôle crée en un point P sur son axe, à une distance  $z$  de son centre :



Pour des raisons de symétrie, les champs créés par les charges  $+q$  et  $-q$  au point P, ainsi que le champ résultant doivent être sur l'axe  $Oz$ .

$$E = E_+ - E_- = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r_+^2} - \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r_-^2}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (z - \frac{1}{2}d)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (z + \frac{1}{2}d)^2}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left[ \left(1 - \frac{d}{2z}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{d}{2z}\right)^{-2} \right]$$

En général, nous nous intéressons au champ électrique du dipôle pour des distances  $z$  grandes par rapport aux dimensions du dipôle :  $z \gg d \Rightarrow d/2z \ll 1$ . En faisant un développement limité de l'expression entre crochets avec la relation

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots \quad x < 1$$

$$\left[ \left(1 + \frac{2d}{2z(1!)} + \dots\right) - \left(1 - \frac{2d}{2z(1!)} + \dots\right) \right]$$

Ainsi, le champ électrique du dipôle devient :

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left[ \left(1 + \frac{d}{z} + \dots\right) - \left(1 - \frac{d}{z} + \dots\right) \right]$$

A grandes distances, les termes symbolisés par les points de suspension deviennent de plus en plus petits et nous pouvons les négliger ;

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \frac{2d}{z} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qd}{z^3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3} \quad \text{dipôle électrique}$$

Le produit  $p = qd$  est le module du vecteur **moment dipolaire électrique**  $\vec{p} = q\vec{d}$ . Son unité est le Coulomb.mètre. Le sens de  $\vec{p}$ , comme celui de  $\vec{d}$ , est pris de la charge négative à la charge positive.

Nous avons fait le calcul du champ du dipôle en un point situé sur l'axe du dipôle ; on peut montrer que le module du champ varie aussi en  $r^{-3}$ , pour un point quelconque à une distance  $r$  du centre du dipôle.

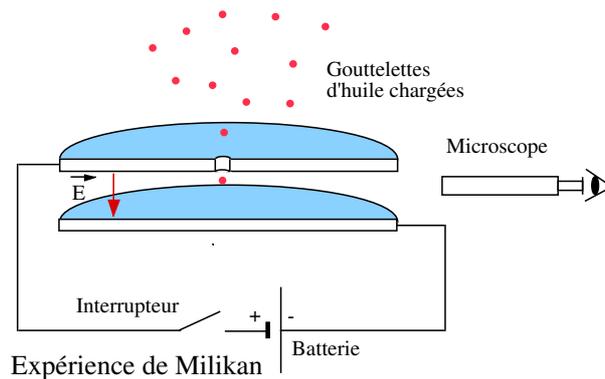
Remarquez que le champ d'un dipôle varie en  $z^{-3}$  et non comme l'inverse du carré de la distance, ce qui est le cas pour une charge ponctuelle ; la raison physique à cela est qu'à grande distance, le dipôle apparaît comme deux charges égales et opposées qui coïncident presque : à grande distance, leur champ électrique s'annulent rapidement.

## Dans un champ électrique

Nous nous intéressons ici à l'effet d'un champ électrique sur le mouvement des charges ; l'origine de ce champ ne sera pas abordé maintenant.

### La mesure de la charge électrique : expérience de Millikan

La force de électrostatique  $\vec{F}_{\text{élect}} = q \vec{E}$  permet de décrire le mouvement d'une charge  $q$  dans l'expérience (1910 - 1913) de Robert Millikan :



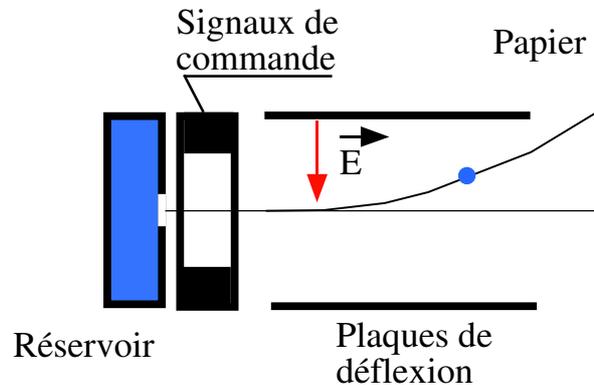
De petites gouttes d'huile sont dispersées dans une chambre ; dans ce processus, elles deviennent chargées, positivement ou négativement. Certaines de ces gouttelettes passent par le trou de la plaque supérieure du dessin. Supposons que la gouttelette soit chargée négativement. Si nous connectons maintenant le plaque supérieure au pôle + d'une batterie et la plaque inférieure au pôle -, il y aura un excès de charges positives sur la plaque supérieure et un excès de charges négatives sur la plaque inférieure : un champ électrique dirigé vers le bas est créé. Si la charge est négative, elle subira une force dirigée vers le haut. Connaissant la masse spécifique de l'huile, en mesurant la position de la goutte en fonction du temps, on peut déterminer la force électrostatique exercée sur elle et, connaissant le champ  $\vec{E}$ , déterminer la charge qu'elle porte.

Millikan trouve que la charge est quantifiée

$$q = n e \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad e = 1,602 \cdot 10^{19} \text{ C}$$

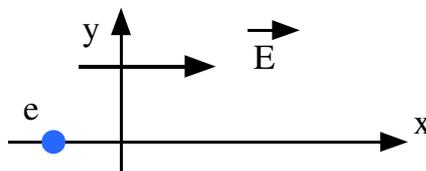
## Imprimante à jet d'encre

Le besoin d'une impression plus précise que celle délivrée par les imprimantes à matrice a conduit à la conception des imprimantes à jet d'encre dont le principe est donné sur la figure ci-après :



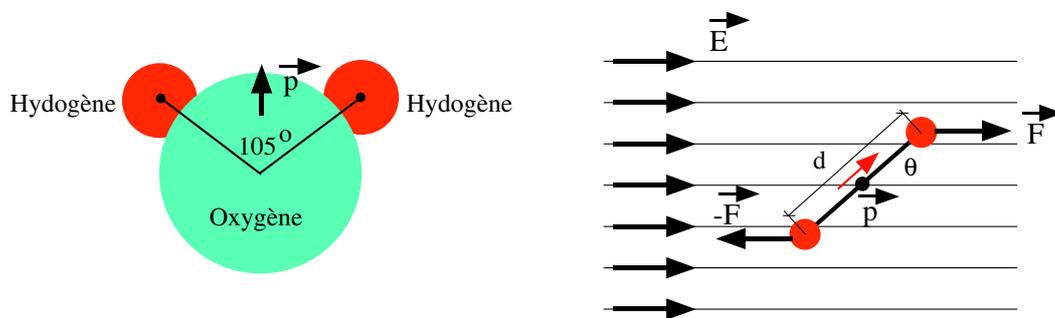
Sur la figure, la gouttelette d'encre est extraite du réservoir et reçoit une charge électrique au travers de la deuxième unité dessinée. L'ordinateur contrôle la charge distribuée à la goutte et ainsi sa déflexion au travers du champ  $\vec{E}$ , c.à.d. son impact sur la feuille. Environ 100 gouttelettes sont nécessaires pour former un caractère.

**Point de contrôle** a) Sur la figure ci-dessous, quelle est la direction de la force électrostatique sur l'électron due au champ électrique dessiné? b) Dans quelle direction l'électron sera-t-il accéléré? c) Si l'électron se déplaçait initialement vers la droite, sa vitesse augmentera-t-elle, diminuera-t-elle ou restera-t-elle constante?



## Un dipôle dans un champ électrique

Nous avons défini le dipôle électrique  $\vec{p} = q \vec{d}$ . La molécule d'eau est ainsi un dipôle typique; en effet, les deux atomes d'hydrogène de la molécule ne sont pas alignés avec le centre de l'atome d'oxygène, mais forment un angle de  $105^\circ$ . La molécule a ainsi nettement un "côté oxygène" et un "côté hydrogène"; de plus, les 10 électrons disponibles se mettent plutôt autour du noyau d'oxygène, donnant ainsi au côté oxygène une charge légèrement plus négative que le côté hydrogène et créant ainsi un dipôle dessiné sur la figure.



Dans un champ électrique uniforme, sur les charges  $\pm q$  d'un dipôle rigide s'exercent des forces égales et opposées donnant lieu à un couple  $\vec{\tau}$  dont le module est :  $|\vec{\tau}| = F x \sin \theta + F (d - x) \sin \theta = F d \sin \theta = p E \sin \theta$   $x$  étant la distance entre le centre de masse du dipôle et l'une des charges. Plus généralement, sous forme vectorielle :

$$\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

Sous l'effet de ce couple, le dipôle s'aligne dans la direction du champ  $\vec{E}$ . Si nous avons de nombreux dipôles, ceux-ci s'alignent selon les lignes du champ  $\vec{E}$ , concrétisant ainsi les lignes de champ du champ  $\vec{E}$ .

## La loi de Gauss

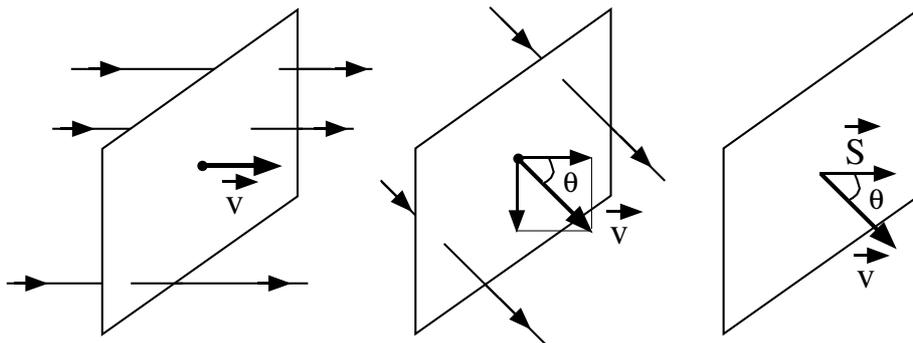
Nous allons relier le champ électrique  $\vec{E}$  en des points d'une **surface fermée** aux charges qu'entoure cette surface.

### Le Flux

Rappel Le débit de volume d'un fluide au travers d'une surface plane dépend de l'angle que fait la vitesse avec la normale à cette surface :

$$\Phi = v S \cos \theta = \vec{v} \cdot \vec{S}$$

si nous définissons  $\vec{S}$  comme un vecteur normal à la surface et dont le module est égal à la surface.

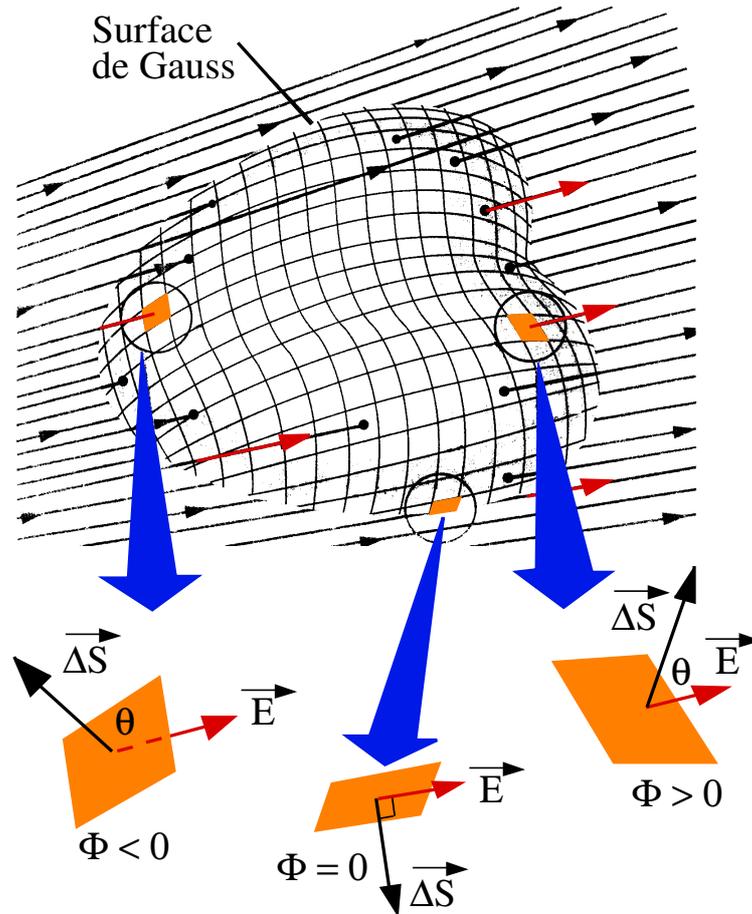


Nous pouvons généraliser cette définition du flux à n'importe quel grandeur vectorielle et à une surface quelconque.

### Flux d'un champ électrique à travers une surface fermée

Considérons la situation représentée sur la figure ci-après : la surface fermée est arbitraire et le champ électrique n'est pas uniforme. Nous pouvons diviser la surface en carrés suffisamment petits pour être considérés comme plan et pour que le champ  $\vec{E}$  y soit constant. L'élément de surface  $\Delta\vec{S}$  est perpendiculaire à la surface et est orienté vers l'extérieur. Le flux est alors :

$$\Phi = \sum \vec{E} \cdot \Delta\vec{S}$$



En prenant des carrés infiniment petits, on obtient pour le flux

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

On trouve, pour cette sommation sur la surface, la notation avec la double intégrale qui montre qu'une surface dépend de deux variables indépendantes.

## Le Théorème de Gauss

Ce théorème relie le flux  $\Phi$  d'un champ électrique au travers une surface fermée (ou surface de Gauss) à la charge nette enfermée dans la surface :

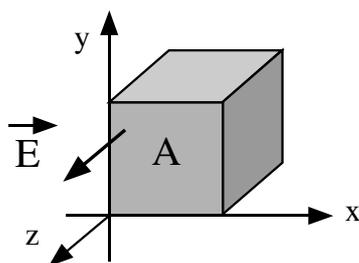
$$\epsilon_0 \Phi = \epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{renfermée}$$

Loi de Gauss et loi de Coulomb Nous retrouvons la définition du champ électrique créé par une charge  $q$  (loi de Coulomb) en prenant une surface

de Gauss sphérique contenant notre charge  $q$  en son centre :

$$\epsilon_0 \Phi = \epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 E (4\pi r^2) = q \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

**Point de contrôle** La figure ci-après montre un cube dont les faces ont une superficie  $A$  ; le cube est immergé dans un champ électrique  $\vec{E}$  dirigé selon la direction  $Oz$ . En fonction de  $E$  et de  $A$ , quel est le flux de  $\vec{E}$  à travers la face avant du cube ? à travers la face arrière ? à travers la face supérieure ? à travers tout le cube ?



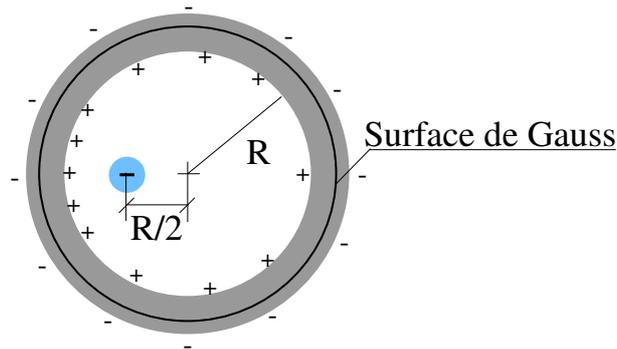
**Point de contrôle** Un flux net  $\Phi_i$  du champ électrique est observé au travers d'une sphère de rayon  $r$  entourant une particule chargée. Supposons que cette surface de Gauss soit changée en **a)** une plus grosse sphère, **b)** un cube de côté  $r$ , **c)** un cube de côté  $2r$ . Dans chacun de ces cas, le flux net sera-t-il plus grand, plus petit ou égal à  $\Phi_i$  ?

## Applications de la loi de Gauss

### 1) Une charge dans une coquille sphérique métallique

Une charge ponctuelle de  $-5 \times 10^{-6} C$  est placée dans une coquille sphérique en métal à une distance de  $R/2$  du centre de la sphère. Si la coquille était électriquement neutre au départ, quelles sont les charges positives et négatives sur elle ? Ces charges sont-elles uniformément réparties ?

Idée principale Dans un conducteur, les porteurs de charge (les électrons) sont libres de se mouvoir ; par conséquent, le champ électrique y est nul ; en effet, s'il n'était pas nul, les électrons auraient un mouvement d'ensemble net, ce qui serait contraire à notre hypothèse de départ qui était l'électrostatique.



Choisissons la surface de Gauss figurée sur le dessin : c'est une sphère concentrique à la coquille et dont le rayon est comprise entre le rayon intérieur et le rayon extérieur. Cette sphère est donc dans le conducteur. Comme le champ dans le conducteur est nul, par le Théorème de Gauss, la charge que la sphère renferme doit être aussi nulle : avec une charge de  $-5 \times 10^{-6}C$  à l'intérieur, on doit donc avoir une charge de  $+5 \times 10^{-6}C$  sur la surface intérieure de la coquille. Ces charges ne sont pas réparties uniformément sur la surface intérieure, mais sont davantage concentrées près de la charge de  $-5 \times 10^{-6}C$ . Si cette dernière avait été centrée, la distribution des charges positives aurait été symétrique.

Puisque la coquille était électriquement neutre au départ, la charge de  $+5 \times 10^{-6}C$  sur la surface intérieure doit être compensée par une charge de  $-5 \times 10^{-6}C$  sur la surface extérieure de la coquille. Comme le champ **dans** la coquille est nul, la distribution des charges sur la surface intérieure ne peut pas influencer sur celle de la surface extérieure : cette dernière est ainsi uniforme.

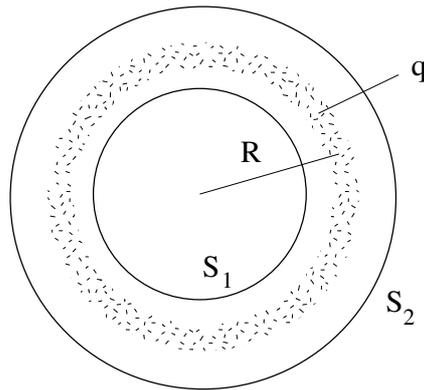
Une autre manière de voir aurait été de dire que la charge négative de  $-5 \times 10^{-6}C$  repousse le nombre d'électrons correspondant à sa charge aussi loin que ces derniers peuvent aller, c.à.d. à la surface extérieure, laissant une charge résiduelle de  $+5 \times 10^{-6}C$  sur la surface intérieure. Sur la surface extérieure, puisque les charges intérieures ne produisent pas de champ  $\vec{E}$  au travers du métal, les charges négatives se repoussent aussi loin qu'elles peuvent aller, d'où une distribution uniforme.

**Point de contrôle** Une boule portant une charge de  $-50e$  est placée au centre d'une coquille sphérique métallique qui portait initialement une charge de  $-100e$ . Quelle est la charge sur **a)** la surface intérieure de la coquille, **b)** la surface

extérieure de la coquille ?

## 2) Coquille sphérique uniformément chargée

Une coquille sphérique mince, de rayon  $R$ , est uniformément chargée avec une charge totale  $q$ . Utilisons le Théorème de Gauss pour calculer le champ électrique que cette distribution de charges génère.



Pour la surface de Gauss  $S_2$  où  $r \geq R$  :

$$\epsilon_0 \Phi = \epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 E (4\pi r^2) = q \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r \geq R)$$

*Une coquille uniformément chargée attire ou repousse une particule chargée comme si toute la charge était concentrée en son centre.*

La surface de Gauss  $S_1$  où  $r < R$  ne renferme aucune charge, donc

$$E = 0 \quad (r \leq R)$$

*Une coquille uniformément chargée n'exerce aucune force électrostatique sur une particule chargée placée à l'intérieur de la coquille.*

## Le potentiel électrique

### Travail de la force électrostatique

Comme pour la gravitation, la force électrostatique “travaille” et, par le Théorème de l'énergie cinétique, fait varier l'énergie cinétique (donc la vitesse) de la particule chargée qui lui est soumise.

$$W_{12} = E_2^{cin} - E_1^{cin} = \int_1^2 \vec{F}_{élect} \cdot d\vec{r}$$

Comme *a priori* il n'y a aucune relation entre la force et la vitesse de la particule, le travail entre les points 1 et 2 de  $\vec{F}_{élect}$  n'est pas nul.

Les expressions de la force de gravitation et de la force de Coulomb sont mathématiquement identiques :

$$\vec{F}_{grav} = -G \frac{m M}{r^2} \hat{u}_r \quad \vec{F}_{élect}^{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u}_r$$

Les caractéristiques générales que nous avons vues pour la force de gravitation doivent par conséquent se retrouver pour la force électrostatique.

En particulier, nous pouvons affirmer que la force électrostatique est une *force conservative*. Ainsi, lorsque une force électrostatique s'exerce entre deux ou plus de charges, nous pouvons définir une **énergie potentielle électrique U** associée au système. Si ce système change d'une configuration initiale 1 à une configuration finale 2, la force électrostatique produit un travail  $W$  sur les charges. Avec le développement que nous avons fait au paragraphe sur la “Dynamique de la Particule”, nous savons que l'énergie potentielle électrique du système change de  $\Delta U = U_2 - U_1 = -W_{12}$ .

Exemple simple : Des électrons sont continuellement arrachés des atomes par le rayonnement cosmique; une fois détaché de l'atome, l'électron subit un champ électrique due à la présence d'autres charges sur la Terre, ce champ vaut, près de la surface de la Terre 150 N/C et est dirigé vers la Terre. Quelle est la variation de l'énergie potentielle électrique d'un électron s'il parcourt une distance  $d = 520$  m ?

## L'électrostatique

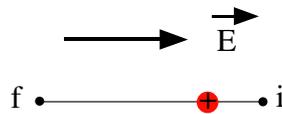
Le travail de la force électrostatique est :

$$W = \vec{F}_{\text{élect}} \cdot \vec{d} = q \vec{E} \cdot \vec{d} = q E d \cos \pi = -1,6 \times 10^{-19} \cdot 150 \times 520 \cos \pi = 1,2 \times 10^{-14} \text{ J}$$

L'énergie potentielle électrique de l'électron aura diminué de

$$\Delta U = -W = -1,2 \times 10^{-14} \text{ J}$$

**Point de contrôle** Un proton se déplace du point  $i$  au point  $f$  dans un champ électrique uniforme dessiné sur la figure ci-après. **a)** Le champ électrique produit-il sur le proton un travail positif ou négatif? **b)** L'énergie potentielle électrique du proton augmente-t-elle ou diminue-t-elle?



## Le Potentiel électrique

Nous venons de voir que l'énergie potentielle électrique d'une particule chargée dans un champ électrostatique dépend de la charge; on définit le **potentiel électrique  $V$**  comme l'énergie potentielle électrique pour une charge unité : ce potentiel électrique est indépendant de la charge et ne dépend que des caractéristiques du champ  $\vec{E}$  au point considéré. Nous avons donc :

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{\Delta U}{q} = -\frac{W}{q}$$

On prend comme convention  $V_1 = 0$  pour un point initial à l'infini.

Les unités L'unité du potentiel électrique est le **Volt** ; la dernière équation en donne l'équivalence dans le système SI : 1 Volt = 1 Joule par Coulomb.

**L'électron-Volt** est l'énergie que gagne 1 électron (ou une particule portant une charge unité) en traversant une différence de potentiel de 1 Volt. Par conséquent :

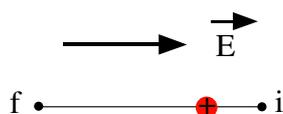
$$1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ Joule}$$

Nous déduisons aussi l'unité du champ électrique (déjà exprimé en N/C

d'après la loi de Coulomb) des relations  $\Delta V = -\frac{W}{q} = -\frac{q \vec{E} \cdot \vec{d}}{q}$

unité de E = Volt / m

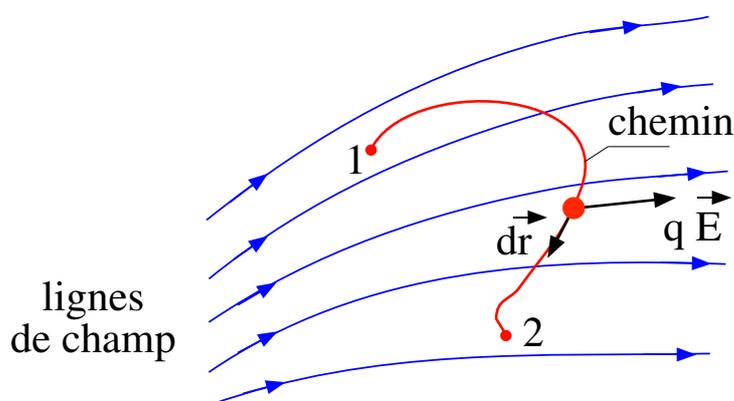
**Point de contrôle** Nous déplaçons un proton du point  $i$  au point  $f$  dans un champ électrique uniforme dessiné sur la figure ci-après. **a) Notre** force produit-elle un travail positif ou négatif? **b)** Le proton se déplace-t-il vers un point où le potentiel électrique est plus haut ou plus bas?



### Le potentiel électrique dans quelques circonstances

Considérons un champ électrique quelconque représenté par les lignes de champ dessinées sur la figure ci-après et une charge positive  $q$  qui se meut sur le chemin indiqué, du point 1 au point 2. La force électrostatique exercée sur la charge est de  $\vec{F}_{\text{élect}} = q \vec{E}$  et le travail produit par cette force sur le chemin  $1 \rightarrow 2$  est de :

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{élect}} \cdot d\vec{r} = q \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r}$$



En substituant cette expression dans la relation liant l'énergie potentielle et le travail d'une *force conservative* et en utilisant la définition du potentiel

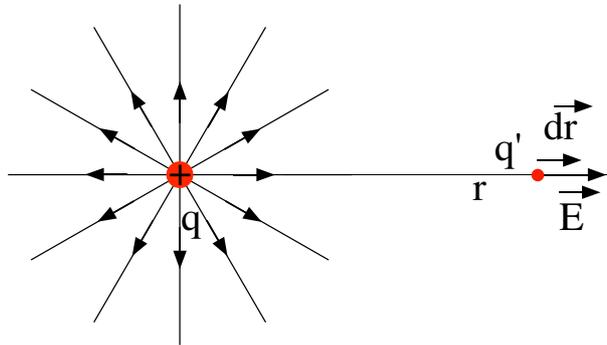
électrique (page précédente) , nous obtenons :

$$V_2 - V_1 = -\frac{W_{12}}{q} = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Nous pouvons calculer explicitement cette différence de potentiel pour quelques cas où, par exemple, la symétrie du problème peut nous aider.

### Potentiel du à une charge ponctuelle

A cause de la symétrie du problème et du fait que le chemin d'intégration n'a pas d'importance, nous choisissons le chemin le plus simple : une droite passant par la charge  $q$  que nous considérons placée à l'origine. Considérons le chemin allant du point en  $r$  sur la droite et aboutissant à l'infini.



$$V_2 - V_1 = -\int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_r^\infty E dr$$

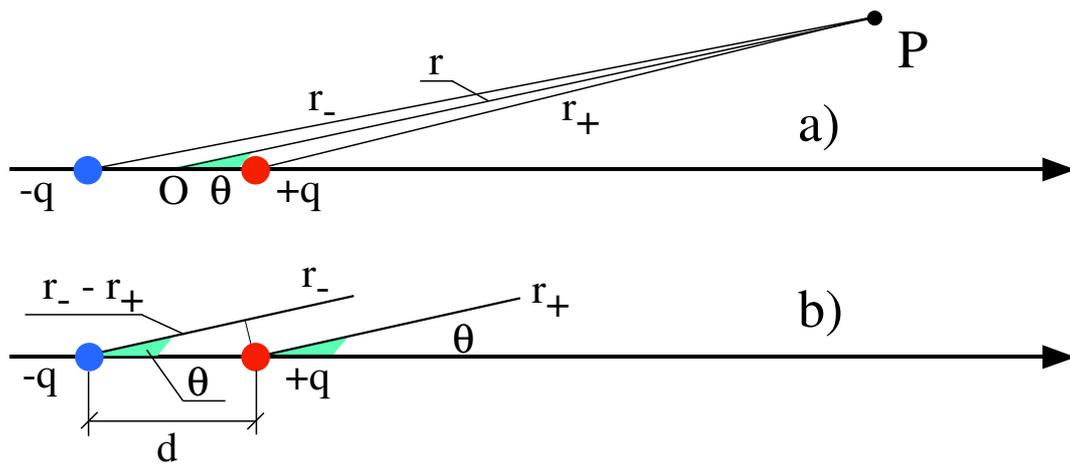
Le potentiel à l'infini est, par convention, pris comme étant nul. Il vient donc :

$$0 - V = -\int_r^\infty E dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_r^\infty = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Donc :  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ . Remarquez que le potentiel dépend du signe de la charge  $q$  considérée.

### Potentiel du à un dipôle électrique

Comme dans la définition du potentiel électrique toutes les opérations sont linéaires et que le champ électrique produit par deux charges est la somme



des champs individuels, nous pouvons écrire le potentiel produit en un point  $P$  par les deux charges  $\pm q$  du dipôle :

$$V = V_{(+)} + V_{(-)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_+} + \frac{-q}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_- r_+}$$

Dans la pratique, les dimensions du dipôle sont petites (voir par exemple la molécule d'eau), et nous étudions le potentiel en un point  $P$  très éloigné et situé à angle  $\theta$  de l'axe du dipôle ; les approximations suivantes sont donc possibles :

$$r_- - r_+ \approx d \cos \theta \quad r_- r_+ \approx r^2$$

Donc, en reprenant la définition du moment dipolaire électrique  $\vec{p} = q \vec{d}$ ,

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

Remarquez encore ici que le potentiel du dipôle électrique décroît comme  $r^{-2}$  et non comme  $r^{-1}$  comme le fait le potentiel d'une charge ponctuelle. La raison est la même que celle donnée pour le champ d'un dipôle.

**Point de contrôle** Considérons 3 points situés à des distances  $r$  égales (et grandes) du centre du dipôle ; le point  $a$  est situé sur l'axe du dipôle du côté de la charge positive, le point  $b$  est également sur l'axe mais du côté de la charge négative et le point  $c$  est situé sur la médiatrice du dipôle. Classez ces points selon le potentiel électrique qu'y crée le dipôle.

**Calcul du champ électrique à partir du potentiel**

Nous avons vu comment le potentiel se déduit du champ électrique :

$$\Delta V = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Retrouver le champ connaissant le potentiel demande une connaissance mathématique un peu au delà de ce cours. Nous pouvons cependant résoudre ce problème pour un cas très particulier, celui d'un champ électrique parallèle à une direction unique donnée, par exemple la direction  $Oz$  défini par le vecteur unité  $\vec{k}$ . Dans ce cas,

$$E \vec{k} = - \frac{dV}{dz} \vec{k}$$

# Physique Générale

## MAGNETISME

TRAN Minh Tâm

### Table des matières

<b>La magnétostatique</b>	<b>171</b>
Définition du champ (d'induction) magnétique . . . . .	171
Mouvement dans un champ magnétique . . . . .	172
Action d'un champ magnétique sur un fil parcouru par un courant .	178
Action d'un champ magnétique sur une boucle de courant . . . . .	179
Calcul des champs magnétiques produits par des courants : la loi d'Ampère . . . . .	181
Applications de la loi d'Ampère . . . . .	182
Définition légale de l'ampère . . . . .	186
Ce qui n'a pas été traité . . . . .	189

## Définition du champ (d'induction) magnétique

Nous avons vu que la charge électrique crée un champ électrique autour d'elle, champ qui influe sur les autres charges. On peut ainsi penser qu'il existe des *charges magnétiques* qui, de la même manière créerait un champ magnétique ; bien que ces charges magnétiques, aussi appelées *monopôles magnétiques*, soient prédits par certaines théories, on n'en a jamais détecté !

Il y a deux moyens de produire un champ magnétique :

1. laisser circuler des charges et créer ainsi un courant,
2. certaines particules comme les électrons, les protons, certains atomes (en particulier les Terres rares), ont un champ magnétique autour d'eux ; un effet dû à la Physique Quantique, permet à ces champs magnétiques de s'additionner, donnant lieu à un champ net autour de la matière : c'est le cas des aimants permanents ; pour les autres matériaux, les champs des électrons s'annulent et aucun champ net n'en résulte.

Expérimentalement, nous observons qu'une particule chargée en mouvement dans un "champ magnétique" en subissait une force. Nous pouvons faire varier la vitesse de la particule, en direction et en module.

Nous observons que, pour une direction particulière de la vitesse, la force sur la particule est nulle.

Pour toutes les autres directions, nous observons que la force  $\vec{F}_L$  est toujours proportionnelle à  $|\vec{v}| \cdot \sin \theta$ ,  $\theta$  étant l'angle entre la direction présente de la vitesse et celle pour laquelle la force est nulle. Par ailleurs, la direction de la force est toujours perpendiculaire à celle de la vitesse.

Ceci rappelle le produit vectoriel. Définissons la direction du champ magnétique  $\vec{B}$  par la direction de la vitesse pour laquelle la force est toujours nulle et le module de  $\vec{B}$  par  $|\vec{B}| = \frac{|\vec{F}_L|}{|q| |\vec{v}|}$  quand  $\vec{v}$  est perpendiculaire à la direction de  $\vec{B}$  que nous venons de définir.

$$\boxed{\vec{F}_L = q \vec{v} \wedge \vec{B}} \quad (\text{Force de Lorentz})$$

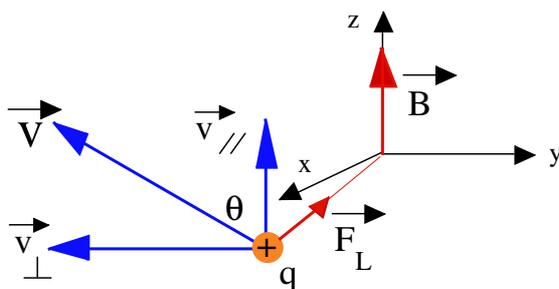
Unité de  $\vec{B}$  : L'unité de  $\vec{B}$  est le **Tesla (T)** :

$$1 \text{ Tesla} = 1 \frac{\text{Newton}}{(\text{Coulomb}) \cdot (\text{mètre} / \text{seconde})} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C} \cdot \text{m} / \text{s}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

puisque un Coulomb par seconde est égal à un Ampère.

### Mouvement dans un champ magnétique

Etudions le mouvement d'une particule de charge  $q$  et de masse  $m$  entrant dans une région où règne un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme.



Choisissons la direction de l'axe  $z$  selon le champ  $\vec{B}$  et les axes  $x$  et  $y$  d'une manière telle que nous ayons un trièdre droit. La 2<sup>ème</sup> loi de Newton, appliquée à ce problème, donne

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q \vec{v}_\perp \wedge \vec{B} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

[Si nous décomposons la vitesse en une composante parallèle au champ  $\vec{B}$  et une composante perpendiculaire, seule cette dernière contribue à cause des propriétés du produit vectoriel.]

La force de Lorentz est donc perpendiculaire à la fois à  $\vec{v}_\perp$  et à  $\vec{B}$  : elle est donc dans le plan  $xy$ .

1. Selon l'axe  $z$ , aucune force ne s'exerce sur la particule : cette dernière aura selon  $z$  un mouvement rectiligne uniforme de vitesse  $\vec{v}_\parallel$ .

2. Dans le plan  $xy$  (qui contient la composante  $\vec{v}_\perp$ ),

–  $\vec{F}_L$  est perpendiculaire à  $\vec{v}_\perp \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{v}_\perp dt = \vec{F} \cdot d\vec{r}_\perp = 0$

[nous avons noté par  $\vec{r}_\perp$  la composante dans le plan  $xy$  du vecteur position de la particule]

–  $\vec{F} \cdot d\vec{r}_\perp = 0 \Rightarrow \Delta E^{cin} = 0 \Rightarrow |\vec{v}_\perp| = \text{cst} \Rightarrow$  nous avons un mouvement circulaire uniforme dans le plan  $xy$  [dit autrement : la projection dans le plan perpendiculaire à  $\vec{B}$  du mouvement de la particule est un mouvement circulaire uniforme].

– L'accélération, dans le plan  $xy$  est radiale et vaut  $a_r = \frac{v_\perp^2}{r}$ .

– En utilisant la 2<sup>ème</sup> loi de Newton, nous avons

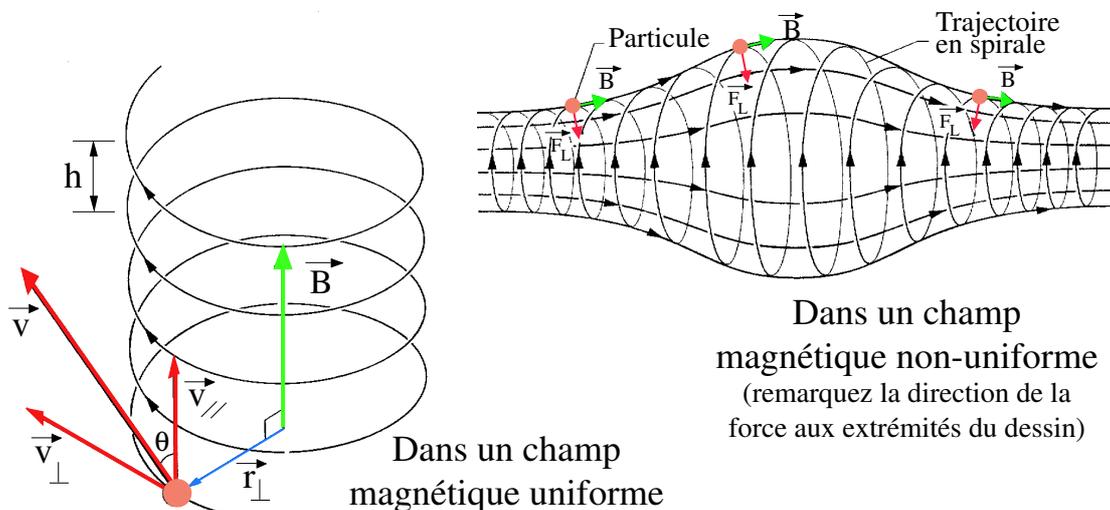
$$q v_\perp B = \frac{m v_\perp^2}{r} \Rightarrow r = \frac{m v_\perp}{q B} \quad (\text{rayon})$$

– Nous en déduisons encore

La période  $T = \frac{2\pi r}{v_\perp} = \frac{2\pi m}{qB}$

et la fréquence de révolution  $f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$

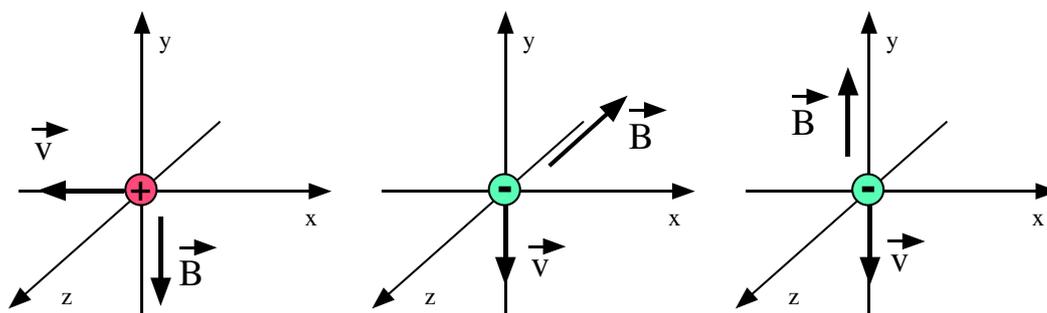
3. Le mouvement total de la particule se compose donc d'un mouvement rectiligne uniforme dans la direction de  $\vec{B}$  et d'un mouvement circulaire uniforme dans le plan perpendiculaire à  $\vec{B}$  : le mouvement est hélicoïdal et la trajectoire une hélice (cf. figure de gauche ci-après).



La figure de droite montre la trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique non-uniforme. Le resserrement des lignes de champ aux extrémités montre que le champ y devient intense. Si le module du champ est suffisamment intense, les particules peuvent être piégées dans cette *bouteille magnétique* et revenir des extrémités de la zone du champ.

Des électrons et protons sont ainsi piégés dans le champ magnétique non uniforme de la Terre et forme la *ceinture de van Allen* : les particules vont d'un pôle magnétique à l'autre en spiralant autour des lignes de champ du champ magnétique terrestre. De temps en temps, lors des périodes d'activité solaire intense, des particules de plus haute énergie sont éjectés du Soleil, sont capturées par le champ  $\vec{B}$  de la Terre, suivent en spiralant les lignes de champ et descendent dans la ionosphère (elles le peuvent car elles sont d'énergie plus élevée que celles qui sont d'ordinaire dans la ceinture de van Allen) en ionisant les atomes d'oxygène et d'azote de la haute atmosphère, créant ainsi les aurores boréales.

**Point de contrôle** La figure donne 3 situations dans lesquelles une particule chargée de vitesse  $\vec{v}$  se déplace dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ . Dans chacune des situations, donnez la direction de la force de Lorentz  $\vec{F}_L$



### Travail de la force de Lorentz

La force de Lorentz  $\vec{F}_L = q \vec{v} \wedge \vec{B}$  est perpendiculaire à la vitesse  $\vec{v}$  de la particule, par conséquent :

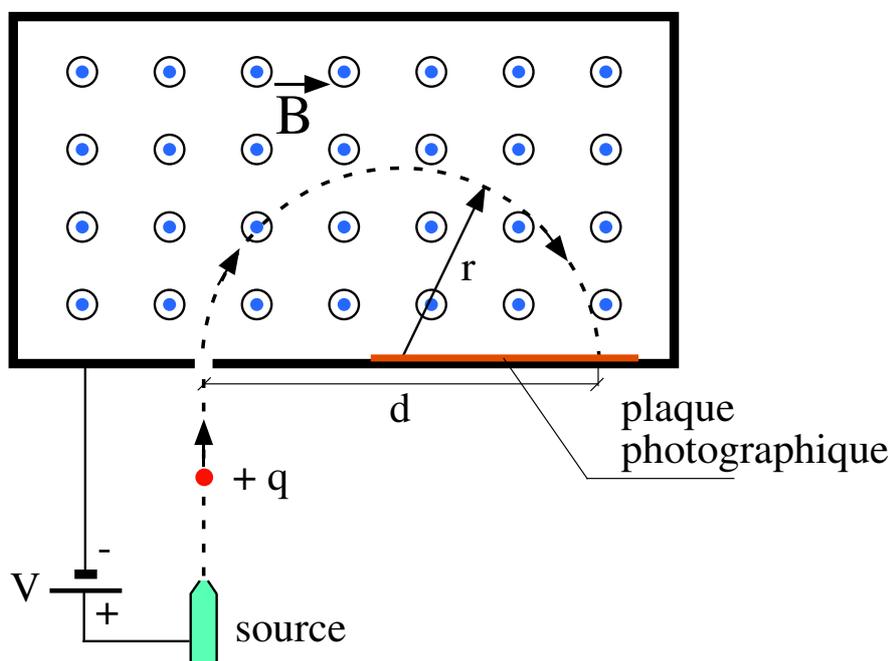
$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}_L \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \underbrace{\vec{F}_L \cdot \vec{v}}_{\vec{F}_L \perp \vec{v}} dt = 0$$

Par le Théorème de l'énergie cinétique, l'énergie cinétique d'une particule chargée soumise à la force de Lorentz demeure constante, le module de sa vitesse est aussi constant.

*La force de Lorentz ne travaille pas ! (elle ne fait pas varier l'énergie cinétique des particules).*

### Application : le spectromètre de masse

Le spectromètre de masse est utilisé pour déterminer la masse  $m$  d'un ion si on connaît sa charge  $q$ . Le schéma de principe d'un spectromètre de masse est montré sur la figure qui suit : un ion positif, après avoir été accéléré de la source par une différence de potentiel  $V$ , entre dans une chambre où règne un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ . La direction initiale de sa vitesse est perpendiculaire à celle du champ magnétique : dans la chambre, sa trajectoire est ainsi un demi-cercle de rayon  $r$  et il frappe une plaque photographique à une distance  $d$  de son point d'entrée. Nous recherchons la relation entre la masse de l'ion et la distance  $d$ , les autres paramètres de l'expérience (les valeurs des champs  $\vec{E}$  (ou de la différence de potentiel  $V$ ) et  $\vec{B}$  étant connus, comme l'est la charge  $q$  de l'ion).



Idée principale : Nous pouvons relier le rayon de la trajectoire de la particule à sa masse, sa charge et à la valeur du champ magnétique, à condition de connaître sa vitesse. Cette dernière peut être connue par le théorème de conservation de l'énergie mécanique. En effet, les ions quittent la source

à vitesse pratiquement nulle. A la fin de l'accélération, ils ont acquis une énergie cinétique de  $\frac{1}{2} m v^2$ . Leur changement d'énergie potentiel est de  $\Delta U = q(-V)$ . Donc

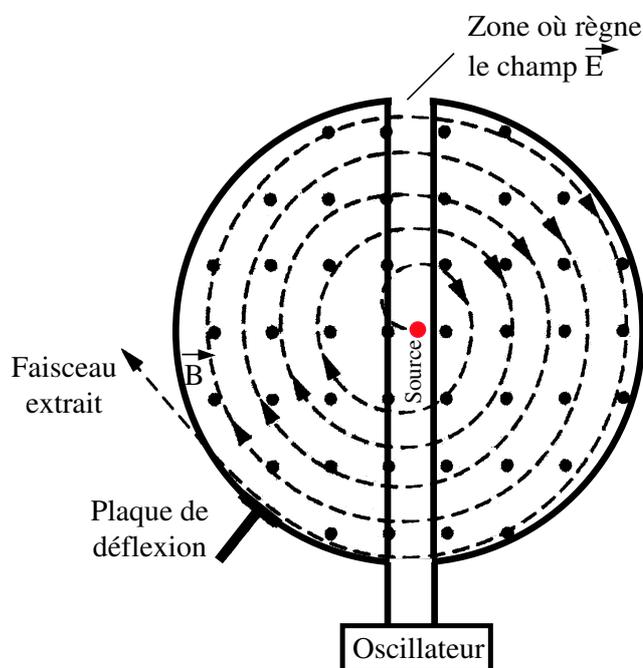
$$\Delta U = -\Delta E^{cin} \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = qV \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

L'expression du rayon de la trajectoire est donnée 2 pages avant, par conséquent :

$$r = \frac{d}{2} = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB} \sqrt{\frac{2qV}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mV}{q}}$$

### Application : le cyclotron

Le cyclotron est un accélérateur de particules, en général des protons. Ces accélérateurs de basse énergie (une cinquantaine de méga-électronvolts ( $\text{MeV} = 10^6 \text{ eV}$ )) sont essentiellement utilisés de nos jours pour la productions de sources radioactives utilisées en Médecine et en Biologie ainsi que pour le traitement de certaines tumeurs malignes.



Comme nous l'avons vu dans les paragraphes précédents, le passage des particules dans un champ magnétique ne change pas leur énergie cinétique, la force de Lorentz étant perpendiculaire à leur vitesse, contrairement au passage à travers un champ

## La magnétostatique

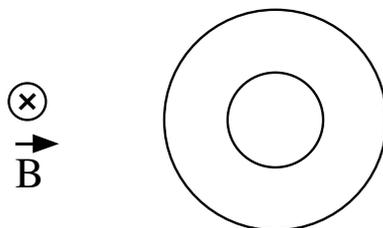
électrique ; l'idée est donc de s'arranger pour que les particules passent de nombreuses fois au travers d'un champ  $\vec{E}$  où elles gagnent de l'énergie en leur faisant faire un mouvement "circulaire" dans un champ magnétique.

La figure précédente montre les éléments d'un cyclotron : un champ magnétique uniforme sort de la feuille ; les protons sont émis de la source  $S$  et gagnent de l'énergie chaque fois qu'ils traversent la zone du champ  $\vec{E}$  créé par une différence de potentiel. Supposons qu'un proton fasse un premier demi-cercle et arrive dans la zone du champ  $\vec{E}$  ; ce dernier doit être inversé pour pouvoir accélérer à nouveau le proton (sinon, ce serait une décélération qui aurait lieu).

Le point essentiel du fonctionnement du cyclotron est donc que la fréquence d'inversion du champ  $\vec{E}$  doit être "accordé" à la fréquence de rotation des protons dans le champ  $\vec{B}$ , laquelle est indépendante de la vitesse des particules (cf. 3 pages avant).

$$f_{\text{champ } \vec{E}} = \frac{qB}{2\pi m} .$$

**Point de contrôle** La figure ci-dessous montre deux orbites circulaires de 2 particules de vitesses égales dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  pointant vers la feuille. L'une des particules est un proton, l'autre un électron (de masse plus faible). Quelle est la particule dont la trajectoire est le petit cercle ? Cette particule parcourt-elle sa trajectoire dans le sens horaire ou dans le sens anti-horaire ?



## Action d'un champ magnétique sur un fil parcouru par un courant

Un conducteur est caractérisé par l'existence en son sein d'électrons non liés à un atome particulier ; ce sont ces électrons, les *électrons de conduction*, qui sont à l'origine du courant électrique. L'intensité  $i$  d'un courant est ainsi la charge  $dq$  passant par unité de temps à travers la section du conducteur :

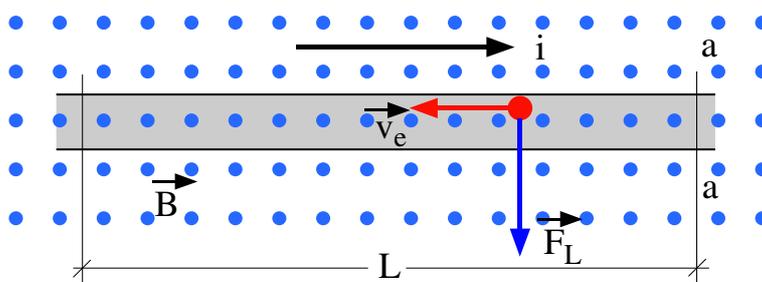
$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow q = \int dq = \int_0^t i dt$$

L'unité de l'intensité du courant est l'Ampère (A) :

$$1 \text{ Ampère} = 1 A = 1 \text{ Coulomb par seconde} = 1 C/s$$

Comme ce sont les électrons qui sont à l'origine du courant, le sens du courant est opposé à celui de la vitesse des électrons.

Considérons un fil conducteur parcouru par un courant  $i$  et placé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$



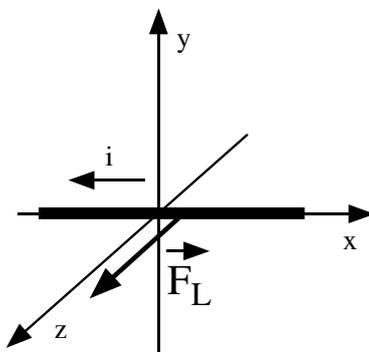
Les électrons qui sont dans la section  $L$  du conducteur ont passé par la section  $aa$  pendant un intervalle de temps  $\Delta t = L / v_e$ ,  $v_e$  étant la vitesse des électrons ; la charge dans la section  $L$  est ainsi :  $\Delta q = i \Delta t = i \frac{L}{v_e}$ .

La force de Lorentz s'exerçant sur cette charge est de

$$|\vec{F}_L| = |\Delta q \vec{v}_e \wedge \vec{B}| = i L B \text{ ou}$$

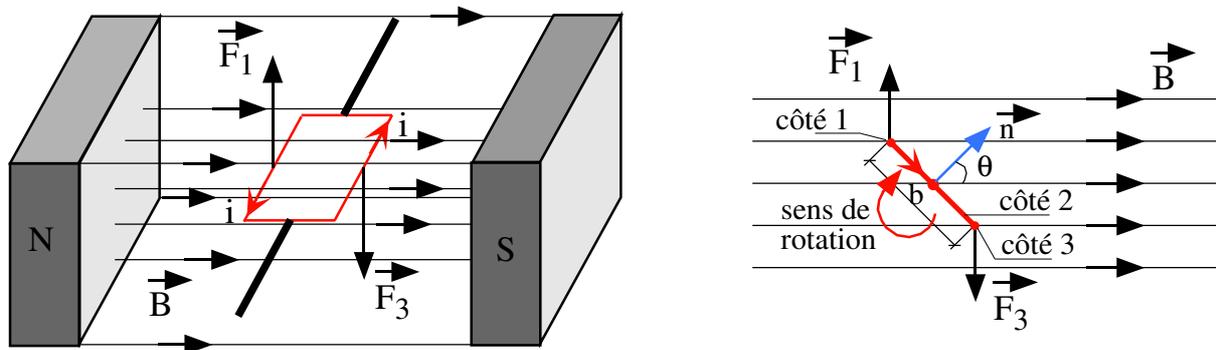
$$\vec{F}_L = i \vec{L} \wedge \vec{B} \quad \text{Force de Laplace}$$

**Point de contrôle** La figure montre un conducteur parcouru par un courant  $i$ . Ce conducteur est dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ . Le sens de la force de Laplace est donnée sur la figure. Le champ  $\vec{B}$  est orienté d'une manière telle que la force soit maximale. Quelle est donc la direction de ce champ ?



## Action d'un champ magnétique sur une boucle de courant

C'est le principe des moteurs électriques que nous examinons ici ; le dessin ci-après en donne le principe : une boucle parcourue par un courant est immergée dans un champ magnétique, les forces de Laplace qui en résultent créent un couple qui fait tourner la boucle autour de son axe. Un commutateur (non dessiné) inverse le courant à chaque demi-révolution afin que le couple s'exerce toujours dans la même direction. Examinons plus en détail ce phénomène.



La boucle est rectangulaire et de côtés  $a$  et  $b$ . La figure de gauche montre la situation où la boucle est parallèle au champ  $\vec{B}$  et la figure de droite celle où la normale au plan de la boucle fait un angle  $\theta$  avec  $\vec{B}$ .

La boucle définit une surface ; de plus, le sens du courant qui la parcourt définit un sens à cette surface. Notons par  $\vec{n}$  le vecteur unitaire perpendiculaire à la boucle et dont le sens est donné par la règle du tire-bouchon

(ou des 3 doigts de la main droite) :  $\vec{n}$  est dirigé dans le sens entrant d'un tire-bouchon droit ou dans le sens du majeur si le courant passe dans le sens pouce  $\rightarrow$  index.

- Sur le côté 2 de longueur  $b$  : la force de Laplace  $\vec{F}_2$  est dirigée vers le lecteur (elle sort vers vous) et vaut :  $F_2 = i b B \sin(90^\circ - \theta) = i b B \cos \theta$
- Sur le côté 4, la force  $\vec{F}_4$  a le même module, mais est dirigée dans le sens opposé à  $\vec{F}_2$ . Ces deux forces s'annulent ; par ailleurs, elles s'exercent selon l'axe de rotation de la boucle et n'ont pas d'effet.
- Sur les côtés 1 et 3 de longueur  $a$ , les fils sont perpendiculaires à  $\vec{B}$ , les forces ont un même module,  $i a B$  mais ont des sens opposés et leurs directions ne coïncident pas : ils donnent lieu à un couple  $\vec{\tau}$

$$|\vec{\tau}| = 2 \left( i a B \frac{b}{2} \sin \theta \right) = i a b B \sin \theta$$

- Vectoriellement, nous vérifions que  $\vec{\tau} = i a b \vec{n} \wedge \vec{B} = i S \vec{n} \wedge \vec{B}$
- Ce couple tend à faire tourner la boucle de manière à ce que la direction de  $\vec{n}$  soit parallèle à celui du champ  $\vec{B}$  (voir figure précédente).

Dans les moteurs, pour augmenter le couple, on a un bobinage de  $N$  spires, au lieu d'une seule boucle, et le courant dans le bobinage est inversé lorsque  $\vec{n}$  commence à s'aligner avec la direction du champ afin que le couple continue à s'exercer. Ce renversement du courant se fait automatiquement.

### Définition du moment dipolaire magnétique

On peut définir le moment dipolaire magnétique par un vecteur  $\vec{\mu}$  dont la direction est normale à la surface de la boucle, dont le sens est, pour un sens de circulation du courant, donné par la règle du tire-bouchon (ou celle des 2 doigts de la main droite) et dont le module est  $\mu = i S$ .

$$\vec{\mu} = i S \vec{n}$$

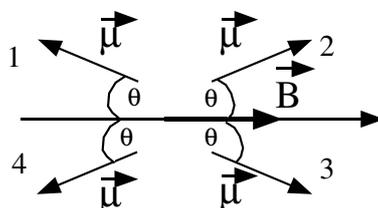
[La signification de l'appellation "moment *dipolaire* magnétique" sera explicitée au paragraphe prochain.]

Nous pouvons dès lors écrire :  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$ .

Cette situation est identique à celle rencontrée pour le dipôle électrique où nous avons vu que, dans un champ  $\vec{E}$ , un couple  $\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E}$  s'exerçait sur un dipôle électrique  $\vec{p}$  et tendait à l'aligner dans la direction de  $\vec{E}$ . Ici, le couple  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$  tend aussi à aligner  $\vec{\mu}$  dans la direction de  $\vec{B}$ .

Le développement que nous venons de faire sera utile pour comprendre, dans d'autres cours, les principes du magnétisme de la matière et, comme application, les techniques de résonances magnétiques.

**Point de contrôle** La figure ci-après montre 4 orientations d'un moment dipolaire magnétique  $\vec{\mu}$  dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . Ordonnez ces 4 situations selon le module du couple agissant sur le dipôle.



## Calcul des champs magnétiques produits par des courants : la loi d'Ampère

Nous avons vu qu'il était difficile de calculer le champ électrique  $\vec{E}$  dès que le nombre de charges devenait important et que, dans ces cas, le Théorème de Gauss nous aidait à trouver  $\vec{E}$  avec une certaine facilité.

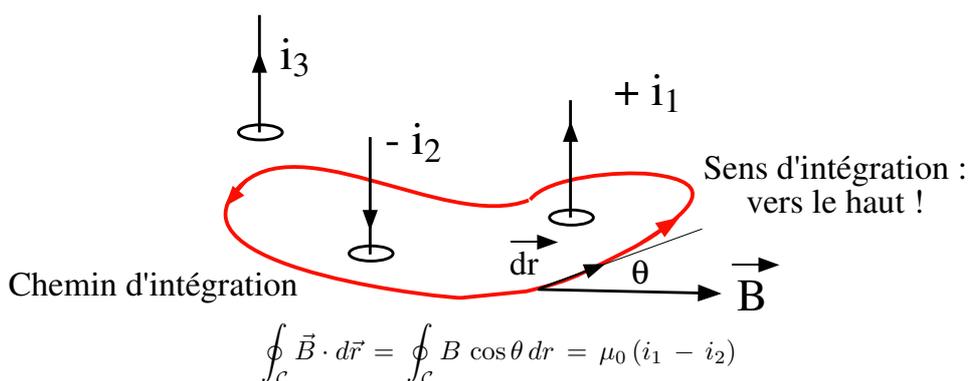
Nous avons vu en introduction à ce chapitre sur le magnétisme que l'on pouvait produire un champ magnétique par le mouvement des charges, c.à.d. par des courants. La loi d'Ampère permet de calculer le champ  $\vec{B}$  en un point de l'espace connaissant les courants :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 i_{enl.}$$

$i_{enl.}$  est la somme algébrique des courants enlacés par le chemin d'intégration  $\mathcal{C}$ . Le signe que l'on doit assigner aux courants est donné

par le sens d'intégration choisi (voir ci-après).  $\mu_0$  est la *perméabilité du vide* et vaut  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} \approx 1,256 \times 10^{-6} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ .

Pour utiliser la loi d'Ampère, nous n'avons pas besoin de connaître *a priori* la direction de  $\vec{B}$ . Nous pouvons le prendre dans le sens de l'intégration, qui, lui, est donné par la règle du tire-bouchon : en suivant le sens d'intégration, un signe + est assigné aux courants qui suivent le sens d'intégration suivi et un signe - dans le cas contraire. Le sens de  $\vec{B}$  dépendra du signe du résultat obtenu.



**Remarque :** Le courant  $i_3$  de la figure, bien que contribuant certainement au champ  $\vec{B}$ , n'apparaît pas dans le membre de droite de l'équation précédente. Ceci est dû au fait que la contribution de  $i_3$  à  $\vec{B}$  s'annule du fait que nous faisons l'intégration sur un chemin fermé : nous nous intéressons pas à sa contribution, puisque nous avons choisi explicitement un chemin d'intégration ne l'enlaçant pas ! La contribution des courants enlacés à  $\vec{B}$  ne s'annule pas.

Nous ne pouvons pas effectuer l'intégration pour l'exemple présenté à la figure précédente, par manque de données. Nous pouvons par contre le faire dans les cas simples suivants.

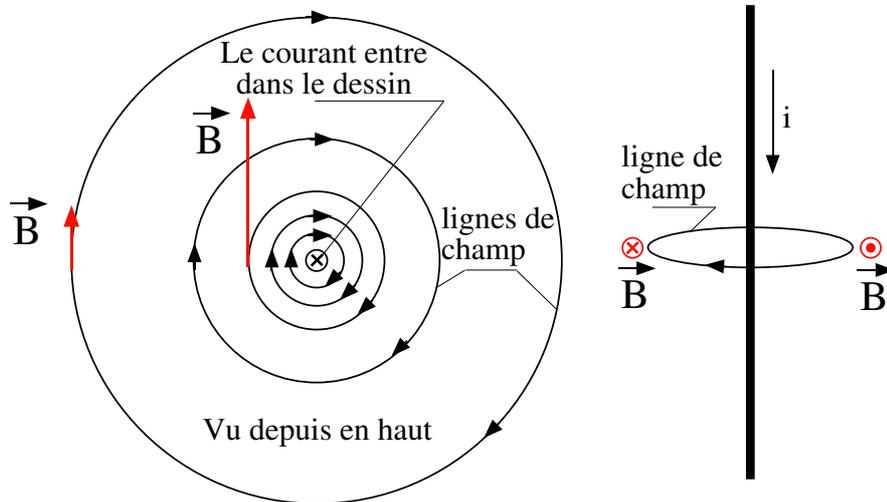
## Applications de la loi d'Ampère

### Cas d'un conducteur rectiligne

Dans le cas d'un conducteur rectiligne infiniment long parcouru par un courant  $i$ , nous voyons tout de suite qu'il existe une symétrie : le champ  $\vec{B}$  doit avoir une symétrie axiale autour du conducteur, il doit avoir la même

## La magnétostatique

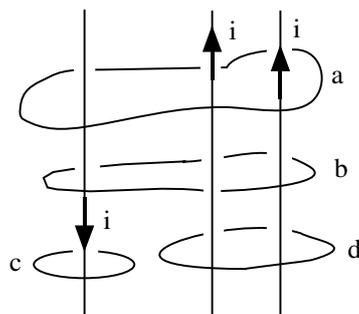
valeur pour une même distance  $r$  au fil. Le courant n'étant pas nul, nous avons, en prenant comme chemin d'intégration un cercle de rayon  $r$  centré sur le conducteur :

$$\oint_{\text{Cercle}} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \oint_{\text{Cercle}} B dr = B \oint_{\text{Cercle}} dr = \mu_0 i$$


$$B(2\pi r) = \mu_0 i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Le sens de  $\vec{B}$  est celui indiqué sur la figure : en effet, si nous prenons un sens d'intégration dirigé dans la feuille, le courant sera positif,  $d\vec{r}$  sera dans le sens des aiguilles d'une montre dans le dessin de gauche ci-dessus :  $\vec{B}$  ne peut être que dans le même sens que  $d\vec{r}$  puisque  $i$  est positif.

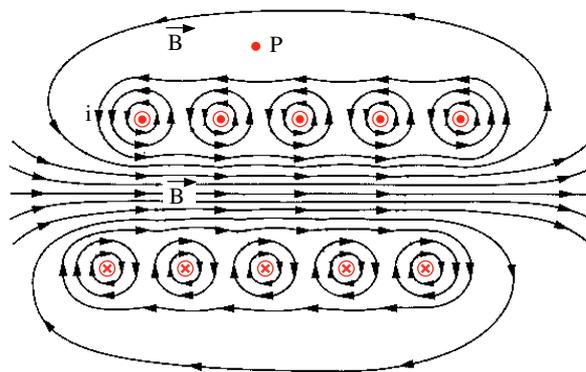
**Point de contrôle** La figure montre 3 conducteurs parallèles parcourus par un courant  $i$ , dans les sens indiqués ainsi que 4 contours d'intégration. Le contour a) entoure les 3 conducteurs, la boucle b) entoure les conducteurs à gauche et à droite, le contour c) celui de gauche et le contour d) les deux conducteurs de droite. Ordonnez les contours selon l'importance de  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{r}$ .



## Champ dans un solénoïde

Un solénoïde est un bobinage serré d'un fil conducteur. Dans ce cas, l'utilisation de la loi d'Ampère est particulièrement adaptée pour trouver la valeur du champ magnétique dans le bobinage.

Le champ magnétique créé par le solénoïde est la somme vectorielle des champs créés par chacune des spires, comme la montre la figure ci-dessous : A l'intérieur du solénoïde, le champ  $\vec{B}$  est presque uniforme et le devient



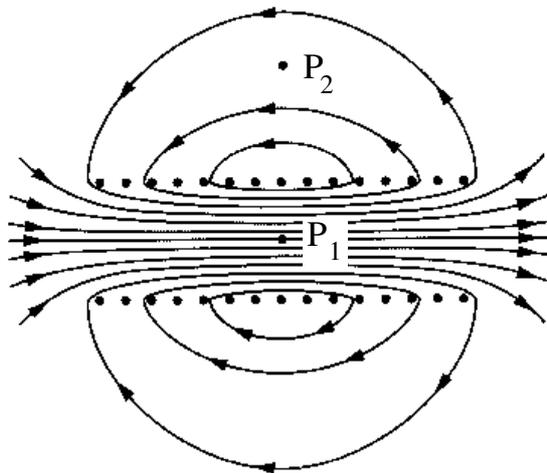
(Le courant rentre par en bas et sort des spires par en haut)

si on resserre le bobinage et augmente le nombre de spires ; à l'extérieur, le champ décroît, et est plus faible qu'à l'intérieur, puisque, au point P, la contribution à  $\vec{B}$  de la nappe supérieure tend à annuler celle de la nappe inférieure. Dans le cas d'un solénoïde idéal infiniment long, le champ à l'extérieur est nul. La figure ci-dessous montre le champ d'un solénoïde réel : le champ à l'intérieur est plutôt fort et faible à l'extérieur.

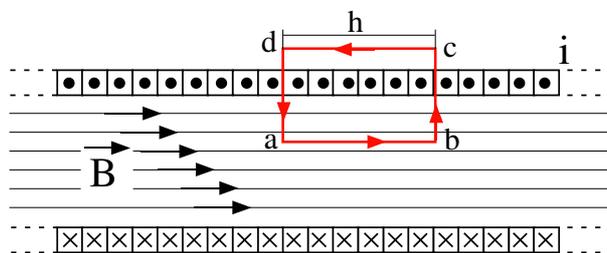
Calculons le champ à l'intérieur d'un solénoïde idéal en utilisant la loi d'Ampère sur le chemin  $abcd$  dessiné sur la figure.

$$\mu_0 i_{enl.} = \oint_{abcd} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{r} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{r} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{r} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{r}$$

La première intégrale du membre de droite est égale à  $Bh$ , alors que les 3 autres sont nulles, la troisième parce que le champ est nul sur  $cd$  et les deux autres parce que le champ  $\vec{B}$  est perpendiculaire à  $d\vec{r}$ .



Champ dans un solénoïde réel



Calcul du champ dans un solénoïde idéal

Donc :  $B h = \mu_0 i_{enl.}$  . Si  $n$  est le nombre de tours par unité de longueur du bobinage,  $i_{enl.} = i(n h)$  ,  $i$  étant le courant passant dans le conducteur.

Par conséquent :

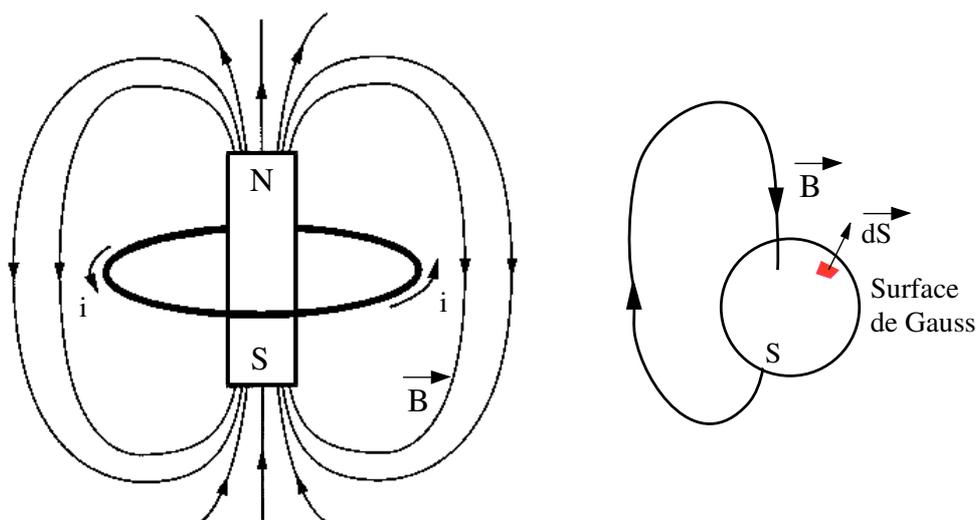
$$B = \mu_0 n i$$

Bien que nous ayons pris un solénoïde idéal, avec un nombre important de spires et une longueur infinie, le résultat rest valable pour un solénoïde, à condition que nous restreignons au champ bien à l'intérieur de la bobine (c.à.d. loin des extrémités).

### Champ magnétique créé par une boucle de courant

Nous donnons seulement les lignes de champ de  $\vec{B}$  pour le cas d'une boucle parcourue par un courant [le calcul explicite du champ est fastidieux et n'apporte rien]. Disons seulement que le champ créé par la boucle est proportionnelle au moment dipolaire magnétique  $\vec{\mu}$  et que les lignes de champ ont la forme représentée sur la figure ci-après.

Le champ et les lignes de champ sont semblables à celles que produisent les



barreaux aimantés ; dans ces derniers, nous avons l’habitude de définir un pôle Nord et un pôle Sud. C’est pour cette raison que nous avons appelé  $\vec{\mu}$  le “moment dipolaire magnétique” de la boucle.

Le fait qu’il n’existe pas de monopôle magnétique fait que les lignes de champ du champ  $\vec{B}$  sont des lignes fermées, partant du pôle nord et revenant au pôle sud. Le flux du champ  $\vec{B}$  au travers d’une surface fermée est par conséquent nul (voir la figure de droite ci-dessus).

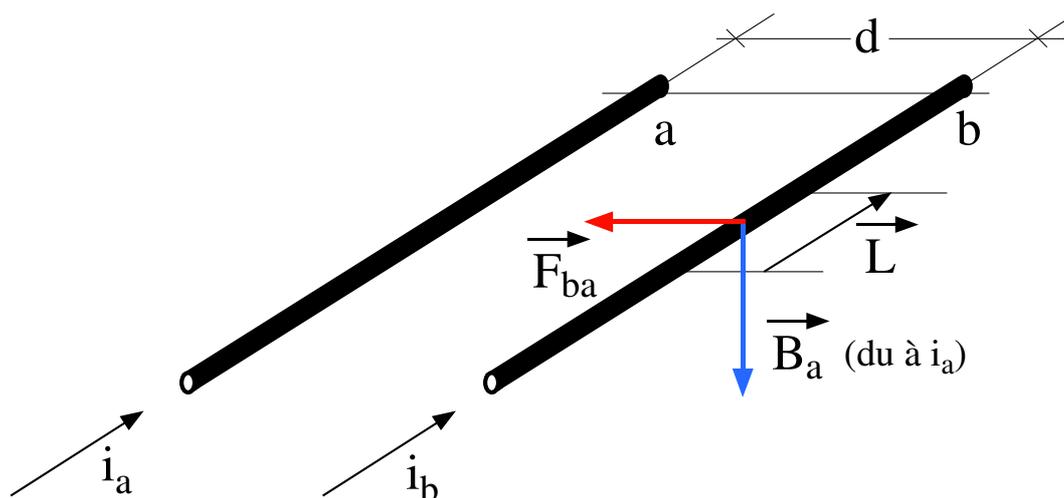
$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

### Définition légale de l’ampère

Deux fils conducteurs rectilignes parallèles et infiniment longs sont parcourus par les courants  $i_a$  et  $i_b$ . Ces deux conducteurs, distants d’une distance  $d$ , exercent une force l’un sur l’autre. Examinons d’abord la force exercée sur le conducteur  $b$  par le courant circulant dans  $a$ . Ce courant produit un champ magnétique  $\vec{B}_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}$  à l’endroit du conducteur  $b$ .

(La règle du tire-bouchon nous permet d’affirmer que, dans la configuration dessinée sur la figure, le champ  $\vec{B}_a$  est dirigé vers le bas)

La force de Laplace sur une portion  $L$  du conducteur  $b$ , plongé dans le



champ  $\vec{B}_a$  est de :  $\vec{F}_{ba} = i_b \vec{L} \wedge \vec{B}_a$  ou :  $F_{ba} = \frac{i_a i_b \mu_0 L}{2\pi d}$

La règle des trois doigts montre que  $\vec{F}_{ba}$  est dirigé du conducteur  $b$  vers le conducteur  $a$ . Nous aurions pu aussi calculer la force exercée sur le conducteur  $a$  par le champ produit par le courant circulant dans le conducteur  $b$  en procédant de la même manière : calcul du champ, puis de la force de Laplace. Nous aurions trouvé que la force  $\vec{F}_{ab}$  était dirigée vers le conducteur  $b$ .

*Deux conducteurs parcourus par des courants parallèles s'attirent ; deux conducteurs parcourus par des courants antiparallèles se repoussent.*

### Définition de l'ampère

Deux conducteurs rectilignes infiniment longs placés à un mètre l'un de l'autre et parcourus par un courant continu de **1 ampère** exercent l'un sur l'autre une force de  $2 \times 10^{-7}$  Newton par mètre de longueur.

## Une comparaison entre électrostatique et magnétostatique

Electrostatique	Magnétostatique
<p>Force de Coulomb  <math display="block">\vec{F}_{\text{élect}}^{1 \rightarrow 2} = q_2 \vec{E}</math></p> <p>Origine du champ <math>\vec{E}</math> :                      la charge électrique</p> <p>Loi permettant de calculer <math>\vec{E}</math> :  <b>Loi de Gauss</b>  <math display="block">\epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{\text{renfermée}}</math></p>	<p>Force de Lorentz  <math display="block">\vec{F}_L = q \vec{v} \wedge \vec{B}</math></p> <p>Origine du champ <math>\vec{B}</math> :                      les charges en mouvement                      c.à.d. les courants ;                      il n'y a <b>pas</b> de "charge"                      (monopôle) magnétique</p> <p>Loi de Gauss pour le champ <math>\vec{B}</math> :  <math display="block">\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0</math></p> <p>Loi permettant de calculer <math>\vec{B}</math> :  <b>Loi d'Ampère</b>  <math display="block">\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 i_{\text{enl.}}</math></p>

### **Ce qui n'a pas été traité**

Nous n'avons pas traité des circuits, en particulier des lois de Kirchhoff qui permettent de calculer différences de potentiels et courants dans les circuits. Nous n'avons pas traité non plus des condensateurs et des bobines d'auto-induction. Les phénomènes d'induction, non plus, n'ont pas été abordés ; ceux-ci lient

- a)** la variation temporelle du flux du champ magnétique au champ électrique induit : c'est la loi de Faraday-Lenz,
- b)** la variation temporelle du flux du champ électrique au champ magnétique induit : c'est la loi d'Ampère-Maxwell.

Ces deux lois, avec les lois de Gauss pour le champ électrique et pour le champ magnétique, constituent les 4 équations de Maxwell. Ces équations montrent qu'électricité et magnétisme sont deux faces d'un même phénomène et sont à la base de la propagation des ondes électromagnétiques.

# Physique Générale

## De la Mécanique à la Thermodynamique

### Equation d'état, 1er Principe

TRAN Minh Tâm

### Table des matières

<b>Rappel sur les énergies</b>	<b>190</b>
Pour une particule . . . . .	190
Pour un ensemble de particules . . . . .	191
<b>Equation d'état et relation PVT</b>	<b>194</b>
Les variables thermodynamiques . . . . .	194
Équation d'état du gaz parfait . . . . .	195
Gaz réels : équation de van der Waals et liquéfaction . . . . .	197
Équation de van der Waals : interprétation des paramètres . . . . .	200

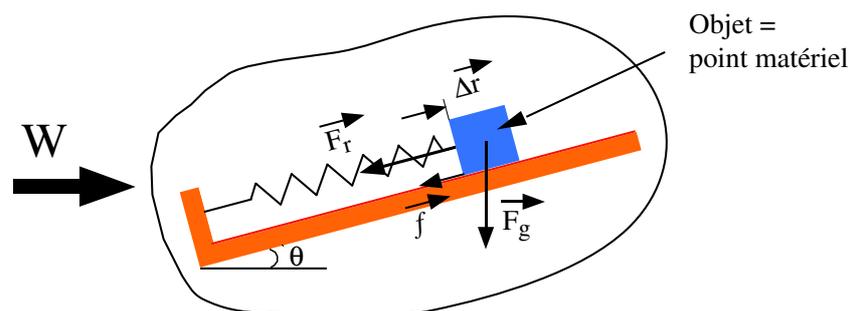
<b>Le Premier principe de la Thermodynamique</b>	<b>202</b>
Le principe zéro de la Thermodynamique . . . . .	202
Travail et chaleur . . . . .	203
Le premier principe de la Thermodynamique . . . . .	207
Quelques applications du premier principe . . . . .	208
Absorption de la chaleur par les solides et liquides . . . . .	211

## Pour une particule

Pour un objet assimilable à un point matériel, nous avons montré qu'un travail  $W$  effectué sur cet objet entraînait une variation de son énergie mécanique (égale à son énergie cinétique + ses énergies potentielles, ces dernières provenant des interactions de l'objet avec son milieu extérieur) et de son "énergie interne", cette dernière étant perçue comme l'énergie thermique et/ou l'énergie correspondante à l'agrégation de l'objet.

$$W = \Delta E_{tot} = \Delta E_{méc.} + \Delta E_{int} = \Delta E_{cin} + \Delta E_{pot}^{ext} + \Delta E_{int}$$

[Nous noterons, dans les chapitres de thermodynamique, l'énergie cinétique par  $E_{cin}$  au lieu de  $T$  pour éviter les confusions avec la température et l'énergie potentielle par  $E_{pot}$ ]



L'énergie potentielle dans l'expression ci-dessus est qualifiée d'énergie potentielle "externe" car nous n'avons qu'une particule ou un objet assimilable à une particule et que les potentiels sont ici *externes* dans le sens d'externes par rapport à l'objet. [Dans l'exemple de la figure, ces énergies potentielles sont l'énergie potentielle gravifique et l'énergie potentielle du ressort, toutes les deux faisant bien intervenir les distances relatives de notre objet par rapport à la Terre et par rapport au point d'attache du ressort].

La situation se complique un peu avec un grand nombre de particules.

### Pour un ensemble de particules

Calculons l'énergie cinétique d'un ensemble de particules en utilisant la composition des vitesses  $\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_G$  :

$$\begin{aligned} \sum_i E_{cin}(i) &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \underbrace{(\vec{v}'_i + \vec{v}_G)}_{\text{comp. des vitesses}}^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}'_i{}^2 + \left( \sum_i m_i \vec{v}'_i \right) \cdot \vec{v}_G + \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 \\ &= \sum_i E'_{cin}(i) + \left( \sum_i m_i \vec{v}'_i \right) \cdot \vec{v}_G + \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 \end{aligned}$$

Mais  $\sum_i m_i \vec{v}'_i = 0$  par définition du CM! Donc :

$$\sum_i E_{cin}(i) = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \sum_i E'_{cin}(i)$$

L'énergie cinétique totale d'un ensemble de particules est égale à la somme de l'énergie cinétique de la masse totale  $M$  concentrée en  $G$ , le centre de masse des particules, et de vitesse  $\vec{v}_G$ , et de la somme des énergies cinétiques  $\sum_i E'_{cin}(i)$  évaluées dans le référentiel du centre de masse. C'est le Théorème de Koenig. Le travail d'une force extérieure sur notre ensemble de particules provoque donc :

$$W = \Delta E_{tot} = \frac{1}{2} M \Delta v_G^2 + \Delta \sum_i E'_{cin}(i) + \Delta \sum_i E_{pot}^{ext}(i) + \Delta \sum_i E_{int}(i)$$

**Redéfinition** de l'énergie interne.

Pour une particule (ou un objet assimilable à une particule), notre définition de "l'énergie interne" venait du travail des forces de frottement qui provoquait un changement de l'énergie thermique et de tout autre énergie "interne" de l'objet. Pour un ensemble de particules, nous devons être plus

## Rappel sur les énergies

précis : nous pouvons en effet varier les distances relatives des particules les unes par rapport aux autres, nous pouvons changer l'état d'agrégation de ces particules, il s'agit donc ici de l'énergie potentielle interne du système de particules. Le travail d'une force extérieure est donc :

$$W = \Delta E_{tot} = \frac{1}{2} M \Delta v_G^2 + \Delta \sum_i E'_{cin}(i) + \Delta \sum_i E_{pot}^{ext}(i) + \Delta \sum_i E_{pot}^{int}(i)$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} M v_G^2 + \sum_i E'_{cin}(i) + \sum_i E_{pot}^{ext}(i) + \sum_i E_{pot}^{int}(i)$$

Mais, du point de vue macroscopique, nous n'avons accès ni à  $E'_{cin}(i)$ , ni à  $E_{pot}^{int}(i)$  et, pour masquer cette ignorance, nous écrivons :

$$E_{tot} = \frac{1}{2} M v_G^2 + E_{pot}^{ext} + E_{interne}$$

$$E_{interne} = \sum_i E'_{cin}(i) + \sum_i E_{pot}^{int}(i)$$

*L'énergie interne peut être interprétée comme une énergie associée à des variables qui ne sont pas directement observables au niveau macroscopique : l'énergie cinétique des particules et leur énergie potentielle interne*

**Illustration** : Je lance une bouteille d'eau gazeuse. J'observe :

1. Une variation de l'énergie cinétique de la bouteille associée au mouvement de son centre de masse,
  2. Une variation de l'énergie potentielle gravifique de la bouteille,
  3. Une variation de l'énergie interne de la bouteille : la pression a augmenté dans la bouteille et une partie du gaz dissout dans le liquide en est sortie; ceci correspond à un changement d'énergie potentielle interne du contenu de la bouteille et aussi à un changement de la vitesse des particules du gaz.
- Si la distance relative entre les particules est constante en moyenne, l'énergie d'interaction entre les particules,  $E_{pot}^{int}$ , est aussi constante, en

## Rappel sur les énergies

moyenne. Le travail dissipé par les forces de frottement (celles que nous “voyons” au niveau macroscopique) apparaît, au niveau microscopique, comme une augmentation de l'énergie cinétique des particules  $E'^{cin}$ .

- La chaleur, le travail mécanique, la radiation sont des moyens d'action de l'extérieur (point de vue macroscopique) sur l'énergie interne. En Thermodynamique, nous noterons l'énergie interne par  $U = E_{interne}$ .

La Thermodynamique consiste en l'étude des différentes formes d'énergie des systèmes matériels et de leurs transformations. En principe, avec les lois de la Mécanique, nous pouvons connaître les trajectoires, les vitesses et les énergies des particules, donc l'énergie du système.

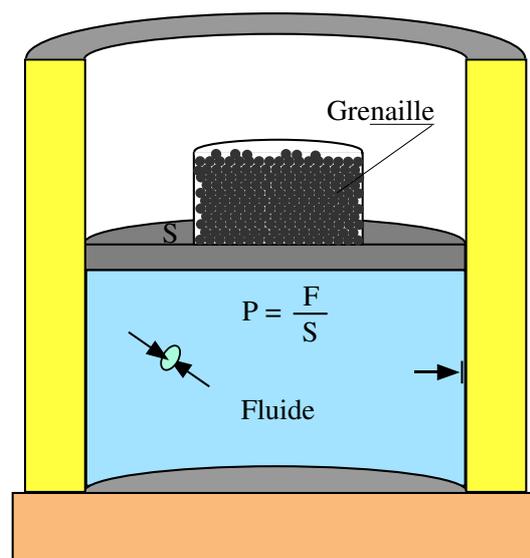
Cependant, le nombre énorme des particules d'un système macroscopique rend illusoire toute tentative de résolution des équations du mouvement de chaque particule. Il est donc plus raisonnable d'aborder le problème de manière macroscopique et statistique pour étudier les formes d'énergie des systèmes et leurs transformations.

## Les variables thermodynamiques

Au laboratoire, nous aimerions caractériser l'état d'une substance ou d'un système par les valeurs numériques de certaines de ses propriétés que nous mesurons. Comme il existe des relations entre ces propriétés, il n'est peut être pas nécessaire d'avoir les valeurs de toutes les propriétés de la substance pour en définir exactement l'état.

Si nous négligeons les forces gravifiques et électromagnétiques extérieures et que nous considérons un fluide (un gaz ou/et un liquide), il ne faut que quelques grandeurs pour caractériser notre substance. Limitons-nous encore davantage en ne considérant que des liquides ou des gaz purs : il n'est donc pas nécessaire, pour l'instant, d'avoir des variables définissant la composition de notre substance ; la masse  $m$  de la substance, la pression  $P$ , le volume  $V$  et la température  $T$  peuvent caractériser notre système. Des 3 dernières variables ( $P$ ,  $V$ ,  $T$ ) seulement 2 sont indépendantes : nous pouvons en particulier spécifier l'état de notre substance par  $P$  et  $V$  ou  $P$  et  $T$ , si le système est en équilibre, la troisième variable peut être obtenue.

L'utilisation de la pression  $P$  nécessite une certaine précaution.



A l'équilibre, la pression est la même en n'importe quel point du fluide :

## Equation d'état et relation PVT

ceci veut dire que nous négligeons le poids de la colonne de fluide au dessus du point considéré (les forces gravifiques sont négligées).

Si le fluide n'est pas en équilibre, nous pouvons toujours définir la pression externe  $P_{ext} = F/S$  mais ce n'est plus la propriété du fluide lui-même : jusqu'à ce que l'équilibre soit rétabli, la pression à l'intérieur du fluide varie d'un point à un autre.

Les propriétés d'un système peuvent être classées en propriétés intensives et extensives. Les *propriétés extensives* sont additives, la valeur de cette propriété du système dans son ensemble est la somme des valeurs des parties le constituant ; exemple : le volume et la masse sont des grandeurs extensives. Les propriétés (ou variables) intensives ne sont pas additives, la température et la pression en sont des exemples.

### Équation d'état du gaz parfait

Nous savons, depuis les travaux de Boyle et de Mariotte, que le volume d'un gaz est inversement proportionnel à sa pression.

$$P \cdot V = cste \quad (\text{à température donnée})$$

Le produit  $P \cdot V$  est proportionnel à la quantité de gaz ( $N_{mole}$  ou  $N$  molécules) et peut servir à définir une échelle de température selon l'équation

$$\boxed{P \cdot V = N_{mole} R T}$$

$$R = 8,3144 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mole}^{-1} \quad (\text{constante des gaz parfaits}), \text{ ou}$$

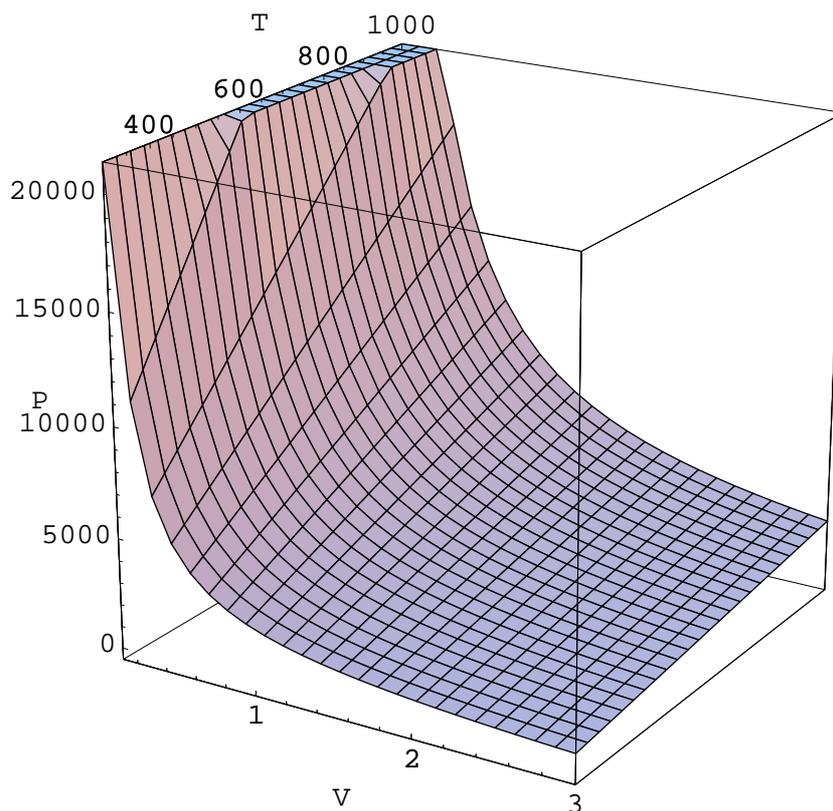
$$\boxed{P \cdot V = N k T}$$

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8,3144 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mole}^{-1}}{6,022 \times 10^{23} \text{ mole}^{-1}} = 1,3806 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$k$  = constante de Boltzmann,  $N$  = nombre de molécules.

Dans un diagramme ( $P - V$ ), nous pouvons dessiner les "courbes isothermes" ou "isothermes"  $T = cst$  qui sont, pour un gaz parfait, les

## Equation d'état et relation PVT



Les températures sont en Kelvin.

hyperboles  $P = (N k T)/V$ .

L'équation des gaz parfaits n'est valable que pour des températures  $T$  élevées et pour un rapport  $N_{mole}/V$  petit. Ceci correspond au cas où les molécules du gaz sont assez dispersées pour que l'on n'ait pas à tenir compte des interactions entre elles. L'énergie interne du gaz est alors purement cinétique. Puisque le gaz parfait est dilué, l'équation  $P \cdot V = N_{mole} R T$  ne décrit pas la liquéfaction.

**Point de contrôle.** Un gaz parfait a une pression initiale de 3 [unités de pression] et un volume de 4 [unités de volume]. Le tableau ci-dessous donne les pressions et volumes finaux dans les mêmes unités. Quels sont les processus qui suivent une courbe isotherme ?

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$P$	12	6	5	4	1
$V$	1	2	7	3	12

**Gaz réels : équation de van der Waals et liquéfaction**

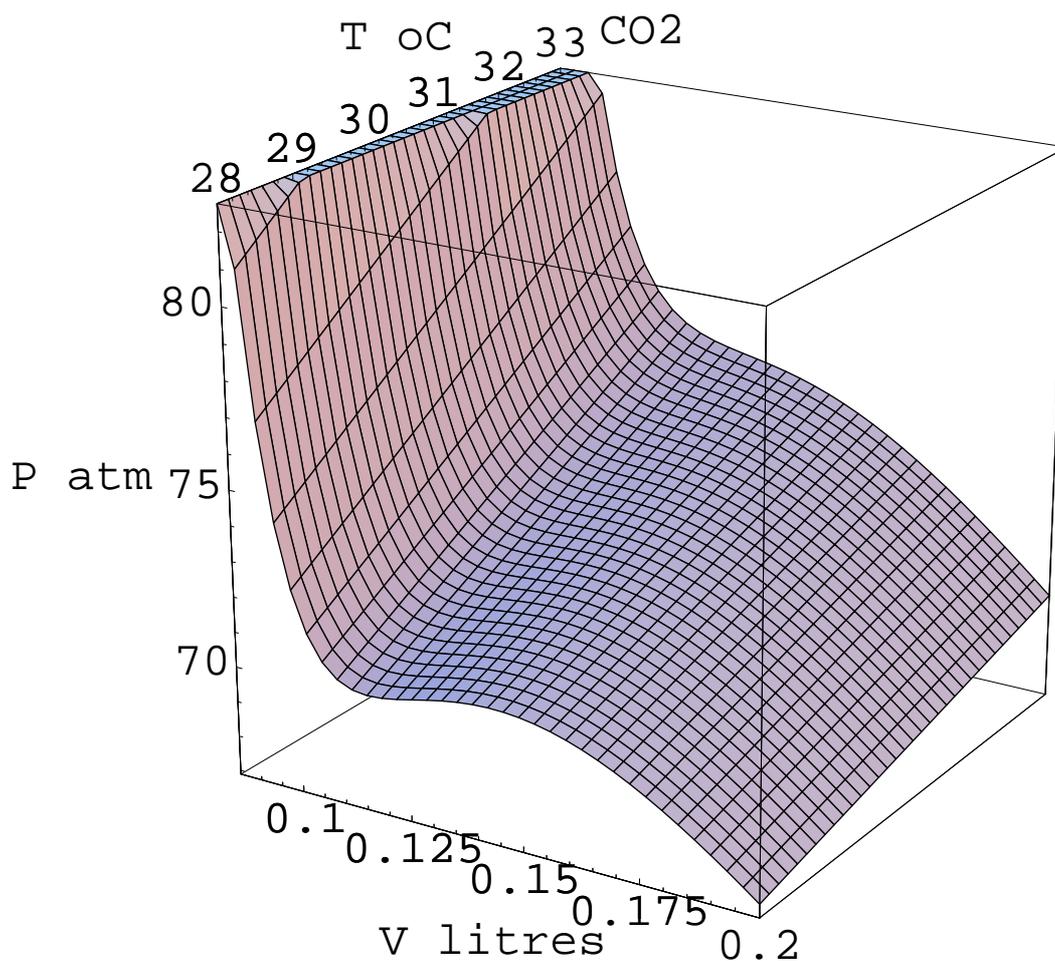
Nous pouvons essayer de tenir compte des interactions entre molécules et du volume "occupé" par chaque molécule dans une formule phénoménologique :

$$\left( P + a \left( \frac{N}{V} \right)^2 \right) \cdot (V - Nb) = NkT$$

C'est l'équation de van der Waals (1873). a et b sont des constantes qui dépendent du gaz.

Gaz	a Pa m <sup>6</sup> molécules <sup>-2</sup>	b m <sup>3</sup> molécules <sup>-1</sup>
Monoatomique		
<i>He</i>	0.0095 10 <sup>-48</sup>	3.936 10 <sup>-29</sup>
<i>Ar</i>	0.3729 10 <sup>-48</sup>	5.345 10 <sup>-29</sup>
<i>Xe</i>	1.1718 10 <sup>-48</sup>	8.477 10 <sup>-29</sup>
<i>Hg</i>	2.2612 10 <sup>-48</sup>	2.816 10 <sup>-29</sup>
Diatomique		
<i>H<sub>2</sub></i>	0.0683 10 <sup>-48</sup>	4.419 10 <sup>-29</sup>
<i>O<sub>2</sub></i>	0.3800 10 <sup>-48</sup>	5.286 10 <sup>-29</sup>
<i>Cl<sub>2</sub></i>	1.8142 10 <sup>-48</sup>	9.336 10 <sup>-29</sup>
Triatomique		
<i>N<sub>2</sub>O</i>	1.0567 10 <sup>-48</sup>	7.331 10 <sup>-29</sup>
<i>NO<sub>2</sub></i>	1.4764 10 <sup>-48</sup>	7.346 10 <sup>-29</sup>
<i>H<sub>2</sub>O</i>	1.5267 10 <sup>-48</sup>	5.063 10 <sup>-29</sup>
Polyatomique		
<i>CH<sub>4</sub></i>	0.6295 10 <sup>-48</sup>	7.104 10 <sup>-29</sup>
<i>NH<sub>3</sub></i>	1.1650 10 <sup>-48</sup>	6.156 10 <sup>-29</sup>
<i>CCl<sub>4</sub></i>	5.6828 10 <sup>-48</sup>	22.966 10 <sup>-29</sup>

Les deux figures ci-après représentent la surface P(V,T) donnée par l'équation de van der Waals ainsi que quelques isothermes pour le *CO<sub>2</sub>* près de son point critique ( $T_c = 304.2 K$ ). Nous y reviendrons.

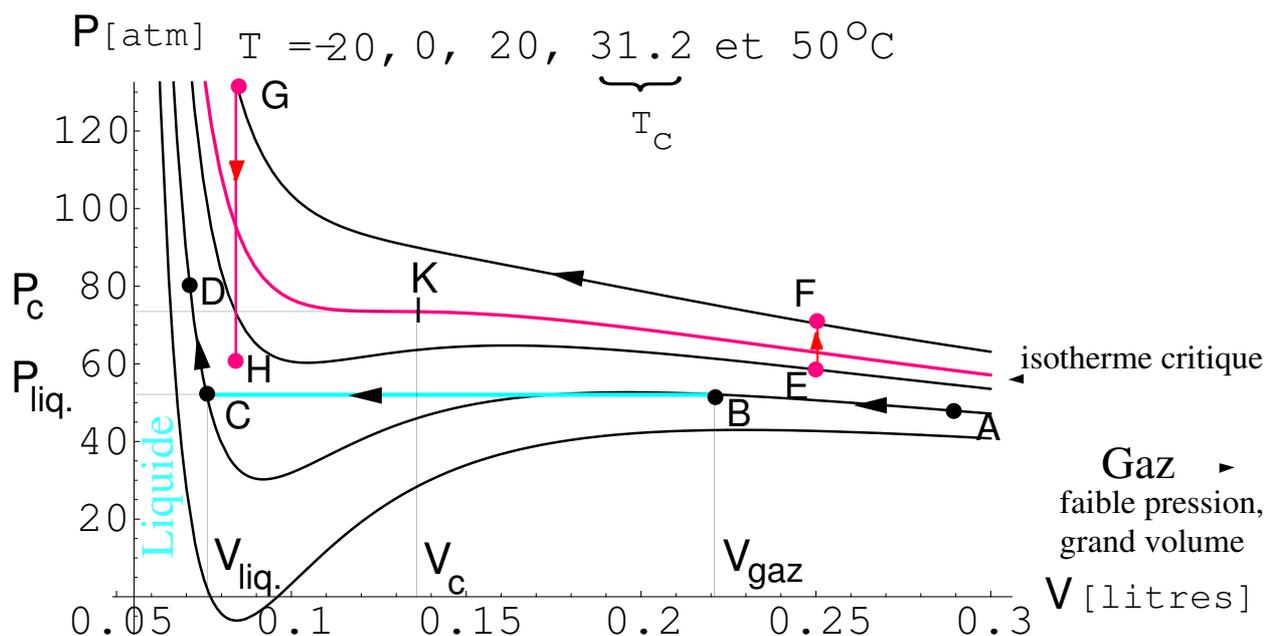


À haute température, par exemple à  $T > 323K$ , l'équation de van der Waals représente bien le comportement des gaz réels. À plus basse température ( $T = 283 K$ ), certaines parties des courbes isothermes  $T = \text{cst}$  dans le diagramme ( $P - V$ ) ne sont simplement pas physiques, soit parce que  $\frac{dP}{dV} > 0$ , soit que  $P < 0$ .

### Liquéfaction

Pour toute température inférieure à la "température critique", sur le diagramme  $P - V$ , le gaz (la vapeur) occupe la région à grand volume et faible pression, tandis que le liquide se trouve dans la région à faible volume. Les régions d'équilibre sont la partie de la courbe à grand  $V$  (gaz), la droite horizontale  $BC$  et la branche à faible volume. Partons du gaz au point  $A$  et

## Equation d'état et relation PVT



Courbes isothermes pour le CO<sub>2</sub> près du point critique

comprimons le tout en gardant sa température constante. La vapeur suit la ligne  $AB$  qui est approximativement une courbe isotherme d'un gaz parfait. Au point  $B$ , nous aurons apparition de la première goutte de liquide; la compression se poursuit alors à pression constante (la pression n'augmente pas!) jusqu'au point  $C$  où tout le gaz s'est liquéfié. La courbe  $CD$  est une isotherme du liquide, sa forte pente  $\frac{dP}{dV}$  indique la faible compressibilité du liquide. La courbe sous le palier  $BC$  n'est pas physique.

Le palier  $BC$  devient de plus en plus réduit au fur et à mesure que l'on augmente la température. Il existe un isotherme, l'isotherme critique, pour lequel ce palier se réduit à un point d'inflexion à tangente horizontale : c'est le *point critique*  $K$ . L'isotherme passant par  $K$  est l'isotherme critique; les isothermes dont les températures sont supérieures à  $T_c$  ne présentent pas les paliers correspondant à la formation d'une seconde phase, comme sur le palier  $BC$  ci-dessus.

Au delà de la température critique  $T_c$ , nous n'avons plus de coexistence des deux phases liquide et gazeuse : il y a continuité des états. Considérons le

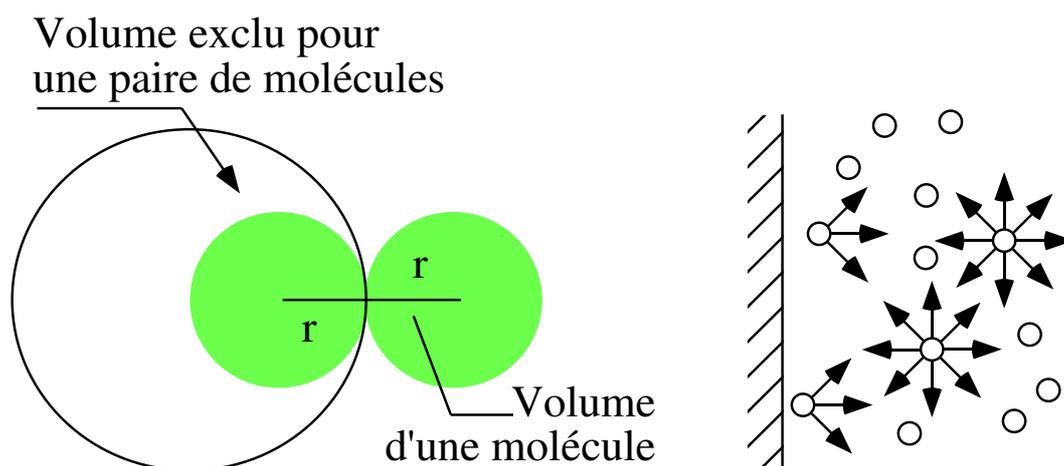
trajet  $EFGH$  dessiné sur la figure. La vapeur au point  $E$  a la température  $T_E$  inférieure à la température critique ; elle est chauffée à volume constant jusqu'à la température  $T_F$  supérieure à  $T_C$ . La vapeur est restée entièrement vapeur ; elle est ensuite comprimée à température constante  $T_F$  jusqu'au point  $G$ , puis finalement refroidie à volume constant jusqu'en  $H$ , à une température inférieure à  $T_C$ . En  $H$ , la substance est sous forme liquide, mais en aucun point du processus  $EFGH$  nous n'avons eu de coexistence des deux phases vapeur-liquide

### Équation de van der Waals : interprétation des paramètres

En partant de l'équation des gaz parfaits  $PV = NkT$  la première "amélioration" que nous pouvons apporter consiste en l'abandon de l'idée que le volume des molécules pouvaient être négligé devant le volume total du gaz : en effet, le volume intrinsèque des molécules a pour effet de diminuer le volume disponible de  $Nb$ ,  $b$  étant le volume exclu par molécule. On aura donc à ce stade :

$$P (V - Nb) = kNT$$

La seconde correction fait intervenir les interactions entre particules : les



molécules à l'intérieur du gaz ressentent l'action des autres molécules qui l'entourent. Près des parois du récipient, les molécules ne ressentent que l'action des molécules que d'un côté : il y a donc diminution de la pression que les molécules exercent sur la paroi par rapport à la pression qu'exerce-

## Equation d'état et relation PVT

raient des particules sans interaction entre elles. Cette diminution est proportionnelle au nombre de molécules se trouvant dans la première couche près de la paroi et au nombre de celles qui leur sont immédiatement adjacentes ; on supposera ces deux nombres égaux entre eux et à  $N/V$ . La correction est ainsi proportionnel à  $(N/V)^2$ , le facteur de proportionnalité étant  $a$ . Nous devons ainsi ajouter  $a(N/V)^2$  à la pression expérimentale pour compenser l'effet des forces d'attraction entre molécules. C'est à partir de ces considérations que van der Waals, en 1878, obtint son équation

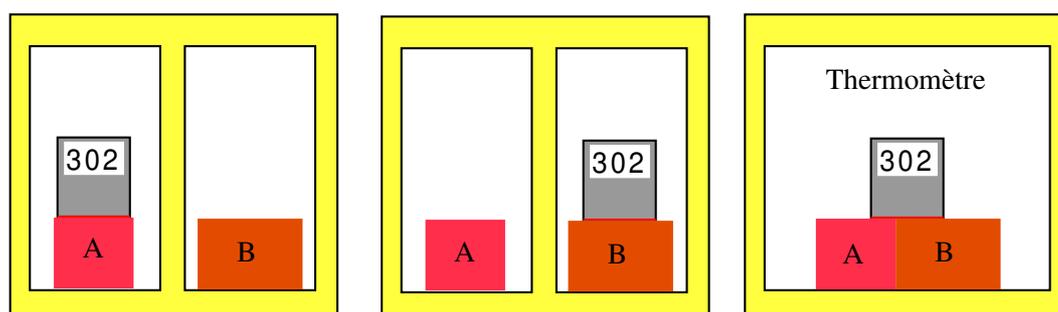
$$\left( P + a \left( \frac{N}{V} \right)^2 \right) (V - Nb) = kNT$$

## Le principe zéro de la Thermodynamique

Nous venons de traiter longuement de la température, de la pression et du volume. Nous savons comment déterminer une pression et un volume. Qu'en est-il de la température ?

Supposons que nous ayons un instrument qui réagisse à la température par un affichage (tout ingénieur sait fabriquer un tel instrument en se basant sur l'allongement ou sur l'augmentation de volume d'un corps avec la température, sur l'augmentation de la résistance électrique avec la température). Nous avons ainsi un thermomètre qui n'est pas encore calibré.

Mettons notre thermomètre non calibré en contact avec un corps *A* et attendons que l'équilibre se fasse. Mettons ensuite ce thermomètre en contact avec le corps *B*, isolé du corps *A*. Supposons que l'indication du thermomètre est la même que lorsqu'il était en contact avec *A*. Que se passe-t-il si *A* et *B* sont maintenant en contact ? Sont-ils en équilibre thermique immédiatement ? L'expérience montre que, oui, *A* et *B* sont en équilibre thermique immédiatement. D'où le **principe zéro** de la thermodynamique : si les corps *A* et *B* sont en équilibre thermique avec un troisième corps (ici le thermomètre), alors, ils sont en équilibre entre eux.



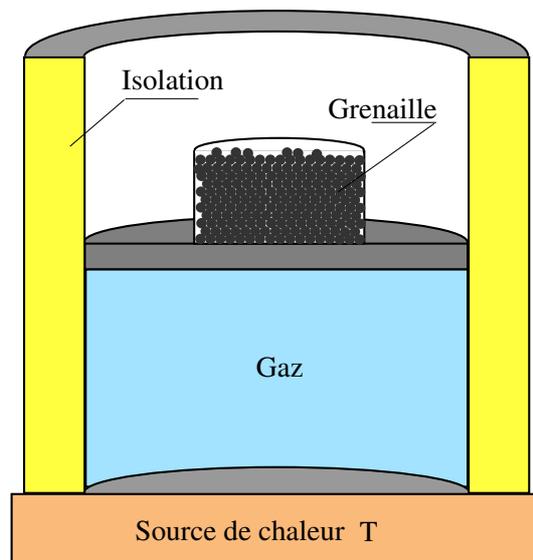
Autrement dit : Tout corps a une température. Quand deux corps sont en équilibre thermique, leurs températures sont égales et inversement.

Aussi étrange que cela puisse paraître, le principe zéro n'a été énoncé que dans les années 1930 ! Il est pourtant à la base de toutes nos mesures de température.

## Travail et chaleur

Considérons un cylindre muni d'un piston sans frottement. La poussée vers le haut du piston est due à la pression du gaz enfermé dans le cylindre et cette poussée est égale au poids de la grenaille posée sur le piston. Les parois du cylindre sont isolées et ne permettent pas d'échange d'énergie sous forme de chaleur. Le fond du cylindre repose sur une "source de chaleur" dont la température est  $T$ . Le cylindre renferme un gaz pur qui, dans les transformations que nous traitons, demeure dans la phase gazeuse.

Une **source de chaleur** est un corps dont la "capacité calorifique" est très grande. Ce peut être, dans cet exemple, une plaque chaude dont nous pouvons maintenir la température constante, quelque soit le transfert de chaleur vers le cylindre, ou un grand réservoir comme le lac dont on suppose la température constante.



Nous partons avec un gaz à l'état initial  $i$ , décrit par la pression  $P_i$ , le volume  $V_i$  et la température  $T_i$ . Nous aimerions amener le gaz à l'état final  $f$ , avec  $P_f$ ,  $V_f$ ,  $T_f$ . La manière dont nous effectuons la transformation est appelée un *processus thermodynamique*. Dans ce processus, de l'énergie thermique peut être transférée du réservoir de chaleur au gaz ou retirée du gaz pour être évacuée vers le réservoir de chaleur et, de même, du travail peut être effectué par ou sur le système lorsque le piston monte ou descend. Nous effectuons ces transferts de chaleur et de travail d'une manière telle que le gaz soit toujours en équilibre, c.à.d. que toutes les parties du gaz

## Le Premier principe de la Thermodynamique

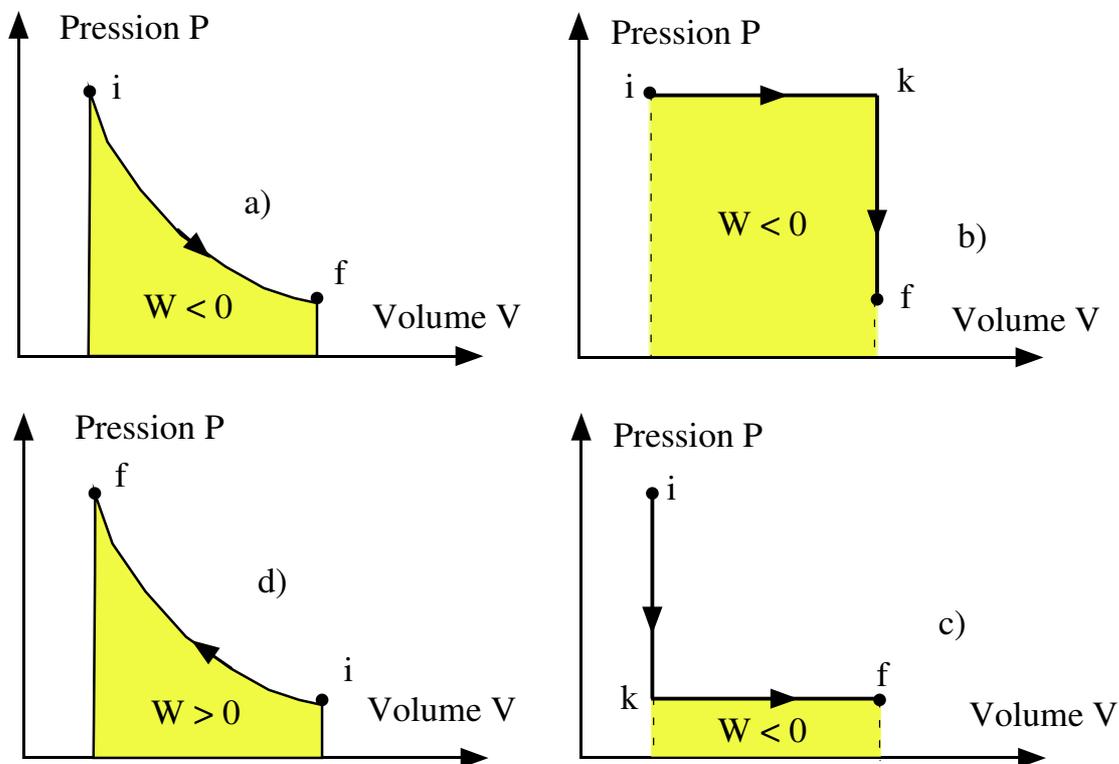
sont toujours en équilibre thermique.

Supposons que nous enlevions peu à peu des grains de grenaille du piston, permettant ainsi au gaz de pousser le piston vers le haut d'une distance  $d\vec{r}$  avec une force  $\vec{F}$ . Comme le déplacement est petit, nous pouvons considérer que la force  $\vec{F}$  est constante pendant ce déplacement. La force  $\vec{F}$  a un module égal à  $P \cdot S$  où  $P$  est la pression du gaz (constante pendant ce petit déplacement) et  $S$  la surface du piston. L'élément de travail est ainsi :

$$\delta W = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -(P \cdot S)(dr) = -P(S dr) = -P dV$$

**Convention** 1) Nous prenons la convention de nous mettre du point de vue du gaz (ou du système) : s'il se détend, il fournit du travail, s'il est comprimé, il absorbe du travail. Nous avons ici un signe - puisque le gaz travaille, fait bouger le piston et cède de l'énergie.

2) Nous avons noté  $\delta W$  (et non  $dW$ ) pour bien indiquer que c'est un échange de travail et non pas une différentielle.



Quand nous avons enlevé suffisamment de grenaille pour que le volume soit

passé de  $V_i$  à  $V_f$ , le travail total fourni par le gaz est de :

$$W = \int \delta W = - \int_{V_i}^{V_f} P dV = \text{aire sous la courbe}$$

[Nous devons faire une intégrale car, dans le processus, la température et la pression du gaz peuvent aussi varier]

Il existe de multiples façons de passer de l'état  $i$  à l'état  $f$  et les figures de la page précédente en donnent quelques exemples. Sur les figures **a)**, **b)** et **c)**, les courbes indiquent le trajet, dans le diagramme  $P - V$ , que décrivent les variables  $P$  et  $V$  du gaz lors des différents processus.

- a) Sur la figure a), nous lisons que la pression décroît lorsque le volume augmente; c'est le processus que nous venons de décrire; le travail développé par le gaz est donné par l'aire colorisée sous la courbe. Avec notre convention, ce travail est négatif car fourni par le système.
- b) Dans la transformation de la figure b), la transformation se fait en deux étapes : la première de  $i$  à  $k$ , puis de  $k$  à  $f$ .

L'étape de  $i$  à  $k$  se fait à pression constante, ce qui veut dire que nous ne touchons pas au poids sur le piston, mais augmentons la température du gaz en lui apportant de la chaleur afin que son volume augmente de  $V_i$  à  $V_f$  (Chauffer un gaz en maintenant sa pression constante l'oblige à augmenter son volume) . Dans cette étape, le gaz développe un travail,  $W < 0$ , pour faire monter le piston et absorbe une quantité de chaleur  $Q$  : cette quantité  $Q$  de chaleur est positive puisqu'absorbée par le gaz et vient de la source de chaleur.

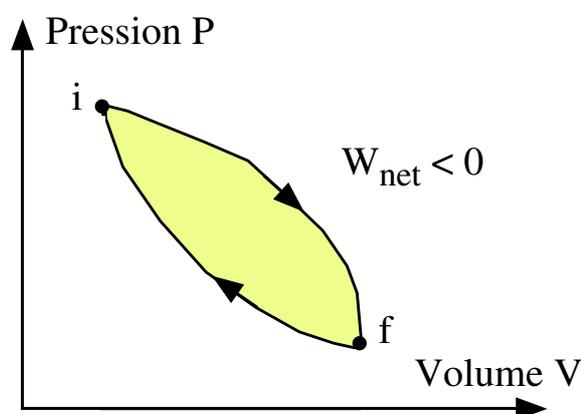
L'étape de  $k$  à  $f$  s'effectue à volume constant : on bloque donc le piston et on refroidit le gaz pour que sa pression baisse en évacuant une quantité de chaleur  $Q$  vers la source de chaleur.

Dans toute cette transformation, le travail n'est échangé que dans l'étape de  $i$  à  $k$ , alors que la chaleur a été échangée dans les deux étapes. Le bilan de l'échange de chaleur n'est pas nulle et le travail total produit par le gaz est figuré par la zone colorisée.

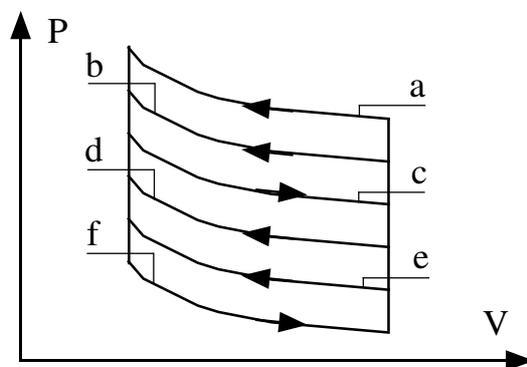
## Le Premier principe de la Thermodynamique

- c) Sur la figure c), une autre transformation de  $i$  à  $f$  est montrée avec un travail moins important fourni par le gaz comparé à la transformation b).
- d) Sur la figure d), nous avons une compression : le gaz reçoit du travail ( $W > 0$ ).

Sur la figure ci-dessous, nous avons dessiné le diagramme  $P - V$  correspondant à un “cycle” : le gaz revient à son état initial  $i$ . Comme le travail échangé est représenté par l’aire sous la courbe  $P - V$ , le travail net produit par le gaz est la somme algébrique des travaux des 2 étapes de  $i$  à  $f$ , puis de  $f$  à  $i$ . Il est ici négatif.



**Point de contrôle.** Dans le diagramme  $P - V$  ci-dessous, un gaz peut effectuer 6 transformations correspondant aux courbes dessinées ; ces transformations sont toutes connectées par des transformations à  $V = cst$  (les droites verticales). Quelles sont les 2 transformations qui doivent participer à un cycle si le travail “net” que le gaz fournit doit être maximum ?



## Le premier principe de la Thermodynamique

Nous venons de voir que le système peut passer d'un état initial à un état final en échangeant travail et chaleur selon le "processus" par lequel la transformation a été faite. Un fait expérimental cependant : pour un état initial et un état final donnés, la somme  $W + Q$  est indépendante du processus; elle ne dépend que des états final et initial, alors que toutes les autres combinaisons de  $Q$  et  $W$ , y compris  $Q$  uniquement et  $W$  uniquement,  $Q - W$  ou  $Q - 2W$  dépendent du "chemin" ("processus") par lequel le système est passé.

Rappel : nous avons défini au début de ce chapitre **l'énergie interne**, somme de l'énergie cinétique des particules par rapport à leur CM et de leur énergie potentielle d'interaction.

Un travail mécanique échangé par le mouvement du piston modifie le volume et, par conséquent, la distance entre les particules du gaz, ce faisant, il modifie son énergie potentielle interne. Un apport (positif ou négatif) de chaleur modifie la vitesse des particules, c'est à dire l'énergie cinétique du gaz (nous reviendrons au chapitre prochain sur ce point). Il n'est donc pas étonnant que

$$- \Delta U = W + Q,$$

-  $\Delta U$  ne dépend pas du processus considéré : les états initial et final de notre gaz ne sont caractérisés que par l'énergie cinétique des particules et par leur énergie potentielle interne, mais pas par les processus utilisés pour y arriver.

L'énergie interne est, pour cette raison, une *fonction d'état*.

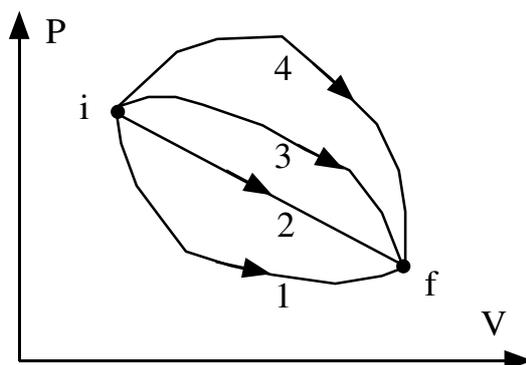
La relation  $\Delta U = W + Q$  est le premier principe de la thermodynamique. C'est un principe donnant le bilan d'énergie.

## Le Premier principe de la Thermodynamique

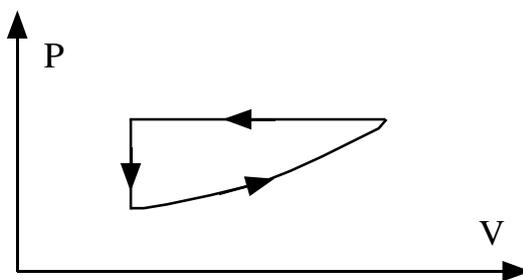
Dans le cas d'un cycle, c.à.d. le cas où le gaz revient à son état initial,

$$\oint dU = 0$$

**Point de contrôle.** La figure ci-dessous montre, sur un diagramme  $P - V$ , 4 processus effectués sur un gaz de l'état  $i$  à l'état  $f$ . Classez les processus dans l'ordre décroissant a) de la variation de l'énergie interne  $\Delta U$ , b) du travail développé par le gaz, c) de la quantité de chaleur qui lui a été apportée.



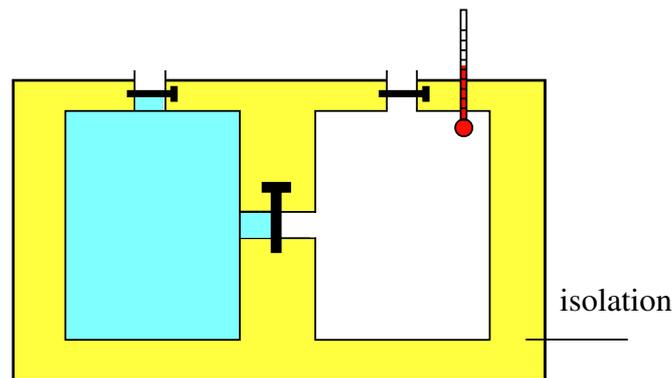
**Point de contrôle.** Pour le cycle dessiné ci-dessous sur un diagramme  $P - V$ , a) la variation d'énergie interne  $\Delta U$ , b) le transfert de chaleur, est-il positif, zéro ou négatif?



### Quelques applications du premier principe

a) **Processus cyclique.** Après des échanges de chaleur et de travail, le système revient à son état initial. Son énergie interne ne change donc pas :  $\oint dU = 0$  et  $Q = -W$  : le bilan de l'échange de chaleur est égal (au signe près) à celui de l'échange de travail (avec la convention de signes adoptée).

- b) **Processus adiabatique.** Un processus adiabatique est celui dans lequel le système est si bien isolé qu'aucun échange de chaleur ne se fait avec l'extérieur. On a donc  $\Delta U = W$  (avec la convention de signe que nous avons adoptée).
- c) **Processus à volume constant.** Si nous faisons une transformation à volume constant, aucun travail mécanique ne peut être échangé. Dans ce cas,  $\Delta U = Q$  (avec la convention de signe que nous avons adoptée).
- d) **Détente de Joule.** Il s'agit ici d'une détente du gaz initialement confiné dans le compartiment de gauche. Le compartiment de droite a été vidé. L'enceinte entourant le gaz est isolée thermiquement : aucun échange de chaleur avec l'extérieur n'a lieu (processus adiabatique)  $Q = 0$ .



Expérience de Joule (1843)

En ouvrant la vanne centrale, l'air se détend (il ne s'agit évidemment pas d'un processus lent fait à l'équilibre). Puisque le gaz se précipite dans le vide, aucun travail ne peut être recueilli ni ne doit être fourni  $W = 0$ . [Nous ne pouvons pas dessiner, pour cette détente de Joule, le diagramme  $P-V$ , parce que le processus ne se fait pas à l'équilibre et la pression n'est pas définie en chaque point en tout instant.]

Comme aucun échange de travail ni de chaleur avec l'extérieur n'a eu lieu,  $\Delta U = 0$ .

## Le Premier principe de la Thermodynamique

$$\Delta U = W + Q$$

Processus	Restriction	Conséquence
Cycle	$\Delta U = 0$	$W = -Q$
Adiabatique	$Q = 0$	$\Delta U = W$
Volume constant	$W = 0$	$\Delta U = Q$
Détente de Joule	$Q = W = 0$	$\Delta U = 0$

### • Détente isobare :

Un gaz (nous ne spécifions pas s'il est ou non parfait) se détend d'un volume  $V_1$  à un volume  $V_2$  à pression constante. Quel est le travail qu'il fournit ?

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV \underbrace{=}_{P=cst} - P \int_{V_1}^{V_2} dV = P (V_1 - V_2)$$

### • Détente isotherme :

Un gaz parfait se détend à température constante. Quel est le travail fourni ?

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{NkT}{V} dV \underbrace{=}_{T=cst} - NkT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$W = NkT \ln \frac{V_1}{V_2}$$

On doit ici fournir de la chaleur au gaz durant la détente pour le maintenir à température constante !

Des deux exemples précédents, nous constatons que le travail dépend du chemin suivi entre les états 1 et 2 ; seule la combinaison  $Q + W = \Delta U$  est indépendante du processus choisi pour passer de l'état 1 à l'état 2 .

## Absorption de la chaleur par les solides et liquides

### Chaleur spécifique

Sauf dans le cas d'une transition de phase, un échange de chaleur  $\delta Q$  entraîne une variation de température  $dT$ . On définit la *capacité thermique* comme étant le coefficient de proportionnalité entre  $\delta Q$  et  $dT$  :

$$\delta Q = C dT \Rightarrow Q = C \Delta T = C (T_f - T_i)$$

On rapporte généralement la capacité thermique à l'unité de masse et on obtient la *chaleur spécifique*

$$c = \frac{1}{M} C \text{ et } Q = M c \Delta T = M c (T_f - T_i)$$

**Attention !** Pour déterminer et pour utiliser les chaleurs spécifiques des substances, on doit faire attention aux conditions sous lesquelles la chaleur a été transférée à la substance. Pour les solides et les liquides, nous faisons souvent ce transfert de chaleur à pression constante, par exemple, à la pression atmosphérique. Nous pouvons aussi envisager de le faire à volume constant : ceci implique que nous devons maintenir la substance pour que les dilatations sous l'effet de l'élévation de la température soient contrecarrées. Pour les solides et les liquides, les différences des chaleurs spécifiques à pression et à volume constants sont cependant peu importants (quelques pourcents). Nous allons voir au chapitre prochain qu'il n'en est pas de même pour les gaz.

**Point de contrôle** Une quantité de chaleur  $Q$  apportée à 1 g d'une substance  $A$  élève sa température de  $3^\circ C$  ; pour 1 g d'une substance  $B$ , cette même quantité  $Q$  permet une élévation de température de  $4^\circ C$ . Quelle est la substance qui a la plus grande chaleur spécifique ?

### Chaleur latente

Dans les changements de phase, la température demeure constante. La chaleur absorbée par la substance (ou retirée à la substance) lui permet de changer de phase.

Exemple : la fusion . Dans l'état solide, les molécules sont pratiquement bloquées dans une structure rigide par leur attractions mutuelles. En absorbant de l'énergie sous forme de chaleur, les molécules ont plus d'énergie pour pouvoir s'échapper de ces sites ; elles peuvent toujours former temporairement des agrégats, mais l'échantillon n'a plus la structure rigide, peut maintenant couler et épouser la forme du conteneur. Si on apporte encore plus d'énergie, les molécules ont encore davantage d'énergie et peuvent maintenant remplir tout volume mis à leur disposition.

La **chaleur latente**  $L$  est la chaleur qu'il faut fournir (ou retirer) pour effectuer la transformation de phase d'une masse unité de la substance :

$$Q = L M$$

On trouvera dans les tables numériques les chaleurs spécifiques des substances usuelles ainsi que leurs points de fusion et d'ébullition et leurs chaleurs latentes de fusion et de vaporisation.

Pour l'eau, ces valeurs sont :

$$c = 1 \text{ cal/g} \cdot \text{C}^\circ = 4190 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

$$\text{Point de fusion } 273 \text{ K} \quad \text{Chaleur latente de fusion } L_f = 333 \text{ kJ/kg}$$

$$\text{Point d'ébullition } 373 \text{ K} \quad \text{Chaleur latente de vaporisation } L_v = 2256 \text{ kJ/kg.}$$

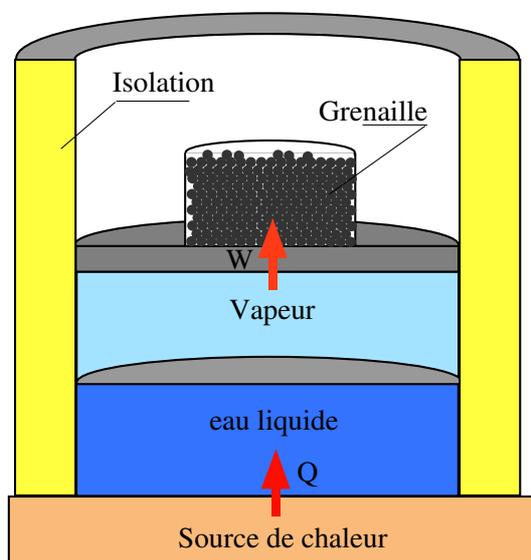
### Un exemple d'application

Un kilogramme d'eau à  $100^\circ \text{C}$  est convertie en vapeur dans un cylindre muni d'un piston comme le montre la figure ci-après. Le processus est effectué à la pression atmosphérique standard ( $1 \text{ atm} = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$ ). Le volume de l'eau passe de  $1,00 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  à l'état liquide à  $1,671 \text{ m}^3$  à l'état de vapeur.

- Quelle est le travail effectué par le système durant ce processus ?
- Quelle est la chaleur fournie au système durant ce processus ?
- Quelle est la variation de l'énergie interne du système ?

## Le Premier principe de la Thermodynamique

Dans ce petit problème, le système fournit du travail puisque le volume augmente. Le système reçoit aussi de la chaleur qui sert à la vaporisation de l'eau. Nous ne pouvons encore rien dire de la variation de l'énergie interne du système.



a) Calcul du travail effectué par le système :

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} P dV \underbrace{=}_{P=cst} - P \int_{V_i}^{V_f} dV = P (V_i - V_f)$$

$$W = 1,01 \times 10^5 (1,00 \times 10^{-3} - 1,671) = -168,67 \text{ kJ}$$

b) Calcul de la chaleur absorbée par le système :

$$Q = L_v M = 2256 \text{ kJ}$$

c) Variation de l'énergie interne du système :

$$\Delta U = Q + W = 2256 - 168,67 = 2087 \text{ kJ}$$

$\Delta U$  est positif ; avec notre convention, ceci veut dire que le système a acquis de l'énergie interne : l'énergie calorifique a servi à vaporiser le liquide et a été également utilisée pour fournir le travail  $W$ . L'état final est un état de vapeur où les molécules sont dispersées, leur distance mutuelle est à la fin plus grande qu'au départ, leur énergie potentielle interne, une des composantes de l'énergie interne, est donc plus grande.

# Physique Générale

## Introduction à la

## Théorie cinétique des gaz

TRAN Minh Tâm

### Table des matières

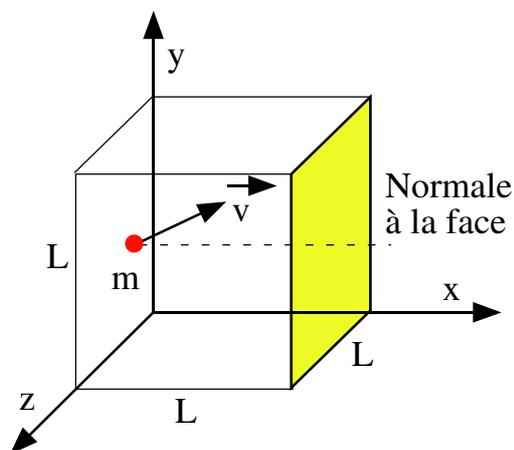
<b>Mécanique</b>	<b>214</b>
La pression et la vitesse quadratique moyenne . . . . .	214
L'énergie cinétique . . . . .	216
<b>Distribution des vitesses des particules</b>	<b>217</b>
Distribution des vitesses à 3 dimensions . . . . .	217
Moyennes, vitesse la plus probable, etc... . . . . .	218
<b>Equipartition de l'énergie</b>	<b>220</b>
Degrés de liberté . . . . .	220
Equipartition de l'énergie . . . . .	221

<b>Chaleurs spécifiques d'un gaz parfait</b>	<b>222</b>
Chaleur spécifique à volume constant d'un gaz parfait . . . . .	222
Chaleur spécifique à pression constante . . . . .	223
Détente adiabatique d'un gaz parfait . . . . .	225
<b>Phénomènes de Transport</b>	<b>228</b>
Section efficace - Définition du Libre parcours moyen . . . . .	228
Collisions dans un gaz . . . . .	229
Viscosité . . . . .	230
Conductibilité thermique . . . . .	232
Diffusion . . . . .	234

Nous allons considérer  $N$  molécules dont nous allons tenter de déterminer les relations existant entre la pression, la vitesse, la température et l'énergie cinétique.

### La pression et la vitesse quadratique moyenne

Considérons  $N$  molécules enfermées dans un cube de côté  $L$ . Les parois de ce cube sont maintenues à la température  $T$ . Le gaz constitué de ces molécules est un gaz parfait : en effet, nous allons supposer que les molécules n'ont pas d'interaction entre elles autre que des chocs.



Enfermées dans l'enceinte cubique, les molécules de ce gaz ont des collisions avec les parois ; à chaque collision sur la face colorisée perpendiculaire  $x$ , la vitesse de la molécule change de  $v_x$  à  $-v_x$ . La variation de la quantité de mouvement selon  $x$  est ainsi de  $\Delta p_x = -v_x - v_x = -2m v_x$ .

La quantité de mouvement transférée à la paroi perpendiculaire à  $x$  est donc de  $2m v_x$  à chaque collision d'une molécule. La molécule va rebondir entre les deux faces perpendiculaires à  $x$ . L'intervalle de temps entre deux collisions de la molécule sur la face colorisée est de

$$\Delta t = \underbrace{2L}_{\text{aller + retour}} / v_x$$

Le transfert de quantité de mouvement par unité de temps à la face sera de  $\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{2m v_x}{2L/v_x} = \frac{m v_x^2}{L}$  pour 1 molécule.

Par la 2<sup>ème</sup> loi de Newton,  $\frac{\Delta p_x}{\Delta t}$  est la force exercée sur la face colorisée par la molécule. Pour trouver la force totale, nous devons sommer sur toutes les molécules, puis, pour en tirer la pression, diviser par  $L^2$  :

$$P = \frac{F_x}{L^2} = \frac{1}{L^2} \sum_1^N \frac{m v_{x,i}^2}{L} = \frac{N m}{L^3} (v_x^2)_{moy.} = \frac{N m}{V} \langle v_x^2 \rangle$$

$N$  est ici le nombre de molécules du cube, et  $\langle v_x^2 \rangle = (v_x^2)_{moy.}$ , la moyenne du carré des composantes selon  $x$  des vitesses des molécules.

Pour tout molécule,  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ . Les molécules étant nombreuses et ayant des vitesses distribuées de manière isotrope dans l'espace, les moyennes des carrés des composantes selon  $x$ , selon  $y$  et selon  $z$  sont égales et  $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$ . Donc :

$$P = \frac{N m}{3V} \langle v^2 \rangle$$

Cette équation illustre l'esprit de la théorie cinétique des gaz : elle relie une grandeur macroscopique, la pression  $P$ , à une grandeur microscopique, la moyenne du carré, encore appelée la moyenne quadratique, de la vitesse. En réarrangeant l'équation précédente et en utilisant l'équation des gaz parfaits :

$$P V = \frac{N m}{3} \langle v^2 \rangle \quad \underbrace{\quad}_{\text{ég. gaz parfait}} \quad N k T \quad \Rightarrow \quad \langle v^2 \rangle = \frac{3 k T}{m} = \frac{3 R T}{M}$$

puisque  $R = k N_A$  et  $M = N_A m =$  masse molaire du gaz. Le tableau ci-après donne les valeurs de la racine carrée de la vitesse quadratique moyenne pour quelques gaz à la température ambiante.

T = 300 K

Gaz	Masse molaire [g/mol]	$\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ [m/s]	Gaz	Masse molaire [g/mol]	$\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ [m/s]
H <sub>2</sub>	2,02	1920	N <sub>2</sub>	28,0	517
He	4,0	1370	O <sub>2</sub>	32,0	483
Vapeur H <sub>2</sub> O	18,0	645	CO <sub>2</sub>	44,0	412

## L'énergie cinétique

Considérons maintenant une molécule dans notre volume  $V$  ; dans son mouvement, la molécule a des collisions avec la paroi et avec d'autres molécules ; dans ces dernières collisions, la vitesse de notre molécule change. Si nous l'observons pendant un certain intervalle de temps, nous pouvons calculer l'énergie cinétique moyenne de notre molécule. Pour cela, nous faisons l'hypothèse que la moyenne temporelle de la vitesse quadratique est identique à la moyenne de la vitesse quadratique effectuée sur les  $N$  molécules en un instant. Cette hypothèse est justifiée, pour autant que l'énergie totale du système ne soit pas modifiée (pas de variation de l'énergie potentielle extérieure, pas de changement de l'énergie interne) et que l'intervalle d'observation de la molécule soit suffisamment longue.

$$\langle E_{cin} \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$$

En utilisant le résultat du paragraphe précédent :

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m} \quad \Rightarrow \quad \langle E_{cin} \rangle = \frac{3}{2} kT$$

*A une température  $T$  donnée, toutes les molécules d'un gaz parfait, quelque soit leur masse ont la même énergie cinétique moyenne de translation  $\frac{3}{2} kT$ .*

*Mesurer la température d'un gaz, c'est également mesurer l'énergie cinétique moyenne de translation de ses molécules.*

**Point de contrôle** Un mélange gazeux contient 3 types de molécules dont les masses sont  $m_1 > m_2 > m_3$ .

Classez les 3 types de molécules selon **a)** leur énergie cinétique moyenne, **b)** leur vitesse quadratique moyenne.

## Distribution des vitesses des particules

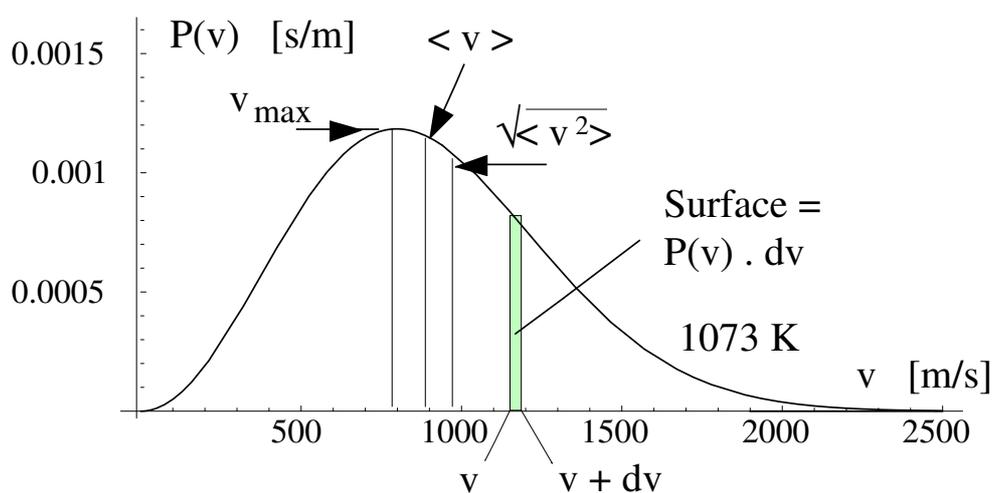
Nous venons de voir la vitesse quadratique moyenne  $\langle v^2 \rangle$  des molécules d'un gaz ; cette vitesse nous donne une première idée sur la vitesse des molécules. Mais nous aimerions en savoir plus, par exemple, quelle est la fraction des molécules qui ont une vitesse plus grande que  $\langle v^2 \rangle$ , plus petite que  $0,5 \langle v^2 \rangle$  ? Pour cela, nous devons connaître la **distribution des vitesses** des molécules.

### Distribution des vitesses à 3 dimensions

L'expression de la fraction des molécules ayant leur vitesse comprise entre  $v$  et  $v + dv$ , quelle que puisse être la direction de cette vitesse, s'écrit :

$$P(v) dv = \frac{dN}{N} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{m v^2}{2 k T} \right) v^2 dv$$

Distribution des vitesses (J.C. Maxwell, 1860)



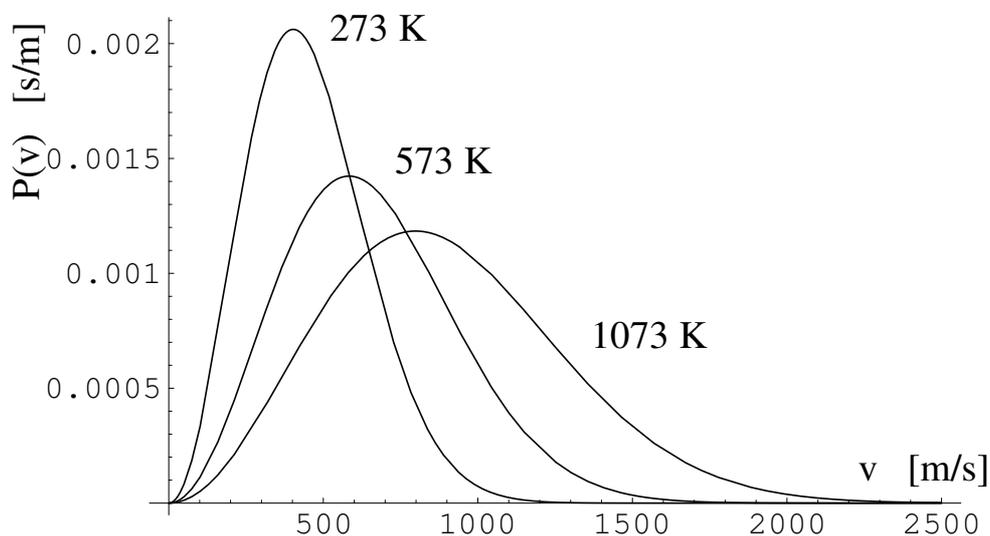
Cette distribution est obtenue dans l'hypothèse que chacune des composantes  $v_x$ ,  $v_y$  et  $v_z$  est distribuée selon une loi de Gauss.  $P(v)$  est une "densité de probabilité" ; pour n'importe quelle vitesse  $v$ , le produit  $P(v) dv$ , grandeur sans dimension, est la **probabilité** que la molécule ait une vitesse comprise entre  $v$  et  $v + dv$ .

## Distribution des vitesses des particules

Puisque  $P(v) dv = \frac{dN}{N}$ , forcément, si nous sommions la probabilité  $P(v) dv$  sur toutes les valeurs possibles de la vitesse, c.à.d. entre 0 et l'infini, nous obtenons :  $\int_0^{\infty} P(v) dv = 1$ .

La fraction des molécules à la température  $T$ , ayant leur vitesse comprise entre  $v_1$  et  $v_2$  est :  $\text{fraction} = \int_{v_1}^{v_2} P(v) dv$ .

La distribution de Maxwell des vitesses varie rapidement avec la température du gaz :



### Moyennes, vitesse la plus probable, etc...

Pour calculer la moyenne d'une grandeur dont nous connaissons la densité de probabilité, nous pondérons cette grandeur par la probabilité et sommions. Ainsi :

**Vitesse moyenne :**

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v \cdot P(v) dv = \sqrt{\left( \frac{8 k T}{\pi m} \right)}$$

### Vitesse quadratique moyenne

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 \cdot P(v) dv = \frac{3kT}{m}$$

**Vitesse la plus probable** : elle correspond au maximum de la distribution de vitesses ; pour l'obtenir, il suffit d'annuler la dérivée  $\frac{dP(v)}{dv}$  :

$$\frac{dP(v)}{dv} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

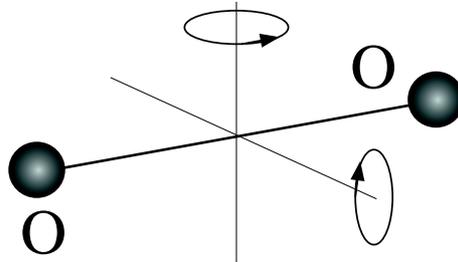
**Exemple** Oxygène à 300 K : avec  $k = 1,38 \times 10^{-23}$  J/K, et  $m = 32 \times 10^{-3} / (6,022 \times 10^{23})$  kg :

- Vitesse moyenne :  $\langle v \rangle = 445,45$  m/s
- Vitesse quadratique moyenne :  $\langle v^2 \rangle = 233\,767$  m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup> et  
 $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = 483,50$  m/s
- Vitesse la plus probable :  $v_{max} = 394,80$  m/s

## Degrés de liberté

Pour un gaz monoatomique comme He, Ne, Ar, Xe, ... l'énergie cinétique de translation (égale à  $\frac{3}{2}kT$ ) constitue l'entier de l'énergie cinétique, ces atomes, ne pouvant avoir que des translations dans les 3 directions de l'espace.

Pour des molécules di-atomiques, que nous pouvons nous représenter comme les deux boules d'un haltère rigide, nous pouvons imaginer les deux mouvements supplémentaires de rotation figurés sur la figure suivante :



Ces deux mouvements de rotation s'ajoutent au mouvement de translation du CM de la molécule.

Nous pouvons aussi imaginer que les atomes de la molécule peuvent osciller indépendamment l'un de l'autre le long de l'axe qui les joint.

Le nombre de coordonnées nécessaires pour localiser tous les atomes dans une molécule est appelé, dans notre problème, *nombre de degrés de liberté*  $f$ . Ainsi, pour la molécule diatomique :

- en première approximation, nous pouvons considérer que la molécule est décrite par son CM  $\Rightarrow$  3 degrés de liberté,
- nous pouvons ensuite affiner notre vision en la molécule comme un haltère rigide : nous devons ajouter 2 coordonnées pour spécifier l'orientation de l'haltère dans l'espace  $\Rightarrow$  5 degrés de liberté,
- finalement, nous pouvons prendre en considération le fait que les atomes peuvent vibrer indépendamment  $\Rightarrow$  7 degrés de liberté.

## Equipartition de l'énergie

Pour une molécule diatomique, à température ambiante, nous pouvons ne considérer que le mouvement de translation du CM et les rotations ; au delà de 2000 K, l'oscillation doit être pris en compte.

Molécule	Exemple	Degrés de liberté		
		Translation	Rotation	Total $f$
Monoatomique	$He$	3	0	3
Diatomique	$O_2$	3	2	5
Polyatomique	$CH_4$	3	3	6

### Equipartition de l'énergie

Chaque type de molécule a ainsi un certain *nombre de degrés de liberté*. Ces degrés de liberté représente les manières dont la molécule peut stocker de l'énergie. Ainsi, pour la translation, un gaz mono-atomique peut avoir de l'énergie cinétique de translation selon  $x$ , selon  $y$  ou selon  $z$ .

James C. Maxwell introduit le théorème d'équipartition de l'énergie en *associant, en moyenne, à chaque degré de liberté une énergie cinétique de  $\frac{1}{2} k T$  par molécule (ou  $\frac{1}{2} R T$  par mole)*.

Ainsi, pour  $N$  molécules présentant un nombre de degrés de liberté  $f$  :  
 $E_{cin} = \frac{1}{2} f N k T$  ou  $E_{cin} = \frac{1}{2} f N_{mole} R T$  (en moyenne).

Pour des atomes :  $f = 3$  et nous retrouvons bien  $\langle E_{cin} \rangle = \frac{3}{2} N k T$

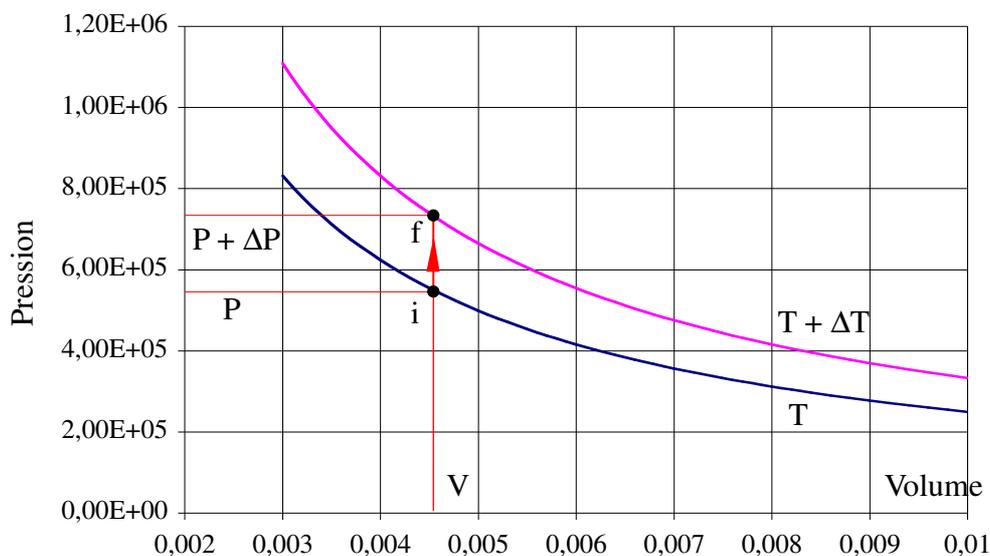
## Chaleurs spécifiques d'un gaz parfait

Nous avons vu au chapitre précédent qu'un gaz parfait est un gaz dilué dont nous pouvons négliger l'énergie potentiel d'interaction des molécules entre elles. Si seule l'énergie cinétique des molécules entre dans la définition de l'énergie interne, cette dernière peut s'écrire :  $U = \frac{1}{2} N f k T$  ou, pour  $N_{mole}$  :  $U = \frac{1}{2} N_{mole} f R T$ ,  $f$  étant le nombre de degrés de liberté de la molécule.

*L'énergie interne  $U$  d'un gaz parfait ne dépend que de sa température. Toute variation  $\Delta U$  de l'énergie interne d'un gaz parfait est due uniquement à une variation de sa température, quelque soit le processus qui a causé cette variation de température.*

### Chaleur spécifique à volume constant d'un gaz parfait

Prenons  $N_{mole}$  d'un gaz parfait à la pression  $P$ , au volume  $V$  et à la température  $T$  dans un cylindre fermé par un piston : nous sommes à l'état  $i$  figuré sur le dessin. En apportant une quantité  $Q$  de chaleur au gaz, tout en gardant le piston fixe, nous passons à l'état  $f$ .



## Chaleurs spécifiques d'un gaz parfait

L'état  $f$  est caractérisé par la pression  $P + \Delta P$ , le volume  $V$  et la température  $T + \Delta T$ . Nous avons :  $Q = C'_V N_{mole} \Delta T$ .

$C'_V$  est appelé la chaleur spécifique molaire à volume constant. Introduisant la chaleur échangée dans le 1er principe de la thermodynamique :

$$\Delta U = C'_V N_{mole} \Delta T + \underbrace{W}_{=0} \Rightarrow C'_V = \frac{\Delta U}{N_{mole} \Delta T} \text{ (définition de } C'_V)$$

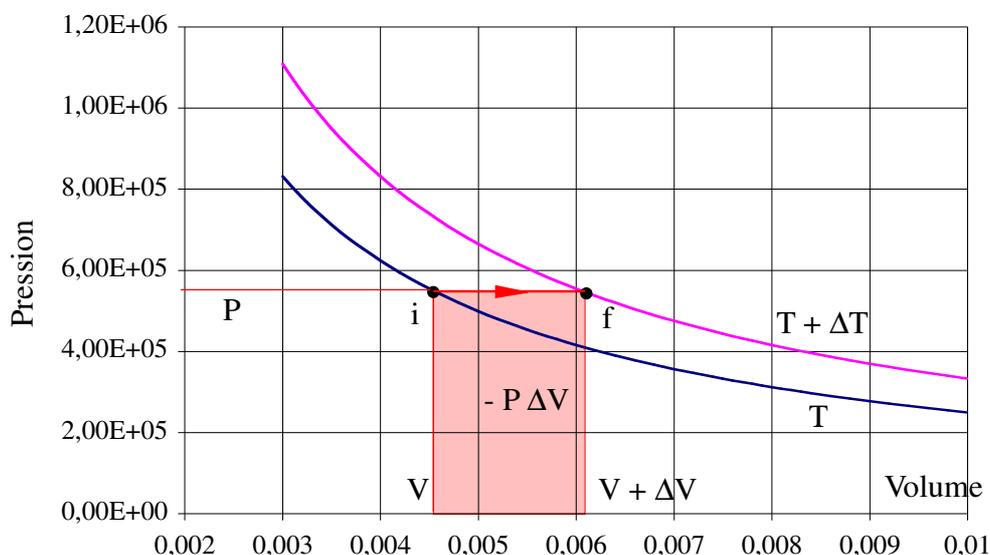
Comme  $U = \frac{1}{2} N_{mole} f R T$ ,  $C'_V = \frac{1}{2} f R$  et

$$\Delta U = N_{mole} C'_V \Delta T$$

	$f$	$C'_V$ [J/mol · K]
Gaz monoatomique	3	$\frac{3}{2} R = 12,47$
Gaz diatomique	5	$\frac{5}{2} R = 20,78$
Gaz polyatomique	6	$3 R = 24,94$

### Chaleur spécifique à pression constante

Nous réalisons maintenant une élévation de température de  $N_{mole}$  d'un gaz parfait de  $T$  à  $T + \Delta T$ , mais en maintenant la pression du gaz constante. La quantité de chaleur à apporter est maintenant  $Q = C'_P N_{mole} \Delta T$ .



## Chaleurs spécifiques d'un gaz parfait

De  $PV = N_{mole} RT$ , nous tirons :

$$W = -P \Delta V = -N_{mole} R \Delta T$$

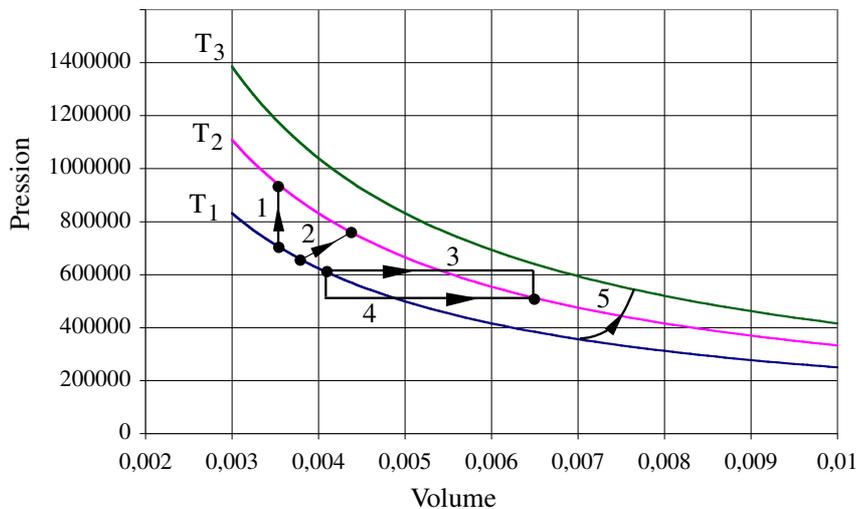
De  $\Delta U = W + Q$ , nous tirons :

$$Q = \Delta U - W = N_{mole} C'_V \Delta T + N_{mole} R \Delta T = C'_P N_{mole} \Delta T$$

$$C'_P - C'_V = R$$

Nous avons  $C'_P > C'_V$  : en effet, dans un processus à pression constante, pour obtenir une élévation de température  $\Delta T$ , nous devons apporter davantage de chaleur que dans un processus à volume constant pour obtenir la même élévation de température, car une partie de cette énergie a servi à augmenter de  $\Delta V$  le volume du gaz.

**Point de contrôle** La figure ci-après donne 5 processus auxquels est soumis un gaz parfait. Ordonnez ces processus selon l'ordre décroissant de la variation de l'énergie interne.



**Exemple** Une bulle de 5 moles d'Hélium est immergée dans l'eau à une profondeur constante. Cette dernière voit sa température augmenter de  $\Delta T = 20 \text{ K}$  et, par conséquent, la bulle d'Hélium gonfle. L'Hélium est un gaz monoatomique et peut être considéré comme un gaz parfait.

– Quelle est la quantité de chaleur apportée à la bulle d'He ?

Nous avons ici, pour la bulle, un processus à pression constante : en effet,

## Chaleurs spécifiques d'un gaz parfait

la bulle se trouve à une profondeur constante et nous pouvons négliger la variation de masse spécifique de l'eau quand sa température augmente de 20 K.

$$Q = N_{mole} C'_P \Delta T = N_{mole} (C'_V + R) \Delta T = N_{mole} \left( \frac{3}{2} R + R \right) \Delta T$$

$$Q = N_{mole} \frac{5}{2} R \Delta T = 2077,5 \text{ Joules}$$

– Quelle est la variation de l'énergie interne de la bulle d'He ?

Bien que la bulle ne soit pas soumise un processus à volume constant, son énergie interne n'augmente pas davantage que si l'on avait eu un processus à  $V = cst$  entre  $T$  et  $T + \Delta T$  ; en effet,  $\Delta U = Q + W$ , une partie de la chaleur  $Q$  apportée par l'échauffement à pression constante a servi à augmenter le volume de la bulle (on doit "travailler" contre la pression hydrostatique).

$$\Delta U = N_{mole} C'_V \Delta T = N_{mole} \frac{3}{2} R \Delta T = 1246,5 \text{ Joules}$$

– Quel est le travail fourni par la bulle pour se gonfler ?

Par le premier principe :  $W = \Delta U - Q$

$$W = 1246,5 - 2077,5 = -831 \text{ Joules}$$

Le travail est négatif puisque fournie par la bulle.

## Détente adiabatique d'un gaz parfait

Considérons 1 mole de gaz parfait enfermé dans un cylindre fermé par un piston isolé. Le gaz n'est plus en contact avec la source de chaleur mais est entièrement isolé.

Si le gaz est isolé thermiquement,  $\delta Q = 0$ , par conséquent :

$$\delta Q = dU - \delta W = dU + P dV \underset{\text{gaz parfait}}{=} C'_V dT + \frac{RT}{V} dV = 0$$

En divisant par  $C'_V T$  :

$$\Rightarrow \frac{dT}{T} + \frac{R}{C'_V} \frac{dV}{V} = 0$$

## Chaleurs spécifiques d'un gaz parfait

Si nous nous limitons dans des domaines de températures telles que  $C'_V \approx cste$ , nous pouvons intégrer l'équation précédente :

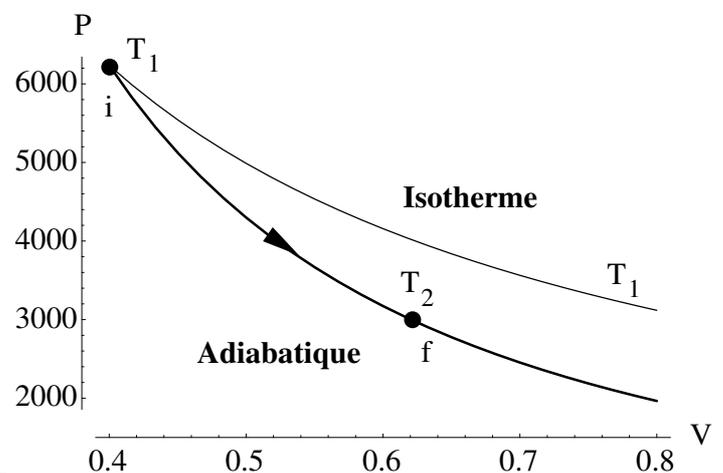
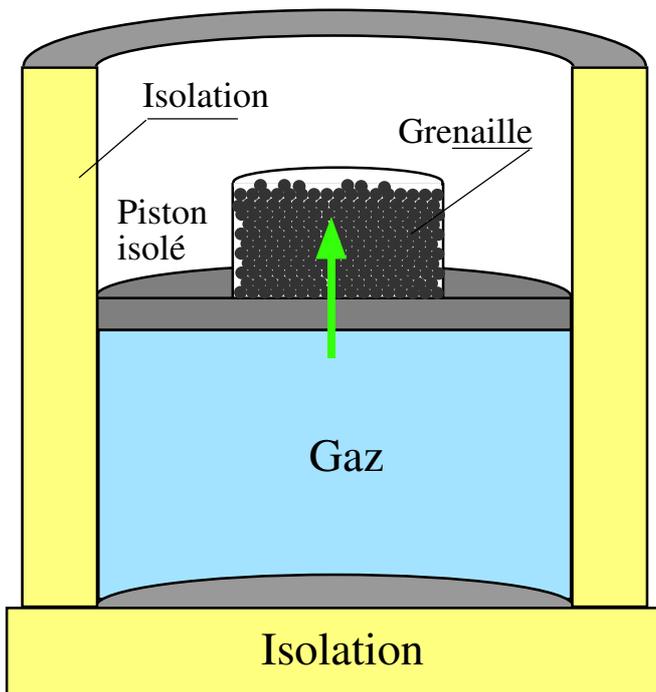
$$\ln T + \frac{R}{C'_V} \ln V = cste \Rightarrow T V^{R/C'_V} = cste$$

Utilisons l'équation de gaz parfaits ( $PV = RT$ ) pour transformer la précédente équation :

$$T V^{R/C'_V} = P V^{1+R/C'_V} = P V^{\left(\frac{C'_P}{C'_V}\right)} = cste$$

On note souvent par  $\gamma = \frac{C'_P}{C'_V}$  le rapport des chaleurs spécifiques à pression et à volume constants ( $\gamma > 1$ ). Ainsi, pour une transformation adiabatique, le gaz parfait obéit à

$$P V^\gamma = cste \quad \gamma = \frac{C'_P}{C'_V}$$



Pour un gaz parfait monoatomique :

$$C'_P = \frac{5}{2}R, \quad C'_V = \frac{3}{2}R, \quad \gamma = \frac{5}{3}$$

Nous donnons sur la figure ci-dessus la variation de la pression en fonction du volume dans une détente isotherme et dans un détente adiabatique,

## Chaleurs spécifiques d'un gaz parfait

pour un gaz parfait monoatomique. Nous remarquons que, pour une baisse de pression donnée, le volume final atteint est moindre dans une détente adiabatique par rapport à la détente isotherme. Ceci est dû au fait que la température baisse dans une détente adiabatique.

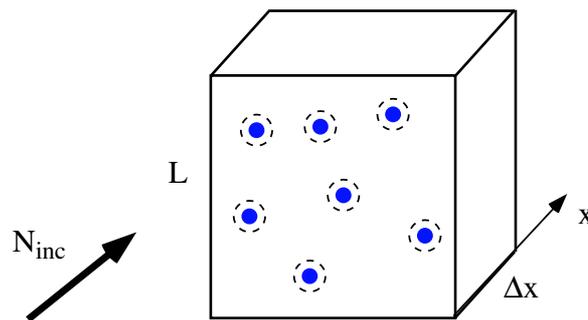
**Point de contrôle** Que pouvez-vous dire du travail mécanique échangé lors d'une détente adiabatique comparé au travail échangé lors d'une détente isotherme ? Quelle est la raison de cette différence ?

Ce sont les phénomènes dans lesquels quelque chose est *transporté* : matière, énergie (chaleur), quantité de mouvement. Ils se passent dans des systèmes qui ne sont pas à l'équilibre thermodynamique, mais cependant *proches* de cet équilibre.

### Section efficace - Définition du Libre parcours moyen

On considère les molécules d'un fluide comme des sphères rigides de diamètre  $d$ . Si le centre d'une molécule passe à une distance inférieure ou égale à  $d$  du centre d'une autre, on a une *collision*.

Considérons un volume de fluide de section  $L \times L$ , d'épaisseur  $\Delta x$ , avec  $n$  molécules par unité de volume, bombardé par des molécules identiques de vitesse parallèle à l'axe  $x$ .



$$\frac{N_{col}}{N_{inc}} = \frac{\text{Nb de collisions}}{\text{Nb de molécules incidentes}} = \frac{\text{Surface des "cibles"}}{\text{Surface totale}}$$

$$\text{Surface d'une cible} = \sigma \quad \text{Surface des cibles} = nL^2\sigma\Delta x$$

$$\frac{N_{col}}{N_{inc}} = n\sigma\Delta x$$

Chaque collision enlève du *faisceau* une molécule incidente, donc, si nous appelons  $N$  le nombre de particules incidentes (au lieu de  $N_{inc}$ ) :

$$\Delta N = -N_{col} = -Nn\sigma\Delta x$$

Après une distance  $x$  finie, on n'a plus que  $N(x)$  molécules :

$$N(x) = N_0 e^{-n\sigma x}, \quad N_0 = N(x=0)$$

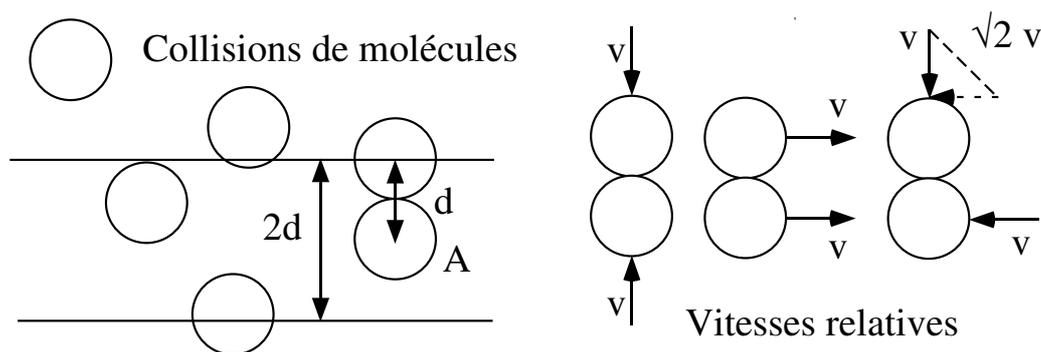
La *section efficace*  $\sigma$  n'est pas nécessairement égale dans tous les cas à la section géométrique  $\pi d^2/4$ , elle rend plutôt compte de l'intensité de l'interaction entre les particules cible et incidentes.

Le *libre parcours moyen*  $\lambda$  est la distance moyenne parcourue par une molécule incidente avant de subir une collision.

### Collisions dans un gaz

Supposons que les molécules soient des sphères rigides de diamètre  $d$  et qu'elles aient une vitesse moyenne  $\langle v \rangle$ . Une molécule A, de vitesse  $\langle v \rangle$ , balayera par unité de temps un volume de  $\pi d^2 \langle v \rangle$ .

Si le gaz contient  $n$  molécules par unité de volume, le nombre de collisions par unité de temps sera  $\pi n d^2 \langle v \rangle$ . En fait, il faut tenir compte du fait que *toutes* les molécules sont en mouvement : on doit prendre les vitesses relatives des molécules les unes par rapport aux autres. La moyenne de la vitesse relative est de  $\sqrt{2} \langle v \rangle$  et le nombre de collisions que la molécule subit est de  $\sqrt{2} \pi n d^2 \langle v \rangle$ .



La grandeur  $\pi d^2$  est appelée "*section efficace*" de collision. On définit également le "*libre parcours moyen*"  $\lambda$  comme la distance moyenne que parcourt la molécule entre deux collisions. Le nombre moyen de collisions que subit la molécule par unité de temps est de  $\sqrt{2} \pi n d^2 \langle v \rangle$  ; pendant ce même intervalle de temps, il a parcouru une distance de  $\langle v \rangle$ . Nous avons

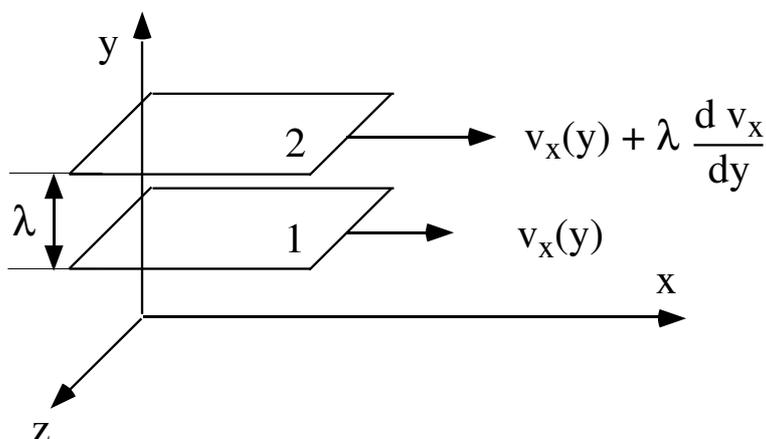
donc :

$$\lambda = \frac{\langle v \rangle}{\sqrt{2} \pi n d^2 \langle v \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi n d^2}$$

Pour calculer le libre parcours moyen, on doit connaître le diamètre  $d$ . On peut, par ex., utiliser le paramètre  $b$  de l'équation du gaz de van der Waals.

### Viscosité

Considérons un gaz en écoulement laminaire dans la direction  $Ox$  ; les vitesses des différentes nappes de ce gaz varient selon  $Oy$ . Une molécule passant de 1 à 2 aura une vitesse, donc une quantité de mouvement, plus faible en moyenne que celles des molécules de la nappe 2 et sera accélérée. L'inverse est évidemment vrai pour les molécules passant de 2 à 1. Le résultat de ces passages est une diminution de la vitesse moyenne des molécules de 2 et une augmentation de celle de 1. Nous pouvons prendre le libre parcours moyen  $\lambda$  comme distance moyenne sur laquelle le transfert de quantité de mouvement se fait.



Si le taux de variation de la vitesse est  $\frac{d\langle v_x \rangle}{dy}$ , la différence de vitesse des deux nappes sera de  $\lambda \frac{d\langle v_x \rangle}{dy}$  et une molécule de masse  $m$  passant d'une

couche à l'autre transportera une quantité de mouvement de  $\pm m \lambda \frac{d\langle v_x \rangle}{dy}$ .

Le nombre de molécules passant *dans les deux sens, par unité de surface et unité de temps* est de  $\frac{1}{2} n \langle v \rangle$ ; la quantité de mouvement qu'ils

véhiculent par unité de temps sera donc

$$\frac{1}{2} n \langle v \rangle \cdot m \lambda \frac{d\langle v_x \rangle}{dy}$$

[Le nombre de molécules dont la distribution des vitesses est isotrope et qui atteignent une surface unité par unité de temps est de  $\frac{dn}{dt} = \frac{1}{4} n \langle v \rangle$ . (Attention, nous supposons ici que la vitesse de molécules est très supérieure à la vitesse des nappes de gaz 1 et 2 : la vitesse moyenne  $\langle v \rangle$  est de plusieurs centaines de  $m/s$ ).]

Le transport de quantité de mouvement par unité de temps obtenu est équivalent à la force de viscosité par unité de surface :

$$\eta \frac{d\langle v_x \rangle}{dy} = \frac{1}{2} n \langle v \rangle \cdot m \lambda \frac{d\langle v_x \rangle}{dy}$$

$$\eta = \frac{1}{2} n \langle v \rangle \cdot m \lambda$$

En utilisant l'expression du libre parcours moyen, nous obtenons :

$$\boxed{\eta = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{m\langle v \rangle}{\pi d^2}} \quad \text{Maxwell}$$

Ceci montre que la viscosité d'un gaz ne dépend pas de sa densité ! Sa vérification expérimentale constitue un des triomphes de la théorie cinétique des gaz.

L'explication physique apparaît dans la démonstration que nous avons faite : à faible densité, nous avons peu de molécules passant d'une couche à l'autre dans le gaz en mouvement. Cependant, le libre parcours moyen étant plus grand dans un gaz de faible densité, le transfert de quantité de mouvement est également proportionnellement plus élevé. À de très fortes densités, nous ne pouvons plus considérer le gaz comme constitué de sphères dures (notre hypothèse de départ) et la viscosité dépend de la densité du gaz.

La théorie cinétique prédit que la viscosité est proportionnelle à  $\langle v \rangle$ , c'est à dire à  $\sqrt{T}$ . L'expérience montre que ce n'est qu'approximativement vrai : la viscosité croît plus rapidement que ne le prévoit la loi en  $\sqrt{T}$ . La raison en est que les molécules ne sont pas des sphères dures de diamètre  $d$ . À haute température, les molécules ont de

grandes vitesses et peuvent pénétrer à l'intérieur du diamètre  $d$  avant de s'en faire repousser ! Cette pénétration augmente la viscosité.

**Résumé sur les étapes de la démonstration.**

Hypothèses : les molécules sont des sphères dures, ayant des collisions élastiques. Le fluide a une vitesse nette selon  $x$  :  $\langle v_x \rangle \ll \langle v \rangle$  .

- Deux nappes de fluide distantes de 1 libre parcours moyen selon  $y$ , direction selon laquelle  $v_x$  varie.
- Une molécule passant d'une nappe à l'autre, transfère un supplément de quantité de mouvement  $\pm m \lambda \frac{d\langle v_x \rangle}{dy}$  .
- S'il y a  $n$  molécules dont la distribution des vitesses est isotrope, le nombre de ces molécules atteignant une surface unité par unité de temps est de  $\frac{dn}{dt} = \frac{1}{4} n \langle v \rangle$  .  
(← long à démontrer.)
- Le transfert de quantité de mouvement entre les deux nappes est de :

$$\frac{1}{4} n \langle v \rangle \left[ m \lambda \frac{d\langle v_x \rangle}{dy} - (-) m \lambda \frac{d\langle v_x \rangle}{dy} \right] = \frac{1}{2} n \langle v \rangle m \lambda \frac{d\langle v_x \rangle}{dy}$$

par unité de temps et de surface des nappes.

- Loi de Newton : Force = transfert de quantité de mouvement par unité de temps. Donc la force de viscosité entre les deux nappes, par unité de surface, est de :

$$F_{viscosité} = \eta \frac{d\langle v_x \rangle}{dy} = \frac{1}{2} n \langle v \rangle m \lambda \frac{d\langle v_x \rangle}{dy} \Rightarrow \eta = \frac{1}{2} n \langle v \rangle m \lambda$$

- Si nous n'avons que des collisions entre sphères dures, nous pouvons utiliser la relation donnant le libre parcours moyen établi avant et :

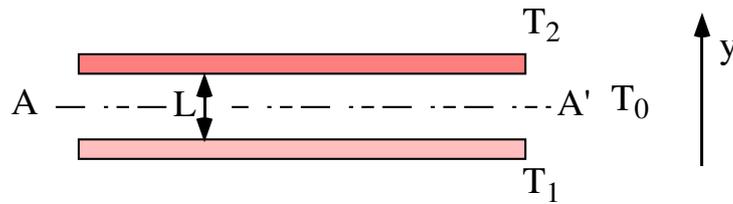
$$\eta = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{m \langle v \rangle}{\pi d^2} \quad \text{indépendant de } n$$

**Conductibilité thermique**

Considérons deux plaques aux températures  $T_1$  et  $T_2$ , séparées par une couche de fluide d'épaisseur  $L$  et de surface  $S$ . Le coefficient de *conductibilité thermique*  $\kappa$  est définie comme le flux de chaleur par unité de temps, par unité de gradient de température à travers une surface unité ;

$$\frac{dQ}{dt} = - \kappa S \frac{dT}{dy}$$

$\frac{dQ}{dt}$  est la quantité de chaleur passant par unité de temps à travers la surface. Le signe - est là parce que la chaleur va de la plaque chaude à la plaque froide.



**Interprétation** : Il y a un transfert d'énergie cinétique par les molécules qui traversent  $AA'$ . L'énergie de celles qui traversent de haut en bas est plus grande que l'énergie de celles qui traversent de bas en haut, si  $T_2 > T_1$

Le problème ici est en tout point identique à celui que nous avons traité lors de la résolution du problème de la viscosité. Nous avons alors une différence de vitesse entre les deux nappes de fluide ; ici, nous avons une différence de température, c.à.d. d'énergie cinétique, avec  $y$ .

On se reportera au développement effectué au paragraphe précédent sur la viscosité. Nous avons alors, pour une surface unité

$$\eta \frac{d\langle v_x \rangle}{dy} = \frac{1}{2} n \langle v \rangle \cdot m \lambda \frac{d\langle v_x \rangle}{dy}$$

$\eta$  était le coefficient de viscosité,  $\langle v \rangle$  la vitesse moyenne des molécules.

En comparant avec l'expression précédente et en remplaçant  $\eta$  par  $\kappa$  et  $\frac{d\langle v_x \rangle}{dy}$  par  $\frac{dT}{dy}$  et par  $\frac{dE_{cin}}{dy}$ , nous avons :

$$\kappa \frac{dT}{dy} = \frac{1}{2} n \langle v \rangle \cdot \lambda \cdot \frac{dE_{cin}}{dy} \quad \text{pour une surface unité}$$

$\frac{dE_{cin}}{dy}$  est ici le taux de variation de  $E_{cin}$ , énergie cinétique moyenne d'une molécule avec la distance  $y$ . Mais :

$$\frac{dE_{cin}}{dy} = \frac{dT}{dy} \cdot \frac{dE_{cin}}{dT} \quad \text{et} \quad \frac{dE_{cin}}{dT} = m c_V,$$

$m$  étant la masse d'une molécule et  $c_V$  la chaleur spécifique. Donc :

$$\kappa = \frac{1}{2} n m c_V \langle v \rangle \cdot \lambda = \frac{1}{2} \rho \cdot c_V \langle v \rangle \cdot \lambda$$

## Diffusion

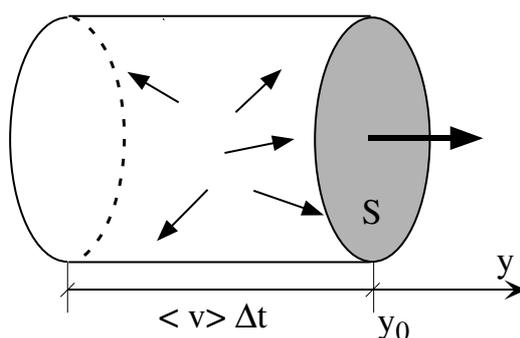
Nous nous intéressons ici à la diffusion dans un mélange de deux gaz : on considère des molécules de type  $\star$  dont le nombre par unité de volume est  $n^\star$ . Ces molécules sont diluées parmi des molécules ordinaires ( $n$  par unité de volume). On suppose que  $n^\star \ll n$ .

Si  $n^\star$  dépend de l'endroit où l'on se trouve, par exemple de  $y$ , il y aura un flux de molécules  $\star$  allant de la région où  $n^\star$  est le plus grand vers la région où  $n^\star$  est le plus petit. Le transport ici est un transport de masse. En appelant  $\Gamma$  le débit des molécules  $\star$ , nous avons

$$\Gamma = -D \frac{dn^\star}{dy} \quad D \text{ est le coefficient de diffusion.}$$

[Le signe  $-$  indique que la diffusion des molécules  $\star$  se fait de la région où leur concentration est la plus grande vers celle où elle est la plus faible].

Pour simplifier, nous allons considérer que les molécules  $\star$  sont très semblables aux molécules ordinaires (approximativement les mêmes masses et les mêmes dimensions). [On peut, par exemple, prendre des molécules *marquées*, technique couramment utilisée dans laquelle on remplace un des atomes de la molécule par un isotope radioactif.]



Supposons que le nombre de molécules  $\star$  par unité de volume soit de  $n_0^\star$  à la surface  $S$  situé à la cote  $y_0$ . Par symétrie, le nombre de ces molécules se déplaçant dans la direction  $+y$  ou  $-y$  est de  $\frac{n^\star}{6}$ . Donc, le nombre de molécules se déplaçant vers  $+y$  en  $\Delta t$  est de  $\frac{1}{6} n^\star S \langle v \rangle \Delta t$  et le nombre

de ces molécules traversant la surface S dans le sens  $+y$  par unité de temps et par unité de surface (débit) sera :  $\Gamma_+ = \frac{1}{6} \frac{n^* S \langle v \rangle \Delta t}{S \Delta t} = \frac{1}{6} n^* \langle v \rangle$

Pour une concentration uniforme,  $\frac{dn^*}{dy} = 0$ ,  $n^* = n_0^*$ , et les débits selon

$\pm y$  sont égaux. Si  $\frac{dn^*}{dy} \neq 0$ , le nombre de molécules se déplaçant dans le sens  $+y$  (respect.  $-y$ ) sera proportionnel à la concentration  $n^*$  à la cote

$$(y_0 - \lambda) \text{ (resp. } (y_0 + \lambda)) : \Gamma_{\pm} = \frac{1}{6} \underbrace{\left( n_0^* \mp \frac{dn^*}{dy} \Big|_{y=y_0} \cdot \lambda \right)}_{\text{concentration en } y_0 \mp \lambda} \langle v \rangle$$

Le débit total s'écrit donc :

$$\Gamma = \Gamma_+ - \Gamma_- = -\frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \frac{dn^*}{dy} \Big|_{y=y_0} \equiv -D \frac{dn^*}{dy} \Big|_{y=y_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{D = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle}$$

## Résumé

Phénomène	Transport de	Expression
Viscosité	Quantité de mouvement	$\eta = \frac{1}{2} n m \lambda \langle v \rangle$
Conductibilité	Energie cinétique	$\kappa = \frac{1}{2} n m \lambda c_V \langle v \rangle$
Diffusion	Masse	$D = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle$

# Physique Générale

## L'entropie et le deuxième principe

TRAN Minh Tâm

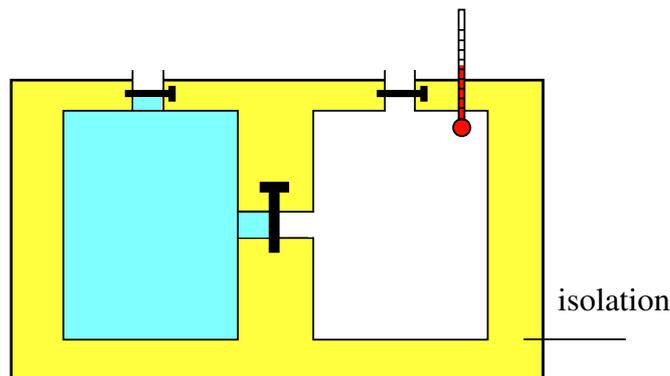
### Table des matières

<b>Retour sur la détente de Joule</b>	<b>236</b>
Comparaison avec une détente isotherme d'un gaz parfait	236
Analyse microscopique de la détente de Joule . . . . .	237
L'entropie . . . . .	240
Résumé . . . . .	242
<b>Le deuxième principe de la Thermodynamique</b>	<b>243</b>
Réversibilité et irréversibilité . . . . .	243
Le deuxième principe . . . . .	244
L'entropie et les machines thermiques . . . . .	246

## Retour sur la détente de Joule

### Comparaison avec une détente isotherme d'un gaz parfait

**Rappel :** la **détente de Joule** (voir figure ci-dessous) est la détente du gaz initialement confiné dans le compartiment de gauche. Le compartiment de droite a été vidé. L'enceinte entourant le gaz est isolée thermiquement : aucun échange de chaleur avec l'extérieur n'a lieu (processus adiabatique)  $Q = 0$ .



Expérience de Joule (1843)

En ouvrant la vanne centrale, l'air se détend. Puisque le gaz se précipite dans le vide, aucun travail ne peut être recueilli ni ne doit être fourni  $W = 0$ . Cette détente ne se fait évidemment pas à l'équilibre.  $\Delta U = 0$ .

Dans la **détente isotherme** quasi-statique d'un gaz parfait, nous avons vu que le travail développé par le gaz était de

$$W = NkT \ln \frac{V_1}{V_2}$$

Dans une telle détente, on prend soin que la détente soit *quasi-statique* : le piston exerce sur le gaz une pression légèrement inférieure à celle que le gaz exerce sur lui. Un échange de chaleur constant avec la source de chaleur maintient par ailleurs le gaz à la température  $T$ . On interrompt le processus quand le volume final  $V_2$  est atteint. Supposons que  $V_2 = 2 \cdot V_1$ .

Comme nous avons un gaz parfait, l'énergie interne ne dépend que de la température. Comme cette dernière est maintenue constante,  $\Delta U = 0$ .

## Retour sur la détente de Joule

La chaleur échangée dans une détente isotherme quasi-statique est donc ici :

$$Q = -W = NkT \ln \frac{V_2}{V_1} \underset{\substack{= \\ \text{si } V_2 = 2 \cdot V_1}}{\quad} NkT \ln 2$$

$$\text{ou} \quad \frac{Q}{T} = Nk (\ln V_2 - \ln V_1)$$

Détente isotherme quasi – statique	Détente de Joule
Etat initial : $(T, V)$ $P_1 = Nk \frac{T}{V}$	Etat initial : $(T, V)$ $P_1 = Nk \frac{T}{V}$
Etat final : $(T, 2V)$ $P_2 = Nk \frac{T}{2V} = \frac{P_1}{2}$	Etat final : $(T, 2V)$ $P_2 = Nk \frac{T}{2V} = \frac{P_1}{2}$
Etats intermédiaires : à l'équilibre	Etats intermédiaires : non à l'équilibre
Echange avec l'extérieur : $Q > 0$ $W < 0$	Echange avec l'extérieur : $Q = 0$ $W = 0$
$\exists$ transformation inverse : la compression isotherme quasi – statique	La transformation ne possède aucune inverse

Voilà deux transformations qui, partant du même état initial et aboutissant au même état final, sont pourtant différentes !

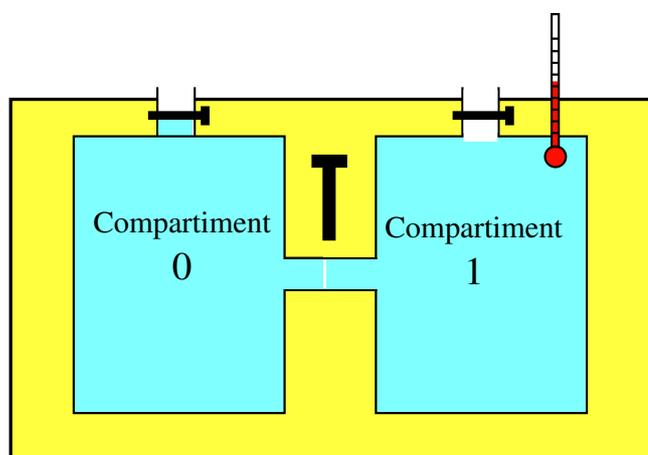
### Analyse microscopique de la détente de Joule

Nous pouvons bien sûr nous contenter de la description de la détente de Joule telle que nous venons de l'exposer, mais il reste ces états intermédiaires dont l'étude peut être riche d'enseignements.

C'est Boltzmann qui a eu l'idée d'associer une probabilité à l'état microscopique du gaz parfait (gaz de particules indépendantes, sans interaction). Pour simplifier, nous allons considérer que les molécules de

## Retour sur la détente de Joule

notre gaz parfait se trouve dans les deux états correspondants aux compartiments où ils se trouvent. Nous supposons de plus que les  $N$  molécules du gaz sont numérotées de 1 à  $N$ .



Compartiment 0 : état 0

Compartiment 1 : état 1

Numéro des particules	1 2 3 4 5 6 . . . $N - 1$ $N$
Exemple d'état microscopique	0 0 1 0 1 1 . . . 1 0

L'état détaillé microscopique consiste donc en une série de  $N$  bits; cette information est cependant trop détaillée. En effet, du point de vue macroscopique, cela ne nous intéresse pas de savoir si la molécule numéro 356732184 se trouve dans le compartiment 0 ou dans le compartiment 1. Ce qui nous intéresse est de savoir combien de particules il y a dans le compartiment 0 sur les  $N$  molécules. Nous nous intéressons donc à l'état réduit  $(N_0, N)$  qui donne le nombre de 0, c.à.d. le nombre de particules dans le compartiment 0, sur le nombre total  $N$  de molécules.

Un état  $(N_0, N)$  a donc  $N_0$  molécules dans le compartiment 0 et  $N - N_0$  dans le compartiment 1. Initialement, nous avons l'état  $(N, N)$  : toutes les  $N$  molécules étaient dans le compartiment 0. Quand la vanne s'ouvre, des états intermédiaires  $(N_0, N)$  (où  $N_0 < N$ ) sont atteints jusqu'à **l'état final d'équilibre** où  $N_0 = N/2$ , évidemment.

Pour déterminer l'état d'équilibre, associons à chaque état réduit un **poids**  $W_{N_0}^N$  égal au nombre d'états détaillés qu'il représente (Boltzmann).

## Retour sur la détente de Joule

N	Etats détaillés	Etats réduits	$W_{N_0}^N$
2	(0 0)	(2, 2)	1
	(1 0) (0 1)	(1, 2)	2
	(1 1)	(0, 2)	1
3	(0 0 0)	(3, 3)	1
	(1 0 0) (0 1 0) (0 0 1)	(2, 3)	3
	(1 1 0) (0 1 1) (1 0 1)	(1, 3)	3
	(1 1 1)	(0, 3)	1
4	(0 0 0 0)	(4, 4)	1
	(0 0 0 1) (0 0 1 0) ...	(3, 4)	4
	(0 0 1 1) (0 1 0 1) (0 1 1 0)		
	(1 0 0 1) (1 0 1 0) (1 1 0 0)	(2, 4)	6
	(0 1 1 1) (1 0 1 1) ...	(1, 4)	4
	(1 1 1 1)	(0, 4)	1
	etc, etc ...		

Le nombre  $W_{N_0}^N$  est bien connu en analyse combinatoire : c'est la combinaison de  $N$  objets  $N_0$  à  $N_0$  :

$$W_{N_0}^N = \frac{N!}{N_0!(N - N_0)!}$$

Avec :  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n - 1) \cdot n$  et  $0! = 1$

$$W_N^N = W_0^N = 1 \quad W_{N-1}^N = W_1^N = N$$

Le calcul de  $W_{N_0}^N$  se fait par la formule de Stirling dès que  $N > N_0 \gg 1$  :

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

On vérifie alors que, pour un nombre de particules  $N$  fixé,  $W_{N_0}^N$  atteint son maximum pour  $N_0 = N/2$  : l'état réduit correspondant à l'équilibre est donc caractérisé par le poids

$$W_{N/2}^N = \frac{N!}{[(N/2)!]^2} \approx \left(\frac{2}{\pi N}\right)^{1/2} 2^N$$

## Retour sur la détente de Joule

### En résumé

- Quand nous ouvrons la vanne centrale dans la détente de Joule, le système se trouve dans l'état détaillé  $(0\ 0\ \dots\ 0\ 0)$  correspondant à l'état réduit  $(N, N)$  et au poids  $W_N^N = 1$ .
- La vanne étant ouverte, après un certain temps, l'équilibre est atteint : c'est ce que l'on observe macroscopiquement. Microscopiquement, le système est dans l'un des états détaillés que nous considérons comme équiprobables.
- Du point de vue macroscopique, nous ne distinguons que les états réduits. Si les états détaillés sont équiprobables, la probabilité d'un état réduit est proportionnelle au nombre d'états détaillés qu'il représente. (voir tableau)
- On vérifie bien que **l'état final d'équilibre**, caractérisé par  $(N/2, N)$ , représente bien celui où il y a le plus d'états détaillés, c.à.d. celui pour lequel  **$W_{N_0}^N$  est maximum.**

**Point de contrôle** Une boîte contient une mole d'un gaz. Considérez les deux configurations suivantes : a) chaque moitié de la boîte contient la moitié du nombre des molécules, b) chaque tiers de la boîte contient le tiers du nombre de molécules. Laquelle de ces deux configurations a-t-elle le plus grand nombre d'états détaillés ?

### L'entropie

Nous tentons d'associer une grandeur thermodynamique à  $W_{N_0}^N$ , avec les considérations suivantes :

- Macroscopiquement, dans la détente de Joule, nous ne connaissons que les deux états d'équilibre, l'état 1 où  $W_N^N = 1$  et l'état 2 où

$$W_{N/2}^N \approx \left( \frac{2}{\pi N} \right)^{1/2} 2^N.$$

- La grandeur thermodynamique doit être une grandeur extensive.
- Avec le nombre de particules approchant le nombre d'Avogadro ( $6,022 \cdot 10^{23}$ ), il convient de prendre le logarithme de  $W_{N_0}^N$ , pour avoir des chiffres qui aient une signification pour nous.

## Retour sur la détente de Joule

Considérons le logarithme de  $W_{N_0}^N$ . C'est bien une grandeur extensive!

[Pour s'en convaincre, considérer  $W_{N_0}^N$  pour les cas  $N = 2$  et  $N = 4$  donnés sur le tableau des états détaillés et réduits.]

Nous définissons une nouvelle fonction d'état, appelée **entropie** par :

$$\boxed{S = k \ln W_{N_0}^N} \quad \text{Boltzmann}$$

(  $k = 1,380 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  est la constante de Boltzmann).

Par construction, connaître l'entropie, c'est connaître le nombre  $W_{N_0}^N$  de façons de réaliser l'état du système, c'est à dire l'état macroscopique du système lui-même, les autres paramètres macroscopiques étant donnés.

*L'entropie  $S$  est donc une fonction d'état du système et c'est une fonction d'état extensive.*

### Entropie et désordre

Plus  $W_{N_0}^N$  augmente, plus l'entropie augmente : comme  $W_{N_0}^N$  est une mesure du nombre des états microscopiques détaillés qui composent l'état macroscopique, au fur et à mesure que  $W_{N_0}^N$  augmente, on pourra de moins en moins prédire dans quel état microscopique sera le système.

*L'entropie  $S$  est une mesure du désordre à l'échelle microscopique.*

Un système isolé tend naturellement vers son état le plus probable, l'état d'équilibre, caractérisé par le maximum d'états microscopiques. Pour un système isolé,  $S$  ne peut donc qu'augmenter (ou rester constante si le système est déjà à l'équilibre) ; c'est le principe d'extrémum :

$$\boxed{dS \geq 0} \quad \text{pour un système isolé}$$

Les processus les plus probables sont ceux dans lesquels l'entropie d'un système isolé augmente (éventuellement reste constante) ; ils sont tellement

## Retour sur la détente de Joule

plus probables que les autres apparaissent interdits. C'est une autre façon d'exprimer le deuxième principe de la thermodynamique.

### Résumé

1. Nous sommes partis de la détente de Joule et de la détente quasi-statique isotherme d'un gaz parfait. Nous avons vu que si, dans les deux cas, nous partons et aboutissons aux mêmes états, pour la détente de Joule, nous n'avons aucun échange avec l'extérieur, aucune transformation inverse ni aucun équilibre intermédiaire, alors que, pour la détente isotherme quasi-statique, des échanges avec l'extérieur ont constamment lieu, une transformation inverse existe, et le système est constamment en équilibre.
2. Nous avons ensuite fait une analyse microscopique de la détente de Joule, caractérisant le système à l'état microscopique par des états détaillés et les états macroscopiques par des états réduits.
3. Nous avons ensuite postulé que l'état final d'équilibre dans la détente de Joule est caractérisé par l'équi-répartition des  $N$  molécules dans les deux compartiments, que cet équilibre correspond au maximum du nombre d'états microscopiques  $W_{N_0}^N$  :  $\max (W_{N_0}^N) = W_{N/2}^N$  .
4. Nous avons introduit **l'entropie** :  $S = k \ln W_{N_0}^N$  , fonction d'état extensive donnant une mesure du désordre microscopique.
5. Tout comme l'énergie interne, l'entropie est définie à une constante près : seule sa variation intervient lors d'une transformation.

**Point de contrôle** En vous aidant du développement de ce paragraphe, trouvez la variation de l'entropie dans une détente de Joule d'un gaz passant d'un volume  $V$  à un volume  $2V$  (négligez les logarithmes de 2, de  $\pi$  et de  $N$  devant  $N$  ).

Le terme **entropie** vient du grec *entropê* (retour) et a été utilisé pour la première fois par R. Clausius dans le sens actuel de la Thermodynamique. Pensait-il à des processus cycliques ?

## Réversibilité et irréversibilité

Nous allons à nouveau comparer les deux transformations vues au paragraphe précédent : la détente isotherme quasi-statique et la détente de Joule d'un gaz parfait. Ces deux processus relient deux mêmes états d'équilibre.

- La **détente isotherme quasi-statique** possède un processus inverse, la compression isotherme quasi-statique. Cette dernière ramène **le gaz et son environnement** à son état initial ; pour effectuer ce processus inverse, si aucune perte n'a eu lieu, nous pouvons utiliser le travail libéré par le gaz dans la détente d'une part et évacuer du gaz la même quantité de chaleur qu'il avait absorbé dans la détente. Pour l'extérieur, rien n'a changé ! (pour le gaz non plus). Ces deux processus, la détente et la compression isothermes quasi-statiques sont dits **réversibles**. Un processus réversible est quasi-statique ; l'inverse n'est pas nécessairement vrai.
- La **détente de Joule** n'a pas d'inverse. Dans cette détente, aucun travail, aucune chaleur n'a été échangé avec l'extérieur. Pour ramener le gaz à son état initial, il nous faut, par exemple, effectuer une compression isotherme, c.à.d. de l'extérieur lui fournir un travail et évacuer une certaine quantité de chaleur. Quand le gaz est revenu à son état initial, l'extérieur n'est plus dans le même état : la détente de Joule est un processus **irréversible**.

**Théorème** Pour une transformation réversible, la variation d'entropie est

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad \text{Th. de Clausius}$$

Attention! L'état d'équilibre d'un système est un de ses états, un processus, une transformation réversible ou irréversible relie deux états du système.

**Point de contrôle** De l'eau est chauffée a) de 20° C à 30° C b) de 30° C à 35° C c) de 80° C à 85° C . Classez ces 3 processus selon  $\Delta S$ .

# Le deuxième principe de la Thermodynamique

## Le deuxième principe

Si l'on considère un système quelconque et son milieu environnant, leur variation d'entropie est positive pour toute transformation et tend vers zéro pour des transformations tendant vers la réversibilité

$$\Delta S_{\text{total}} \geq 0$$

Le deuxième principe présente la même forme que le premier principe : il opère aussi sur une fonction d'état et, avec le Th. de Clausius, fournit une relation qui relie l'entropie à des grandeurs mesurables. Mais, contrairement au 1<sup>er</sup> principe, ce n'est une loi de conservation que pour les processus réversibles, situation pratiquement inconnue dans la nature. Nous pouvons considérer notre système et son environnement comme un système isolé : l'entropie croît ou reste éventuellement constant dans tout système que l'on peut considérer comme isolé.

**Remarque** : Ainsi, la notion *d'irréversibilité* et le 2<sup>ème</sup> principe fixent une direction de la *flèche du temps* : pour la Thermodynamique, le temps est anisotrope, contrairement à d'autres domaines de la Physique où la symétrie dans le renversement de l'axe du temps est la règle.

**Exemple** Soit deux sources de chaleur aux températures  $T_c$  et  $T_f$ , ( $T_c > T_f$ ). Mettons les en contact : la source chaude va céder une quantité de chaleur  $\delta Q_c$  et la source froide va absorber la même quantité de chaleur, donc  $\delta Q_f = -\delta Q_c$ . Pour un petit échange de chaleur, nous pouvons utiliser le théorème de Clausius. Nous avons donc

$$dS_c \underset{\text{Clausius}}{=} \frac{\delta Q_c}{T_c} = -\frac{\delta Q_f}{T_c} \quad dS_f \underset{\text{Clausius}}{=} \frac{\delta Q_f}{T_f}$$
$$dS_{\text{total}} = dS_c + dS_f = -\frac{\delta Q_f}{T_c} + \frac{\delta Q_f}{T_f} = \delta Q_f \left( \frac{T_c - T_f}{T_c \cdot T_f} \right)$$

Par le 2<sup>ème</sup> principe  $dS_{\text{total}} \geq 0$ , nous avons donc :  $\delta Q_f (T_c - T_f) \geq 0$ . Comme  $T_c > T_f$ ,  $\delta Q_f \geq 0$  : c'est bien la source froide qui reçoit de la chaleur et non pas l'inverse !  $dS_{\text{total}} = 0$  quand  $T_c = T_f$ .

# Le deuxième principe de la Thermodynamique

*Die Wärme kann nicht von selbst aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen.*

(Énoncé du 2<sup>ème</sup> principe selon R. Clausius)

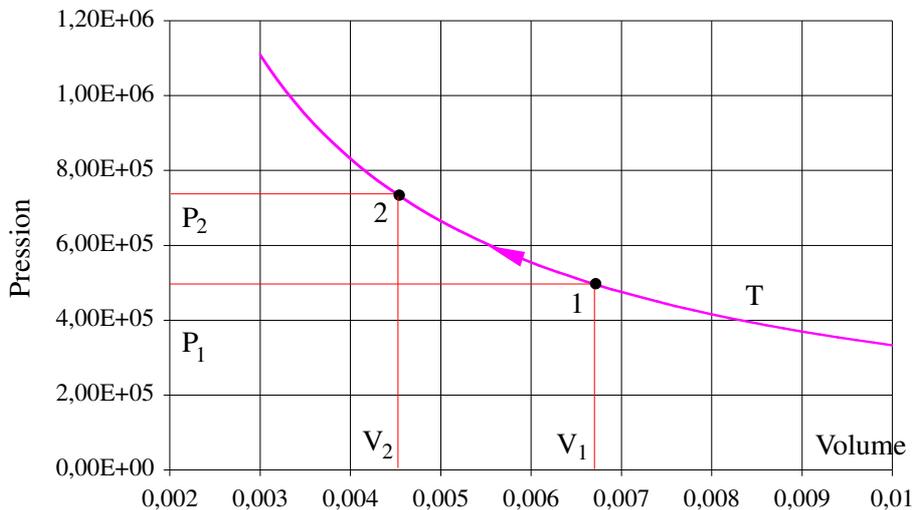
## En résumé

- Un système évolue “naturellement” vers un état d’équilibre caractérisé par le maximum de l’entropie compatible avec les contraintes imposées au système, notamment par les lois de conservation.
- Dans un processus effectué sur un système isolé, l’entropie  $S_{total}$  du système croît toujours  $dS_{total} \geq 0$ , l’égalité correspondant à un processus réversible.

**Exemple** : Compression isotherme quasi-statique à nouveau

Nous avons calculé, au début de ce chapitre, la chaleur échangée dans une détente ou une compression isotherme quasi-statique dont nous tirons la variation d’entropie du gaz subissant la détente :

$$\Delta S_{réversible}^{gaz} = \frac{Q}{T} = Nk (\ln V_2 - \ln V_1) < 0 \text{ pour une compression}$$



$$\Delta S_{réversible}^{gaz} < 0 ! \quad \Rightarrow \quad Q^{gaz} < 0 \quad : \text{ le gaz évacue de la chaleur.}$$

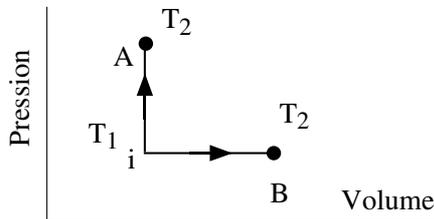
Si nous incluons dans notre “système” l’environnement du gaz, c.à.d. la source de chaleur dans laquelle nous avons évacué  $Q^{source} = -Q^{gaz} > 0$ ,

# Le deuxième principe de la Thermodynamique

nous obtenons un système isolé et, dans ce processus réversible, la variation totale d'entropie est :

$$\Delta S_{total} = \Delta S_{réversible}^{gaz} + \Delta S_{réversible}^{source} = 0$$

**Point de contrôle** Un gaz parfait est à la température  $T_1$  dans son état initial  $i$ . Le gaz a une température plus élevée  $T_2 > T_1$  dans les états  $A$  et  $B$ . On effectue les transformations de  $i$  à  $A$  et de  $i$  à  $B$  selon les chemins montrés sur le diagramme  $P - V$ . La variation d'entropie de  $i$  à  $A$  est-elle plus grande, égale ou plus petite que celle de  $i$  à  $B$  ?



## L'entropie et les machines thermiques

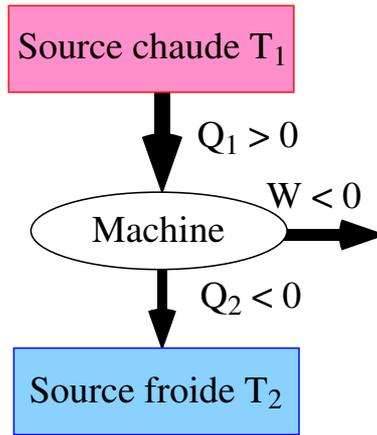
Une machine thermique est un engin qui extrait de l'énergie de sources de chaleur et fournit un travail. Le coeur de la machine thermique est *l'agent thermique* qui, dans la machine à vapeur est la vapeur d'eau et de l'eau liquide, dans un moteur à explosion, un mélange d'air et de combustible. Afin que la machine puisse "tourner" d'une manière soutenue, l'agent thermique doit répéter un certain **cycle**.

### La machine de Carnot

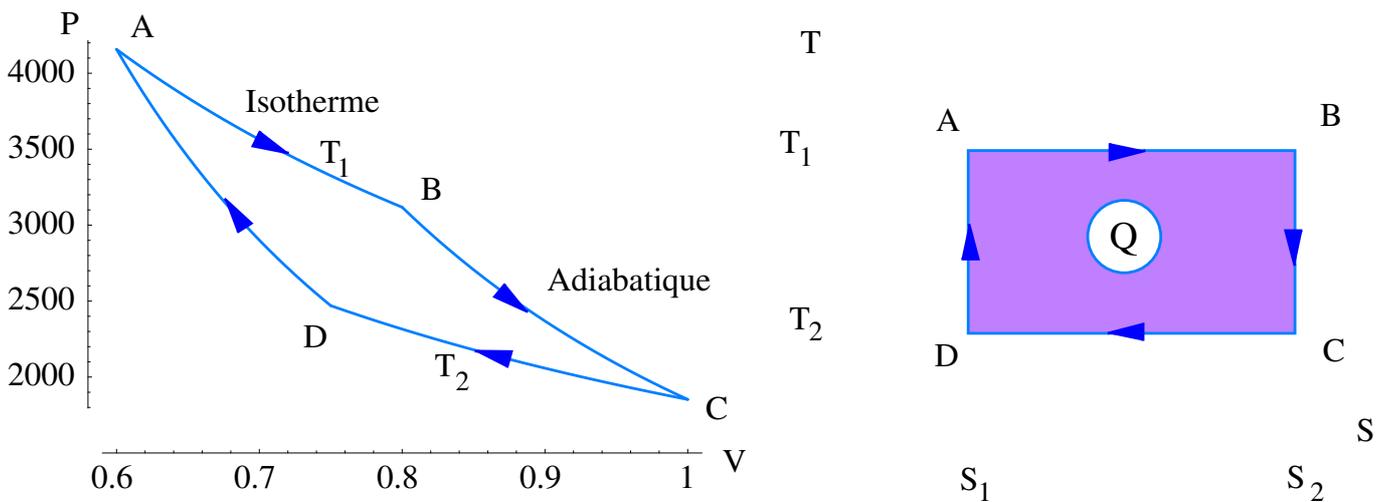
Nous allons étudier une *machine idéale*, c.à.d. une machine dans laquelle toutes les transformations sont réversibles et dans laquelle il n'y a aucune perte d'énergie due aux frottements ou à des turbulences dans le gaz.

Notre agent thermique sera un gaz parfait. Le principe de la machine est schématisé sur la figure de la page suivante.

# Le deuxième principe de la Thermodynamique



La machine “prend” de la chaleur à une source chaude à la température  $T_1$ , produit un certain travail net  $W$  et rejette de la chaleur dans la source froide à la température  $T_2$ . Le cycle est constitué de deux processus isothermes réversibles  $AB$  et  $CD$  ( $T = \text{constante}$ ) et de deux processus adiabatiques  $BC$  et  $DA$  (sans échange de chaleur :  $\delta Q = 0$ ).



La figure représente le cycle de Carnot pour une mole de gaz parfait en diagrammes  $P - V$  et  $T - S$  avec  $T_1 = 300 \text{ K}$   $T_2 = 222.8 \text{ K}$  ,  $\gamma = 7/3$ .

1) De A à B : nous avons une détente isotherme, le gaz reçoit une quantité de chaleur  $Q_1$  (positive) à la température  $T_1$  et fournit un certain travail.

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 dS = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_1}{T_1} \quad Q_1 > 0$$

2) De B à C : nous avons une détente adiabatique (pas d'échange de cha-

## Le deuxième principe de la Thermodynamique

leur),  $\Delta S = 0$ , le gaz fournit aussi un travail.

3) De C à D : nous avons une compression isotherme, le gaz évacue une quantité de chaleur  $Q_2$  (négative) à la température  $T_2$  et reçoit un travail mécanique pour la compression.

$$\Delta S = S_1 - S_2 = \int_2^1 dS = \int_2^1 \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_2}{T_2} \quad Q_2 < 0$$

4) De D à A : nous avons une compression adiabatique (pas d'échange de chaleur)  $\Delta S = 0$ , le gaz reçoit un travail mécanique.

Au total sur ce cycle réversible :

$$\Delta S \underbrace{=}_{S \text{ fct. d'état}} 0 = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} = -\frac{Q_2}{T_2}$$

D'autre part, si  $Q$  est la chaleur totale échangée dans un cycle (voir le diagramme  $T - S$  de la page précédente) :

$$Q = \oint T dS = (T_1 - T_2) \Delta S = Q_1 + Q_2$$

**Rendement**  $\eta$  : C'est le travail fourni par le gaz rapporté à la chaleur qu'il a reçue dans la détente isotherme à la température haute  $T_1$  :

$$\Delta U \underbrace{=}_{\text{sur 1 cycle}} 0 \Rightarrow W = -Q$$
$$\eta = \frac{-W}{Q_1} = \frac{Q}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

C'est le rendement d'une machine thermique fonctionnant selon le cycle de Carnot. Il ne dépend que des températures  $T_1$  et  $T_2$ . Toute autre machine thermique, fonctionnant entre les mêmes réservoirs de chaleur  $T_1$  et  $T_2$  ne peut avoir qu'un rendement inférieur ou, au mieux, égal. En effet, frottements, phénomènes dissipatifs, font que le travail obtenu du gaz est moindre que ce qu'il aurait pu être dans cette machine idéale.

## Le deuxième principe de la Thermodynamique

Les inventeurs ont toujours essayé d'améliorer le rendement des machines thermiques en diminuant la chaleur  $Q_2$  rejetée dans la source froide. Le rêve des inventeurs est de réaliser une machine parfaite, dans laquelle  $Q_2 = 0$ . Une telle machine fonctionnerait donc sur une seule source de chaleur, ce qui est impossible : une voiture fonctionnant avec cette machine parfaite puiserait son énergie de l'air, source de chaleur, et ne consommerait pas de carburant ! Remarquons qu'un tel processus n'est pas contraire au premier principe. D'où le 2<sup>ème</sup> principe sous sa forme proposée par Thomson :

*Un processus cyclique dont le seul effet serait d'extraire une quantité de chaleur  $Q$  d'une source à température  $T$  et de produire un travail  $W = Q$  est interdit.*

(Principe de Thomson)

**Point de contrôle** Trois machines de Carnot tournent entre des sources de chaleur de a) 400 et 500 K b) 600 et 800 K c) 400 et 600 K. Classez ces machines selon leur rendement.

# Physique Générale

## LES AUTRES POTENTIELS THERMODYNAMIQUES

TRAN Minh Tâm

### Table des matières

<b>Les autres potentiels thermodynamiques</b>	<b>250</b>
Recherche de l'état d'équilibre . . . . .	250
Conditions d'équilibre sous contrôle . . . . .	251
La transformation de Legendre . . . . .	252
Les potentiels thermodynamiques . . . . .	253
Variables "naturelles" . . . . .	254
<b>Potentiel chimique</b>	<b>257</b>
Introduction du potentiel chimique . . . . .	257
Equilibre chimique . . . . .	257

<b>Interprétation des nouvelles fonctions thermo-</b> <b>dynamiques</b>	<b>259</b>
Interprétation de l'enthalpie . . . . .	259
Interprétation de l'énergie libre . . . . .	259
Interprétation de l'enthalpie libre . . . . .	260
Conclusions . . . . .	261
 <b>Petit encart mathématique</b>	 <b>262</b>
Encart mathématique : Différentielle d'une fonction de plusieurs variables . . . . .	262
Retour sur l'énergie interne et l'entropie . . . . .	263
Interprétation du potentiel chimique . . . . .	264

## Les autres potentiels thermodynamiques

Nous étions partis d'un système à une composante et à une phase : ce système pouvait échanger de la chaleur et du travail avec l'extérieur, pouvait, par absorption de la chaleur changer de phase. Nous n'avons cependant pas traité de la coexistence des phases, de l'évolution d'une phase vers une autre et nous avons obtenu :

$$\Delta U = W + Q \qquad dU = \delta W + \delta Q$$

Mais, par la relation de Clausius  $\delta Q = T dS$ , l'expression précédente devient :

$$dU = -P dV + T dS$$

Cette expression signifie que l'énergie interne possède comme *variables naturelles*  $V$  et  $S$  : connaître les variations de  $V$  et de  $S$  dans une transformation quasistatique permet de reconstituer la variation de l'énergie interne  $U$  si nous connaissons la pression et la température à laquelle est faite la transformation ; nous reviendrons dans ce chapitre sur cette notion de "variables naturelles".

### Recherche de l'état d'équilibre

Nous considérons un **système isolé** à une composante et une phase et recherchons les conditions pour lesquelles le système est à l'équilibre. Le système étant isolé, l'énergie interne est constante car aucun apport de travail mécanique, aucun apport de chaleur ne se fait. Nous avons vu que, dans ce cas, l'entropie tend vers son maximum  $dS \geq 0$  d'où

*A énergie interne constante, l'état d'équilibre d'un système est celui où l'entropie est maximale, compatible avec les contraintes imposées.*

Par contre, toujours pour un système isolé, l'état d'équilibre d'un système est celui qui correspond au minimum de la somme des énergies cinétiques et des énergies potentielles internes : c'est donc celui où l'énergie interne est minimale, vu les conditions extérieures. Par conséquent, la proposition suivante sur l'équilibre est équivalente à la précédente :

## Les autres potentiels thermodynamiques

*A entropie constante, l'état d'équilibre est celui où l'énergie interne est minimale, compatible avec les contraintes imposées.*

### Conditions d'équilibre sous contrôle

**Position du problème** Supposons que nous désirons effectuer à l'équilibre une réaction chimique, ou une transformation de phase, ou une diffusion d'une substance. Dans cette transformation, nous pouvons caractériser un ou plusieurs paramètres, comme les concentrations des réactifs et des composés, le taux de dissociation, les concentrations de phases co-existantes, etc. Nous aimerions pouvoir contrôler cette transformation en agissant sur les grandeurs physiques à notre disposition : ces grandeurs sont souvent la température, la pression, etc.

Il existe un critère absolu de l'équilibre : le maximum de l'entropie. Mais, malheureusement, l'entropie est une grandeur difficile à relier à l'expérience, sauf peut être pour les gaz parfaits. Nous aurions pu espérer que l'énergie interne puisse jouer ce rôle de critère d'équilibre. Mais la variation d'énergie interne est  $dU = -P dV + T dS$  : si le volume  $V$  peut être facilement contrôlé, nous nous heurtons encore à l'entropie !  $V$  et  $S$  peuvent donc difficilement être utilisés comme grandeurs physiques que nous contrôlons dans une transformation ou dans une réaction à l'équilibre.

**Résumé** L'énergie interne possède les variables naturelles  $V$  et  $S$  et est minimale à l'équilibre. Comme  $S$  est difficile d'accès, nous devons rechercher de nouvelles fonctions d'état qui possèdent comme variables naturelles  $V$  et  $T$  ou  $T$  et  $P$ . Cette recherche est basée sur la transformation de Legendre (Adrien Marie Legendre (1752-1833), mathématicien français) dont nous donnons ci-après les grandes lignes.

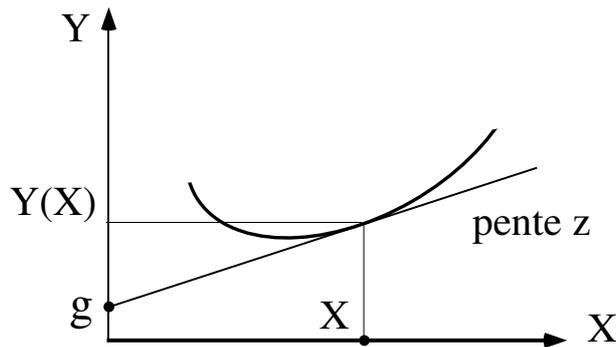
## La transformation de Legendre

Soit  $Y(X)$  une fonction de  $X$  et  $z = \frac{dY}{dX}$  la dérivée de cette fonction. On appelle  $z$  la variable conjuguée de  $X$ .

Nous aimerions trouver une nouvelle fonction  $g(z)$  qui contienne la même information que  $Y(X)$ .

**Proposition** La fonction  $g(z) = Y(X) - zX$  est le résultat de la transformation de Legendre de la fonction  $Y(X)$ .

Interprétation géométrique



Nous avons dessiné sur la figure la fonction  $Y(X)$  et sa tangente au point  $X$ . La pente de cette tangente est  $z = \frac{dY}{dX}$ ; la tangente possède une ordonnée à l'origine,  $g$ , telle que

$$z = \frac{Y(X) - g}{X} \quad g(z) = Y(X) - zX \quad \text{Donc :}$$

*Se donner l'ensemble des tangentes à la courbe  $Y(X)$  est une autre façon de se donner toute l'information de  $Y(X)$ .*

## Les autres potentiels thermodynamiques

### Exemple : l'enthalpie

En Chimie, nous recherchons souvent la chaleur dégagée dans une réaction. Pour effectuer cette réaction, nous avons plutôt l'habitude de travailler à pression constante (en laissant la réaction se faire, par exemple, à la pression atmosphérique), plutôt qu'à volume constant, ce qui nécessiterait des précautions particulières vu que la pression pourrait augmenter de manière intempestive ! La chaleur dégagée à pression constante est donc :

$$Q = \Delta U - W = \Delta U + P \Delta V$$

$$Q \underset{P \text{ constant}}{=} \Delta U + \Delta(PV) = \Delta(U + PV) \underset{\text{définition}}{=} \Delta H$$

La dernière équation définit l'enthalpie  $H = U + PV$  qui est une fonction d'état, transformée de Legendre de la fonction d'état "énergie interne". Ecrivons la différentielle de l'enthalpie :

$$dH = dU + d(PV) = T dS - P dV + P dV + V dP = T dS + V dP$$

Puisque  $dU = T dS - P dV$ , en identifiant la fonction  $Y(X)$  à l'énergie interne,  $X$  au volume,  $z$  à la pression, l'enthalpie s'identifie à  $g$ , c.à.d. :  $H = U + PV$  et nous obtenons les relations précédentes.

### Les potentiels thermodynamiques

Nous pouvons ainsi définir une série de **fonctions d'état** ou **potentiels thermodynamiques** dont nous discuterons l'utilisation dans un

## Les autres potentiels thermodynamiques

prochain paragraphe.

Fonction d'état	Symbole Variable naturelle	Différentielle totale
Energie interne	$U = U(V, S)$	$dU = -P dV + T dS$
Enthalpie	$H = U + PV = H(P, S)$	$dH = dU + d(PV)$ $dH = V dP + T dS$
Energie libre	$F = U - TS = F(V, T)$	$dF = dU - d(TS)$ $dF = -P dV - S dT$
Enthalpie libre ou énergie de Gibbs	$G = H - TS = G(P, T)$	$dG = dH - d(TS)$ $dG = V dP - S dT$

Puisqu'à l'équilibre  $S$  est maximale et  $U$  est minimale, on montre que

1.  $U$  est minimale à  $V$  et  $S$  fixés,
2.  $H$  est minimale à  $P$  et  $S$  fixés,
3.  $F$  est minimale à  $V$  et  $T$  fixés,
4.  $G$  est minimale à  $P$  et  $T$  fixés.

### Variables “naturelles”

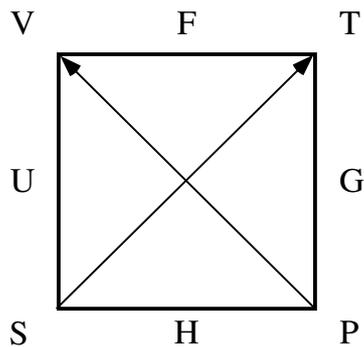
Nous avons vu que, dans une transformation sur un système, la variation de l'énergie interne s'écrit

$$dU = -P dV + T dS$$

Quand nous étudions la variation de l'énergie interne, les variables qui devront être employées seront le volume et l'entropie. Nous avons en effet introduit l'énergie interne comme la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle des particules. La seule possibilité offerte est dès lors  $dU = \delta W + \delta Q$  ; la définition du travail mécanique étant le produit de la force par le déplacement du point d'application de cette force, il est venu simplement le terme  $-P dV$ . Nous avons ensuite vu que l'échange de chaleur est lié à l'entropie par la relation de Clausius, d'où le deuxième terme.

## Les autres potentiels thermodynamiques

Qu'en est-il des autres fonctions d'état, obtenus par transformation de Legendre. Le lecteur attentif aura certainement remarqué que dans cette transformation de Legendre, nous changeons, par exemple,  $V \rightarrow P$  pour obtenir la variation de l'enthalpie, mais jamais les deux variables à la fois. Nous vous proposons une méthode mnémotechnique, due au professeur Max Born en 1929, pour retrouver les variables "naturelles" associées aux différentes fonctions d'état (à l'exception de  $S$ ).



L'ordre des lettres suit la phrase mnémotechnique :

**Good Physicists Have Studied Under Very Famous Teachers.**

Chaque fonction d'état, écrite sur un côté du carré, est entourée de ses variables "naturelles", par exemple, les variables "naturelles" de  $G$  sont  $T$  et  $P$ .

Pour écrire la différentielle d'une fonction d'état en termes de ses variables "naturelles", on tiendra compte des variables conjuguées situées sur le sommet opposé de la diagonale, le signe affectant la différentielle sera positif si la flèche part de la variable "naturelles", négatif, si la flèche pointe vers la variable. Ainsi

$$\begin{aligned}dU &= T dS - P dV & dH &= T dS + V dP \\dF &= -S dT - P dV & dG &= -S dT + V dP\end{aligned}$$

**Conclusion** Par la transformation de Legendre, nous sommes passés de la fonction d'état "énergie interne" à d'autres fonctions d'états contenant

## Les autres potentiels thermodynamiques

toute l'information que renfermait l'énergie interne. Chacune de ces fonctions d'état est exprimée selon des "variables naturelles" choisies de manière adéquate pour chacune des fonctions.

## Introduction du potentiel chimique

Nous n'avons jusqu'à présent considéré qu'un système à une composante dans une seule phase et, de plus avons exclu tout échange de matière ! En permettant au nombre de molécules de varier, en plus des variables extensives  $S$  et  $V$  nous devons maintenant introduire le nombre de molécules :

$$dU = T dS - P dV \underbrace{+}_{\text{introd.}} \mu dN$$

$\mu$  est le **potentiel chimique** de l'élément considéré dans notre système. Pour les autres fonctions d'état,  $H$ ,  $F$  et  $G$  nous devons, de la même façon, rajouter le produit  $, \mu dN$ .

**Remarque** Le potentiel chimique est une grandeur intensive (comme la pression et la température).

**Interprétation** Que signifie le potentiel chimique ?

Rappelons nous que l'énergie interne a été définie comme la somme des énergies cinétiques des molécules et de leur énergie potentielle d'interaction (ou énergie potentielle interne) de ces molécules entre elles pour un système fermé où le nombre de particules est constant. Pour un système "ouvert" où le nombre de particules peut changer, le "potentiel chimique" rend justement compte de la variation de l'énergie interne avec tout changement du nombre de particules.

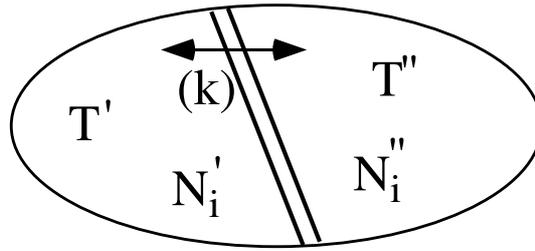
Si nous avons  $r$  espèces différentes de molécules en nombre  $N_1, N_2, N_r$

$$dU = T dS - P dV + \sum_{i=1}^r \mu_i dN_i$$

## Equilibre chimique

Considérons un système isolé constitué de deux sous-systèmes (' et ") séparés par une cloison rigide diathermale (permettant le passage de la chaleur dans les deux sens) , mais perméable à une seule espèce de molécule  $k$ .

## Potentiel chimique



La variation d'entropie, lorsque les échanges de chaleur et de matière se font au travers de la paroi de manière réversible, est de :

$$dS = dS' + dS'' = \frac{\delta Q'}{T'} + \frac{\delta Q''}{T''}$$

$$dS = \frac{1}{T'} (dU' - \mu'_k dN'_k) + \frac{1}{T''} (dU'' - \mu''_k dN''_k)$$

Dans la dernière équation n'apparaît pas le travail mécanique car la cloison est rigide et ne peut être déplacée. A la frontière, le système étant isolé, ce que la partie gauche gagne en énergie interne provient de la partie droite et inversement :  $dU' = -dU''$ . Le nombre de molécules passant, par exemple, à gauche, provient de la partie de droite :  $dN'_k = -dN''_k$ . Lorsque l'équilibre est atteint,  $dS = 0$  :

$$0 = dS = \left( \frac{1}{T'} - \frac{1}{T''} \right) dU' - \left( \frac{\mu'_k}{T'} - \frac{\mu''_k}{T''} \right) dN'_k$$

A l'équilibre,  $S$  est maximum pour des variations arbitraires de  $dU'$  et de  $dN'_k$ , nous avons donc :

$$T'' = T' \qquad \mu''_k = \mu'_k$$

Ces deux égalités expriment l'équilibre thermique au travers de la paroi diathermale et l'équilibre chimique de la substance  $k$  pouvant passer au travers de la paroi.

Remarque : Si nous avions eu une paroi qui pouvait se déplacer, nous aurions eu l'égalité des pressions des deux compartiments.

# Interprétation des nouvelles fonctions thermodynamiques

Dans ce paragraphe, nous revenons à un système à une composante et une phase dans lequel le nombre de particules est constante : il n'est donc pas nécessaire de tenir compte du potentiel chimique.

## Interprétation de l'enthalpie

On se reportera au début du paragraphe sur la transformation de Legendre.

L'enthalpie est la fonction d'état dont la variation est égale à la chaleur échangée dans une transformation à pression constante.

## Interprétation de l'énergie libre

Nous considérons ici une transformation à température constante : le système est en contact constant avec un réservoir de chaleur  $T$ . Nous recherchons la valeur du travail effectué à température constante  $T$  et de manière réversible.

(**Rappel** : une transformation réversible se fait de manière quasi-statique pour que le système soit toujours en équilibre).

$$dU = T dS + \delta W_{réversible} \underbrace{=}_{T=cst} d(TS) + \delta W_{réversible}$$

$$\delta W_{réversible} = dU - d(TS) = d(U - TS) = dF$$

On appelle *énergie libre* la fonction d'état dont la variation est égale à l'échange de travail mécanique dans une transformation réversible à température constante.

$$dF = \delta W_{réversible} \quad \text{à } T = \text{constant}$$

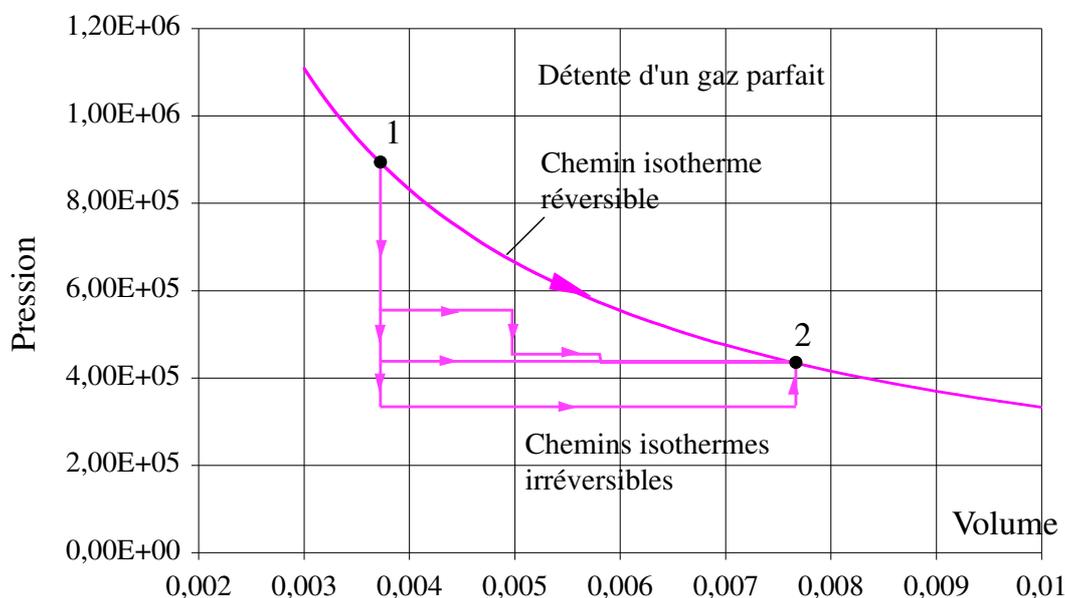
Par sa définition,  $dF < \delta W_{irréversible}$  : en effet, le travail mécanique échangé dans un processus réversible est toujours inférieur algébriquement à celui échangé dans un processus irréversible :

# Interprétation des nouvelles fonctions thermodynamiques

- Si le système *cède* de l'énergie mécanique à  $T = const.$ ,

$$| \delta W_{irréversible} | < | \delta W_{réversible} |$$

(notre convention est que  $W < 0$ ).



- Si le système reçoit de l'énergie mécanique à  $T = const.$ , on doit lui en fournir davantage que dans une transformation réversible (notre convention est ici que  $W > 0$ ).

## Interprétation de l'enthalpie libre

Nous étudions ici une transformation dans laquelle à la fois la température **et** la pression sont maintenues constantes. En consultant le tableau des potentiels thermodynamiques, nous voyons que l'enthalpie libre est obtenue à partir de l'enthalpie par la transformation de Legendre  $T \leftrightarrow S$ . Nous avons :  $dG = V dP - S dT$  : si la transformation se fait à pression et à température constantes, l'enthalpie libre ne change pas, pour autant que nous nous limitons à des processus ne faisant intervenir que des transformations du type "travail mécanique". Si d'autres travaux interviennent, comme des travaux d'électrolyse, chimiques, etc  $dG \neq 0$ .

## Conclusions

Les notions introduites jusqu'au présent chapitre suffisent pour résoudre n'importe quel problème de thermodynamique : toute l'information sur le système est contenue dans la fonction d'état *énergie interne*, exprimée en fonction de ses variables naturelles volume, entropie et nombre de molécules. Cependant, l'entropie n'est pas une variable facile à relier à l'expérience : nous avons par conséquent introduit d'autres fonctions d'état dont les variables naturelles sont plus faciles à relier à l'expérience. Exprimées en fonction des nouvelles variables, les nouvelles fonctions d'état thermodynamiques contiennent toute l'information contenue dans l'énergie interne (via les transformations de Legendre). En particulier, les fonctions enthalpie et enthalpie libre (énergie de Gibbs) sont bien adaptées à la Chimie. L'enthalpie est la chaleur échangée dans une transformation à pression constante, l'enthalpie libre, quant à elle, ne varie pas dans des transformations isothermes quand l'unique travail est un travail mécanique. D'autres travaux sont ainsi responsables de la variation de l'énergie de Gibbs : les travaux chimiques, par exemple.

**Point de contrôle** Si on ne tient pas compte du potentiel chimique, pour les processus suivants, indiquez laquelle des quantités  $\Delta U$ ,  $\Delta H$ ,  $\Delta F$ ,  $\Delta G$ ,  $\Delta S$  est égale à zéro :

- a) Un gaz parfait suit un cycle de Carnot,
- b)  $H_2$  et  $O_2$  réagissent dans une enceinte isolée thermiquement pour former  $H_2O$ ,
- c) De l'eau, dans sa phase liquide, est vaporisée à  $100^\circ \text{C}$  et 1 atmosphère.

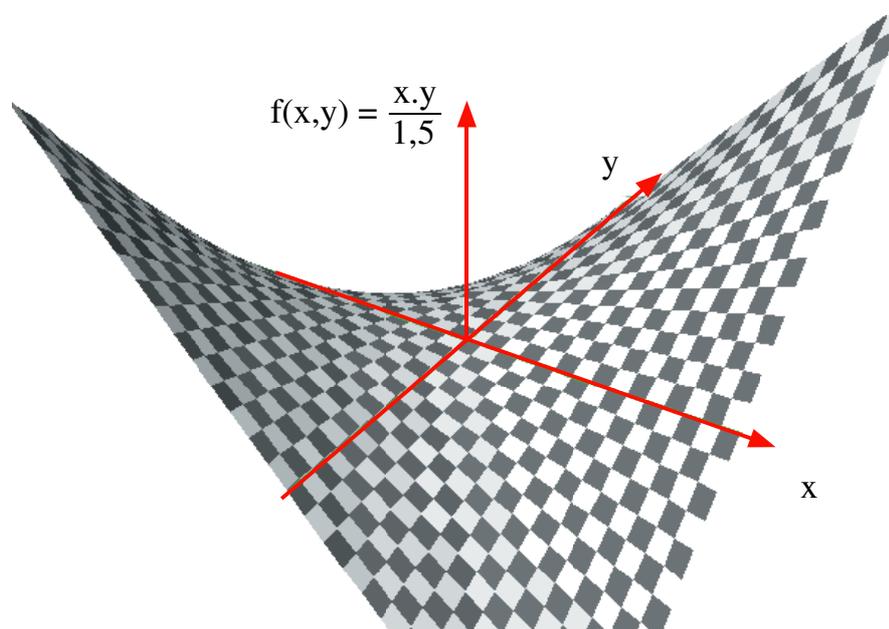
## Encart mathématique : Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

Considérons d'abord une fonction à une variable  $f(x)$ . A une variation infinitésimale  $dx$  de la variable  $x$  correspondra une variation  $df$  de la fonction  $f$ . La définition de la dérivée  $f'$  de  $f$  implique :

$$df = f'(x) \cdot dx$$

Généralisons maintenant ce raisonnement à une fonction de plusieurs variables indépendantes, par exemple  $f(x, y, z)$ . Une variation infinitésimale de  $f$  est maintenant provoquée par un accroissement d'une des variables. Donc

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$



On définit ainsi les trois dérivées partielles de  $f$ . Dans ce contexte,  $\frac{\partial f}{\partial x} dx$  est l'accroissement de  $f$  lorsque  $x$  varie de  $dx$ , à  $y$  et  $z$  constants. La confusion peut survenir quand on exprime  $f$  à l'aide d'un nouveau jeu de

## Petit encart mathématique

variables, par exemple  $x, y', z'$  où  $y', z'$  sont des fonctions de  $x, y, z$  :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y'} dy' + \frac{\partial f}{\partial z'} dz'$$

Le premier terme,  $\frac{\partial f}{\partial x} dx$ , correspond maintenant à la variation de  $f$  lorsque  $x$  varie de  $dx$ , mais à  $y'$  et  $z'$  constants. La dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}$  n'est donc plus la même. Pour définir complètement une dérivée partielle, il faut spécifier les autres variables considérées. On notera donc :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y',z'}$$

Si la fonction  $f(x, y, z)$  a un comportement "raisonnable", nous avons l'égalité des dérivées secondes croisées :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \text{ etc}$$

### Retour sur l'énergie interne et l'entropie

Nous avons vu que  $dU = T dS - P dV + \mu dN$  pour un système à une composante. La différentielle de la fonction  $U(S, V, N)$  s'écrit :

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N} dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N} dV + \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V} dN$$

Chacune des trois dérivées partielles précédentes permet de définir une variable d'état en identifiant les deux expressions de la différentielle de  $U$  :

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N} \quad P = - \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N} \quad \mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V}$$

Nous remarquons aussi que l'expression de la différentielle de la fonction d'état  $U(S, V, N)$  implique celle de la fonction d'état  $S(U, V, N)$  comme :

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN$$

## Petit encart mathématique

Nous avons donc également :

$$\frac{1}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V,N} \quad \frac{P}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U,N} \quad \frac{\mu}{T} = - \left( \frac{\partial S}{\partial N} \right)_{U,V}$$

Ces égalités constituent une autre définition, équivalente à la précédente, des paramètres  $T$ ,  $P$  et  $\mu$ .

### Interprétation du potentiel chimique

Nous avons vu dans la définition de l'enthalpie libre (ou énergie de Gibbs) que, dans une transformation à température et à pression constantes, la variation de cette dernière est différente de zéro si des travaux autres que les travaux de type mécanique sont présents. De tels travaux sont, par exemple, des travaux chimiques, des transformations de phase, etc...

Ecrivons la différentielle de l'enthalpie libre en fonction de ses "variables naturelles" pour un système à plusieurs composantes :

$$dG = -S dT + V dP + \sum_{i=1}^r \mu_i dN_i$$

D'après ce que nous avons vu au début de ce chapitre :

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_{P,N_i} dT + \left( \frac{\partial G}{\partial P} \right)_{T,N_i} dP + \sum_{i=1}^r \left( \frac{\partial G}{\partial N_i} \right)_{T,P,N_j} dN_i \quad (j \neq i)$$

En identifiant :

$$\mu_i = \left( \frac{\partial G}{\partial N_i} \right)_{T,P,N_j}$$

*Le potentiel chimique  $\mu_i$  est le taux de variation de l'énergie de Gibbs quand le nombre de particules  $i$  change, la température, la pression et le nombre des autres particules  $j \neq i$  demeurant constants.*

Remarque : Quand nous écrivons  $dG = -S dT + V dP + \sum_{i=1}^r \mu_i dN_i$ ,

nous supposons que le nombre de particules peut varier ; on dit alors que le système est *ouvert*.

## Petit encart mathématique

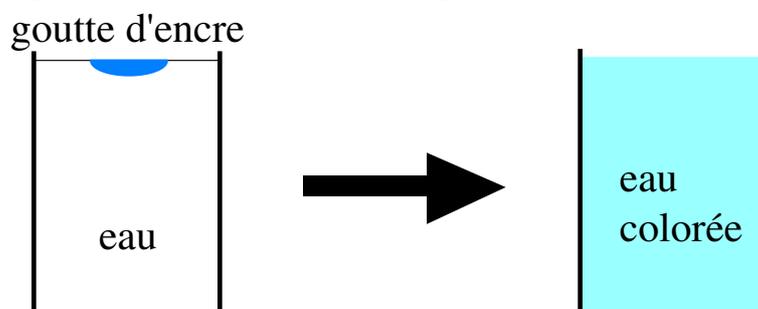
Nous avons aussi en identifiant :

$$S = - \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_{P, N_i} \quad \text{Relation de Gibbs – Duhem}$$

### Un exemple

Nous allons voir au chapitre prochain qu'un équilibre implique l'égalité des variables intensives :

- L'égalité des températures : en effet, si nous laissons un verre d'eau dans une pièce, automatiquement, l'équilibre thermique se fait.
- Un cylindre rempli d'un gaz et fermé par un piston est laissé à lui-même. L'équilibre est atteint quand les pressions de part et d'autre de la paroi sont égales.
- Si nous laissons tomber une goutte d'encre dans un verre d'eau, nous savons tous que l'état d'équilibre est celui d'une coloration uniforme du liquide dans le verre. Ici, c'est un *transfert de matière* (les molécules de colorant) qui a permis d'atteindre l'équilibre.



Dans ce dernier cas, et par analogie avec la description des équilibres thermique et mécanique, on peut penser qu'il existe un paramètre équivalent à la température et à la pression qui devient égal pour le système et le milieu extérieur à l'équilibre. Ce paramètre, bien qu'il soit difficile à imaginer, est le **potentiel chimique**  $\mu$ .

# Physique Générale

## Equilibre entre phases

### Introd. à la Thermodynamique Chimique

### Mélange et pression osmotique

TRAN Minh Tâm

## Table des matières

<b>Equilibre entre phases</b>	<b>270</b>
Equilibre entre phases . . . . .	270
Règle des phases . . . . .	271
Les phases de l'eau comme exemple . . . . .	272
Chaleur latente et relation de Clausius-Clapeyron . . . . .	274
<b>Description d'un mélange</b>	<b>277</b>
Entropie d'un mélange, potentiels chimiques . . . . .	277
Pression osmotique . . . . .	278

## **Introduction à la Thermodynamique chimique 281**

Introduction . . . . . 281

L'enthalpie libre . . . . . 281

Conditions d'équilibre, loi d'action de masse . . . . . 282

Réaction des gaz parfaits . . . . . 284

## **Chaleur de réaction 287**

Définitions . . . . . 287

Relations entre ces quantités . . . . . 287

Mesure des enthalpies de réaction . . . . . 288

Déplacements d'équilibre . . . . . 289

## Equilibre entre phases

Nous recherchons dans ce paragraphe les conditions sous lesquelles un corps peut exister dans différents états (solide, liquide ou gaz); ces états sont appelés *phases*. Le passage d'une phase à l'autre s'appelle une *transition de phase*.

### Equilibre entre phases

Nous recherchons les conditions thermodynamiques requises pour un équilibre entre phases notées par les indices en haut  $\alpha$ ,  $\beta$ .

1. Equilibre thermique. Pour un équilibre à volume constant et pour une quantité de matière fixe, l'équilibre est réalisé si  $dS = 0$ . Appelons  $S^\alpha$  et  $S^\beta$  les entropies des deux phases et  $\delta Q$  le transfert de chaleur d'une phase à l'autre :

$$dS = dS^\alpha + dS^\beta = 0 \Rightarrow -\frac{\delta Q}{T^\alpha} + \frac{\delta Q}{T^\beta} = 0$$

Nous obtenons l'évidente relation :  $T^\alpha = T^\beta$ .

2. Equilibre mécanique. Si le volume global est constant comme l'est la température, l'équilibre s'exprime par  $dF = 0$ . Supposons qu'une des phases s'étend dans l'autre, alors :

$$dF = P^\alpha \delta V - P^\beta \delta V = 0 \Rightarrow P^\alpha = P^\beta$$

Il ne peut en être autrement sinon, nous n'aurions pas d'équilibre.

3. Equilibre chimique. Si la transition de phase se fait à température et pression constantes, l'équilibre est atteint avec  $dG = 0$ . Supposons que dans notre processus,  $dn_i$  moles passent de la phase  $\alpha$  à la phase  $\beta$  :

$$dG = dG^\alpha + dG^\beta = -\mu_i^\alpha dn_i + \mu_i^\beta dn_i = 0 \Rightarrow \mu_i^\alpha = \mu_i^\beta$$

(L'indice en bas correspond à la substance "i" qui existe dans les phases  $\alpha$  et  $\beta$ .)

## Equilibre entre phases

Nous retrouvons une condition d'équilibre chimique.

En résumé, nous avons les conditions d'équilibre suivants :

Variable extensive	Variable intensive	Condition d'équilibre
Entropie S	Température T	$T^\alpha = T^\beta$
Volume V	Pression P	$P^\alpha = P^\beta$
Nbre de mole $n_i$	Pot. chimique $\mu_i$	$\mu_i^\alpha = \mu_i^\beta$

### Règle des phases

- Nombre de composantes. Le nombre de composantes  $c$  est le nombre d'éléments chimiques présents dans le système **moins** le nombre de réactions qui s'y déroulent.

**Exemple :** Si nous avons un mélange d'hydrogène, d'oxygène et de vapeur d'eau sans que la réaction  $H_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow H_2O$  ne se produise, nous aurons  $c = 3$  composantes. Avec un catalyseur, la réaction se produit et le nombre de composantes est  $c = 2$ .

- Règle des phases. En 1875, Josiah W. Gibbs énonça la relation qui existe entre *le nombre de degrés de liberté,  $f$* , d'un système, le nombre de phases  $p$  et le nombre de composantes  $c$  :

$$f = c - p + 2$$

Le nombre de degrés de liberté d'un système est le nombre de variables intensives nécessaires pour sa description, moins le nombre de ces variables qui sont liées.

1. Les variables intensives sont ici la pression, la température et les potentiels chimiques. Si nous avons  $c$  composantes et  $p$  phases, nous avons  $c \cdot p$  potentiels chimiques auxquels il faut ajouter la pression et la température : donc  $c \cdot p + 2$  variables intensives.
2. Nous avons, à l'équilibre, l'égalité des potentiels chimiques des différentes phases d'une même composante :

$$\begin{aligned} \mu_1^\alpha &= \mu_1^\beta = \mu_1^\gamma = \\ \mu_2^\alpha &= \mu_2^\beta = \mu_2^\gamma = \end{aligned}$$

$$\mu_c^\alpha = \mu_c^\beta = \mu_c^\gamma =$$

# Equilibre entre phases

Ces  $c \cdot (p - 1)$  égalités sont autant de contraintes.

3. Dans chaque phase  $\alpha$  la fraction molaire de la composante  $i$  est de

$x_i^\alpha = \frac{n_i^\alpha}{\sum_i n_i^\alpha}$ . La somme des fractions molaires de la composante  $i$  est évidemment égal à 1 :  $\sum_i x_i = 1$ , ce qui donne 1 contrainte par phase, donc  $p$  contraintes.

4. Le nombre de degrés de liberté est donc :

$$f = p \cdot c + 2 - c \cdot (p - 1) - p = c - p + 2$$

Dans le reste de ce paragraphe, nous ne considérerons qu'un système à une seule composante.

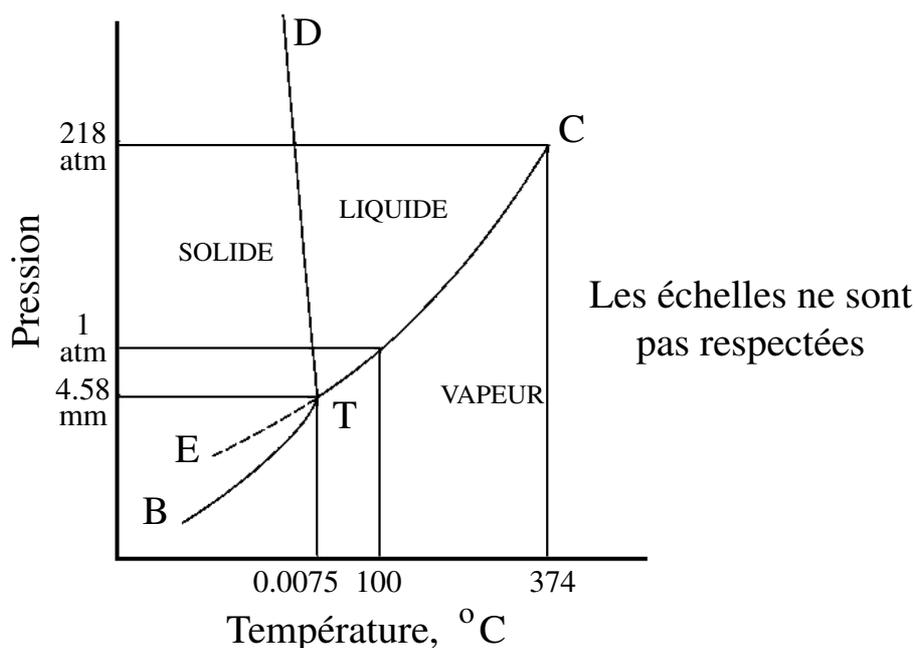
## Les phases de l'eau comme exemple

Avec une seule composante (l'eau),  $c = 1$ , le nombre de degrés de liberté dépend du nombre de phases considérées :

$$p = 1, f = 2$$

$$p = 2, f = 1$$

$$p = 3, f = 0$$



## Equilibre entre phases

Au maximum, nous avons 2 degrés de liberté pour le système à une phase. Nous pouvons représenter l'état du système dans un diagramme à deux dimensions, c.à.d. un diagramme avec 2 variables indépendantes  $P$  et  $T$  par exemple ; si nous connaissons l'équation d'état du système, nous pouvons aussi exprimer l'état avec les variables  $P$  et  $V$ .

Avec deux phases en équilibre,  $f = 1$  : nous devons nous déplacer sur une courbe.

Avec trois phases en équilibre,  $f = 0$  : nous n'avons aucune liberté sinon d'être sur un point, le *point triple*.

Sur le dessin, T est le point triple ; ses coordonnées sont  $T_T = 273,16$  K et  $P_T = 4,579$  mm d'air =  $6,026 \cdot 10^{-3}$  atm. Le point triple de l'eau ne correspond pas au point de fusion ordinaire de la glace, fixé à 1 atm et 273.15 K.

La courbe TC,  $f = 1$ , sépare le liquide de la vapeur. Avec  $f = 1$ , pour une température, il n'y a qu'une et une seule pression à laquelle on peut trouver vapeur et liquide en équilibre. Au delà du point critique C, nous ne pouvons plus faire de distinction entre liquide et vapeur : on parle *d'état fluide*.

La courbe TB,  $f = 1$ , est la courbe de sublimation qui sépare le solide de la vapeur. La courbe TD,  $f = 1$ , est la courbe de fusion et sépare le solide du liquide.

L'eau peut être refroidie au delà de son point de congélation : c'est le phénomène de *surfusion* représenté sur le diagramme par la branche TE, continuation de TC. Remarquez que la pression de vapeur de cette eau en surfusion est plus haute que celle de la vapeur de sublimation de la glace.

**Point de contrôle a)** L'équilibre entre phases se traduit-elle par

1. l'égalité de l'entropie des deux phases
2. l'égalité des potentiels chimiques des deux phases

## Equilibre entre phases

3. l'égalité des énergies internes des deux phases

b) Dans un diagramme de phase (T,P), les trois lignes de transition se rencontrent

1. au point triple
2. au point critique
3. jamais

### Chaleur latente et relation de Clausius-Clapeyron

Nous savons qu'il ne suffit pas de placer un glaçon à 0° C pour qu'il fonde, il faut encore lui apporter de la chaleur : on peut par exemple placer le glaçon dans une enceinte thermostatée à  $(0 + \epsilon)^\circ \text{C}$  : la transformation se fait à T et P constantes ; elle est en plus réversible. Dans cette transformation faite à l'équilibre et à P et T constantes sur 1 mole :

$$0 = \Delta H_{mole} - T \Delta S_{mole}$$

$$[ \text{en effet : } dH = T dS + V dP + \sum \mu_i dn_i \text{ avec } dn^\alpha = -dn^\beta \text{ et } \mu^\alpha = \mu^\beta ]$$

$$\Rightarrow \Delta H_{mole} = T \Delta S_{mole} = Q_{mole} = L_{mole}$$

$L_{mole}$  est la chaleur molaire latente, quantité de chaleur échangée pour la transformation de phase d'une mole.

Pour la fusion, nous avons :

$$L_{fusion,mol.} = T S_{liq.} - T S_{solide} = H_{liq.} - H_{solide}$$

On définit de la même manière les chaleurs latentes de vaporisation et de sublimation.

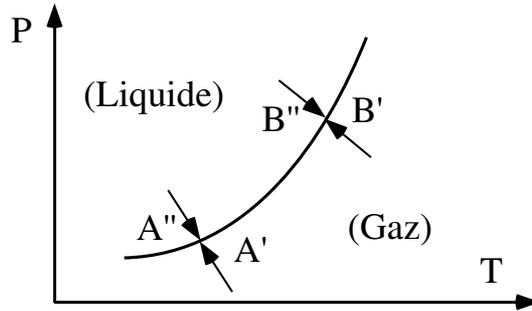
### Relation de Clausius-Clapeyron

Cette relation donne les pentes des courbes de coexistence de phase en diagramme P-T en fonction de la chaleur latente. Prenons deux points A et B sur une ligne de transition de phase pour une composante.

Au point A, nous avons de part et d'autre de la ligne de transition de phase deux états  $A'$  et  $A''$ . De même, au point B. A l'équilibre :

$$P(A') = P(A'') \quad T(A') = T(A'')$$

## Equilibre entre phases



$$P(B') = P(B'') \quad T(B') = T(B'')$$

Comme pour une phase donnée  $dG = -S dT + V dP + \mu dn$ , à P et T sont constantes, nous avons

$$dG = \mu dn \Rightarrow G_{mole} = \mu \text{ dans 1 phase donnée}$$

De l'égalité des potentiels chimiques à l'équilibre des deux phases, nous déduisons :

$$G_{mole}(A') = G_{mole}(A'')$$

$$G_{mole}(B') = G_{mole}(B'')$$

Donc, en passant de A à B, deux points proches situés sur la courbe d'équilibre entre deux phases, pour une mole :  $dG' = dG''$  : que l'on estime les variations de l'enthalpie libre dans la phase ' ou dans la phase '', on obtient le même résultat.

$$dG' = dG'' = -S'_{mole} dT + V'_{mole} dP = -S''_{mole} dT + V''_{mole} dP$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dT} = \frac{S'_{mole} - S''_{mole}}{V'_{mole} - V''_{mole}} = \frac{\Delta S_{mole}}{\Delta V_{mole}}$$

Comme pour une mole  $L_{mole} = T \Delta S_{mole}$

$$\boxed{\frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{L_{mole}}{T \cdot \Delta V_{mole}}}$$

Relation de Clausius Clapeyron

$L > 0$  pour toutes les transitions solide  $\rightarrow$  liquide, solide  $\rightarrow$  gaz, liquide  $\rightarrow$  gaz (sauf pour une partie de la courbe de vaporisation de l'Hélium 3)

## Equilibre entre phases

$\Delta V > 0$  dans les transitions solide  $\rightarrow$  gaz, liquide  $\rightarrow$  gaz et, en général, pour les transitions solide  $\rightarrow$  liquide. Exceptions notoires : glace  $\rightarrow$  eau et les transitions solide  $\rightarrow$  liquide du Bismuth et de l'Antimoine.

## Entropie d'un mélange, potentiels chimiques

Nous avons, dans la détente de Joule, défini l'entropie d'un système de  $N$  particules à partir du nombre des états détaillés occupés par les particules, soit dans le compartiment de gauche, soit dans le compartiment de droite. Nous nous intéressons maintenant au mélange de deux substances 1 et 2.

Nous pouvons définir l'entropie pour les  $N_1$  particules de type 1 et l'entropie pour les  $N_2$  particules de type 2 séparément. Que se passe-t-il si nous mélangeons les deux types de particules ? Les particules 1 et 2 étant **discernables** le nombre d'états nouveaux résultant du mélange est de :

$$W_M = \frac{N!}{N_1! N_2!} \quad N = N_1 + N_2$$

[On commence par faire les  $N!$  permutations et on corrige ensuite des  $N_1! N_2!$  permutations des particules indiscernables 1 et 2 respectivement].

L'entropie totale est de  $S_{total} = S_1 + S_2 + S_M$  où  $S_M = k \ln W_M$ ,  $S_1$  et  $S_2$  étant les entropies des corps purs 1 et 2.

Lors d'un mélange, il y a augmentation de l'entropie due au désordre introduit par le mélange lui-même.

En utilisant la formule d'approximation de Stirling, comme nous l'avons fait lors de la définition de l'entropie, nous obtenons facilement :

$$S_M = k (N_1 + N_2) \ln (N_1 + N_2) - k N_1 \ln N_1 - k N_2 \ln N_2$$

Calculons le potentiel chimique des particule 1 dans le mélange en nous aidant de l'expression obtenue à la fin du chapitre précédent :

$$\frac{\mu_{1,M}}{T} = - \left( \frac{\partial S_M}{\partial N_1} \right)_{U,V,N_2} = - k \ln \frac{N_1 + N_2}{N_1}$$

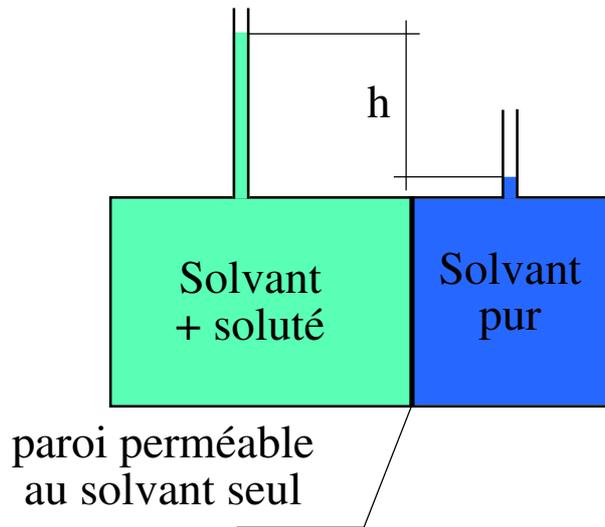
$$\Rightarrow \mu_{1,M} = kT \ln \frac{N_1}{N} = kT \ln x_1$$

et de même :  $\mu_{2,M} = kT \ln x_2$ , ( $N = N_1 + N_2$  et  $x_1$  ou  $x_2$  les fractions molaires de 1 et de 2 dans le mélange.)

# Description d'un mélange

## Pression osmotique

Un mélange de solvant et de soluté est placé du côté gauche d'une membrane semi-perméable. De l'autre côté, est placé du solvant pur. La membrane est perméable dans les deux sens au solvant seulement. Appelons  $x$  la fraction molaire du soluté ( $x \ll 1$ ).



A l'équilibre, nous avons l'égalité des potentiels chimiques du solvant juste de part et d'autre de la membrane. Soit  $\mu_0$  le potentiel chimique du solvant pur. Le potentiel chimique du solvant en présence du soluté devient alors :

$$\mu(\text{solvant}) = \mu_0 + kT \ln(1 - x) \approx \mu_0 - kT x$$

[  $(1 - x)$  est la fraction molaire du solvant, puisque  $x$  est celui du soluté] C'est un fait d'expérience qu'il y a une différence de pression entre les deux compartiments. A gauche et à droite de la membrane, il y a donc une différence de pression que nous appelons "**pression osmotique**"  $P_{osm}$ .

Si nous explicitons la dépendance du potentiel chimique du solvant en fonction de la température et de la pression à droite et à gauche de la membrane, nous obtenons :

$$\mu_0(T, P) = \mu_0(T, P + P_{osm}) - kT x$$
$$\mu_0(T, P) \underset{\substack{\approx \\ \text{dévelop. limité de } P}}{\approx} \mu_0(T, P) + \left( \frac{\partial \mu_0}{\partial P} \right)_T \cdot P_{osm} - kT x$$

## Description d'un mélange

$$\Rightarrow P_{osm} \cdot \left( \frac{\partial \mu_0}{\partial P} \right)_T \approx kT x$$

Il nous reste à calculer la dérivée partielle du potentiel chimique par rapport à la pression. Pour cela, reportons nous à l'expression de la différentielle de l'enthalpie libre

$$dG = -S dT + V dP + \mu dN$$

dont nous tirons :

$$\mu = \left( \frac{\partial G}{\partial N} \right)_{T,P} \quad V = \left( \frac{\partial G}{\partial P} \right)_{T,N}$$

L'égalité des dérivées secondes croisées donne :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial N \partial P} = \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_{T,N} = \frac{\partial^2 G}{\partial P \partial N} = \left( \frac{\partial V}{\partial N} \right)_{P,T}$$
$$\left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_{T,N} = \frac{V}{N} = V_0 = \text{volume molaire du solvant}$$

Donc :

$$P_{osm} = \frac{kT x N_{solvant}}{V}$$

Nous obtenons une relation du *type gaz parfait*, bien qu'il s'agisse d'un système à l'état liquide. La relation obtenue est relative à la **pression osmotique** et non à la pression qui règne dans le liquide.

Résumé : Etapes de la démonstration.

- Nous avons tout d'abord calculé l'entropie d'un mélange et avons vu que l'entropie augmentait à cause du mélange.
- A cause de cette augmentation d'entropie, le potentiel chimique du solvant en présence du soluté diminue de  $kT \ln(1-x) \approx -kT x$ ,  $x$  étant la concentration du soluté.

## Description d'un mélange

- De part et d'autre de la membrane semi-perméable, à l'équilibre, nous devons avoir l'égalité des potentiels chimiques du solvant : à la membrane, le potentiel chimique du solvant dans la solution doit être égal à celui du solvant pur.
- Deux facteurs tendent à modifier le potentiel chimique du solvant dans la solution et ces deux facteurs ont des effets opposés :
  1. la baisse du potentiel chimique du solvant dans la solution vue précédemment,
  2. l'augmentation de ce potentiel chimique avec la surpression donnée par la pression osmotique.

La pression osmotique est très importante en Biologie où beaucoup de membranes sont perméables à l'eau et non à d'autres molécules organiques ou à d'autres ions. Ainsi, le cytoplasme des cellules change de volume quand on les immerge dans des solutions d'eau salée. L'effet osmotique est dû à une concentration en ions différentes à l'intérieur et à l'extérieur de la cellule.

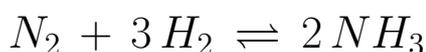
**Point de contrôle** La pression osmotique d'une solution contenant  $32,6 \text{ g} \cdot \text{l}^{-1}$  de soluté est de  $2,43 \text{ atm}$  à  $0^\circ\text{C}$ . Quelle serait la pression osmotique à  $20^\circ\text{C}$  d'une solution contenant  $90,1 \text{ g} \cdot \text{l}^{-1}$  du même soluté ?

## Introduction

Exemple : la synthèse de l'eau. Nous mélangeons de l'hydrogène et de l'oxygène gazeux à température ambiante. Sans sollicitation extérieure, rien ne se passe. Si nous approchons une flamme, la réaction explosive se produit et, à température ambiante, l'eau se condense en sa phase liquide.  $2 H_2 + O_2 \rightarrow 2 H_2O$ .

Remarques :

1. Les coefficients (2, 1, 2) sont les *coefficients stoechiométriques*. Nous pouvons introduire les gaz de départ dans une proportion différente, mais il restera des molécules spectatrices ; exemple :  $2 H_2 + 2 O_2 \rightarrow 2 H_2O + O_2$ .
2. Nous avons écrit la réaction précédente avec une flèche dans un sens pour indiquer que la réaction est complète. Il existe cependant des réactions dans lesquels ce n'est pas le cas, comme pour la synthèse de l'ammoniaque :



Nous avons ici un équilibre chimique, superposition de deux réactions, l'une de synthèse, l'autre de dissociation de l'ammoniaque. En modifiant les conditions opératoires, on peut favoriser le sens de la réaction et, ainsi, déplacer l'équilibre.

3. La synthèse de l'eau écrite précédemment peut être considérée comme un équilibre très déplacé dans un sens. En montant la température, à 1000 K par exemple, on constate que la réaction est incomplète.

## L'enthalpie libre

Les deux réactions évoquées montrent qu'il existe une "*affinité chimique*". L'enthalpie libre (ou énergie de Gibbs) permet de caractériser cette affinité chimique dans les conditions de température et de pression constantes. Rappelons que

## Introduction à la Thermodynamique chimique

$$dG = -S dT + V dP + \sum_i \mu_i dn_i = \sum_i \mu_i dn_i$$

pour les réactifs et les produits.

donc, dans une réaction :

$$\Delta G = \Delta G_{\text{produits}} - \Delta G_{\text{réactifs}}$$

- $\Delta G = 0$  : aucun *travail net*, aucune énergie ne peut être soutirée de la réaction. Le système est en équilibre.
- $\Delta G < 0$  : la réaction est exothermique et peut se produire de manière spontanée et on peut en recueillir un travail net.
- $\Delta G > 0$  : la réaction est endothermique, on doit fournir de l'énergie pour qu'elle se fasse.
- Cependant, pour une réaction exothermique, si grand que puisse être  $|\Delta G|$ , il n'est pas sûr que la réaction se fasse dans n'importe quelle condition.

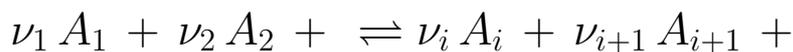
On peut ainsi garder dans une enceinte de l'hydrogène et de l'oxygène dans des proportions stoechiométriques sans voir l'apparition de la moindre trace d'eau, bien que



Il en est de même des résistances à l'oxydation des métaux comme le Mg ou l'Al qui se couvrent d'une couche d'oxyde empêchant toute diffusion de l'oxygène.

### Conditions d'équilibre, loi d'action de masse

Considérons des molécules d'espèce  $A_1, A_2, \dots, A_i$ , participant à une réaction chimique



que nous pouvons écrire d'une façon abrégée  $\sum_i \nu_i A_i$ , les coefficients stoechiométriques  $\nu_i$  étant comptés négatifs pour le premier membre (réactifs) et positifs pour les produits.

A température et pression constantes, pour une réaction faisant varier de  $dn_i$  le nombre de moles de l'espèce  $A_i$ , l'équilibre implique que l'enthalpie

# Introduction à la Thermodynamique chimique

libre  $G$  est minimale dans les conditions extérieures imposées :

$$dG = 0 = \sum_i \mu_i dn_i$$

$dG$  est la variation d'enthalpie libre dans la réaction

Les  $dn_i$  ne sont pas indépendants, mais liés par les coefficients stoechiométriques :

$$dn_i = \frac{\nu_i}{\nu_1} dn_1 \Rightarrow dG = \sum_i \mu_i \nu_i \frac{dn_1}{\nu_1} = 0$$

d'où la condition d'équilibre suivante,  $dn_1$  étant arbitraire :

$$\boxed{\sum_i \nu_i \mu_i = 0 \quad \text{à l'équilibre}}$$

Nous avons donc l'égalité de la somme des potentiels chimiques, pondérés par les coefficients stoechiométriques, des produits et des réactifs.

On peut aussi définir le *degré d'avancement*  $\xi$  de la réaction : une variation de  $\xi$  à  $\xi + d\xi$  signifie que  $\nu_1 d\xi$  moles de  $A_1$ ,  $\nu_2 d\xi$  moles de  $A_2$ , etc... ont réagi pour donner  $\nu_n d\xi$  moles de  $A_n$ ,  $\nu_{n+1} d\xi$  moles de  $A_{n+1}$  etc.. donc  $dn_i = \nu_i d\xi$ .

L'équilibre est défini comme le minimum de  $G$  par rapport à n'importe quel déplacement de la réaction ; donc :

$$\left(\frac{dG}{d\xi}\right)_{\text{équilibre}} = 0 \Rightarrow \sum_i \nu_i \mu_i = 0$$

La relation  $\sum_i \nu_i \mu_i = 0$  est appelée loi d'action de masse ; elle correspond à l'égalité, pondérée par les coefficients stoechiométriques, des potentiels chimiques des réactifs et des produits de la réaction.

La relation  $\sum_i \nu_i \mu_i = 0$  est appelée **loi d'action de masse**.

## Réaction des gaz parfaits

Avec une bonne approximation, si les réactifs et les produits sont des gaz, on peut les considérer comme des gaz parfaits et la variation de l'enthalpie libre pour une mole à température constante :

[on s'intéresse ici à la manière dont varie  $G$  en fonction de  $P$ ]

$$dG_{mole} = V_{mole} dP \quad \underbrace{=}_{\text{éq. gaz parfait}} \quad RT \frac{dP}{P} = RT d \log P$$

On peut intégrer de la pression standard  $P^\circ$  à  $P$  :

$$G_{mole} - G_{mole}^\circ = RT \log \left( \frac{P}{P^\circ} \right) = RT \ln P \quad \text{puisque } P^\circ = 1 \text{ atm}$$

Comme les équations donnant les enthalpies libres peuvent être additionnées et soustraites ( $G$  une fonction d'état extensive), on peut calculer le changement d'enthalpie libre dans une réaction à pression standard :

$$\Delta G^\circ = \Delta G_{\text{produits}}^\circ - \Delta G_{\text{réactifs}}^\circ \quad \underbrace{=}_{\text{coef. stoechiom.}} \quad \sum_i \nu_i G_{mole,i}^\circ$$

Si la réaction se déroule en phase gazeuse et pour autant que le mélange respecte les rapports stoechiométriques (pas de "spectateurs"), le développement qui suit est valable.

Pour un mélange de gaz, la pression totale est la somme des pressions que les divers gaz exerceraient s'ils occupaient le volume entier à disposition. Ces pressions sont appelées *pressions partielles*  $P_1, P_2, \dots$ . Ainsi, avec  $n_i$  moles du gaz  $i$  dans le mélange :  $P_i V = n_i RT$  et l'enthalpie libre variera ainsi de la pression standard à la pression  $P_i$  pour le gaz  $i$  :

$$n_i [G_{mole,i} - G_{mole,i}^\circ] = n_i RT \ln \underbrace{\frac{P_i}{P^\circ}}_{= P_i/P^\circ}$$

Pour une réaction à une pression différente de la pression standard, nous sommions les contributions des différents gaz en respectant les rapports

<sup>1</sup>On trouve les enthalpies libre de formation des molécules tabulées à la **pression standard**  $P^\circ = 1 \text{ atm}$  et on les distingue par un  $^\circ$  en exposant.

# Introduction à la Thermodynamique chimique

stoechiométriques :

$$\Delta G - \Delta G^\circ = RT \sum_i \nu_i \ln P_i$$

On voit ici l'importance de notre hypothèse de départ sur le respect des rapports stoechiométriques : la définition des pressions partielles aurait été complètement différente en présence de "molécules spectatrices".

Si les pressions partielles  $P_i$  sont celles de l'équilibre, alors  $\Delta G = 0$  et

$$\sum_i \nu_i \ln P_i = -\frac{\Delta G^\circ}{RT} \leftarrow \text{Constante}$$

Comme  $\Delta G^\circ$  ne dépend que de la température standard et de la pression standard, le membre de gauche de l'équation est égal à une constante à une température constante.

Ainsi, pour une réaction  $a A + b B \rightleftharpoons c C + d D$ ,

$$\sum_i \nu_i \ln P_i = \ln \frac{(P_C)^c \cdot (P_D)^d}{(P_A)^a \cdot (P_B)^b}$$

Cette expression est le logarithme de la **constante d'équilibre** en termes de pressions partielles, que nous noterons par  $K_P$  :

$$-\Delta G^\circ = RT \ln K_P \quad K_P = \prod_i P_i^{\nu_i}$$

Conclusions :

1. Pour des réactions entre gaz, il existe une constante d'équilibre

$$K_P = \prod_i P_i^{\nu_i}$$

2. Cette constante est reliée au changement d'enthalpie libre dans la réaction.

Remarque : La constante  $K_P$  est sans dimension ; le fait qu'elle semble avoir une dimension  $[P^{\sum \nu}]$  vient du fait que nous avons pris  $P^\circ = 1 \text{ atm}$  dans notre développement et exprimé les pressions partielles en atmosphère.

# Introduction à la Thermodynamique chimique

**Point de contrôle** La constante d'équilibre  $K_P = \prod_i P_i^{\nu_i}$

1. donne la composition du système dans un état d'équilibre naturel,
2. peut donner la composition du système à tout moment.

En terme de concentrations  $c_i$ ,  $P_i = n_i \frac{RT}{V} = c_i RT$ , on a immédiatement

$$K_P = \prod_i c_i^{\nu_i} (RT)^{\sum_i \nu_i} = K_c (RT)^{\sum_i \nu_i}$$

$K_c$  est la constante d'équilibre en terme de concentration, c'est à dire en terme de moles par unité de volume.

En termes de fraction molaire  $P_i = x_i P$  avec  $x_i = P_i/P$  :

$$K_x = \prod_i x_i^{\nu_i} = K_P P^{-\sum_i \nu_i}$$

## Définitions

Nous avons vu au chapitre précédent que, à T et P données, le potentiel chimique est identique à l'énergie de Gibbs par mole. Nous avons aussi défini l'enthalpie libre (énergie de Gibbs) par mole, pour la pression standard. Avec cette définition, nous avons :

$$G_{mol. i}^{\circ}(T) = \mu_{mol. i}^{\circ}(T) = H_{mol. i}^{\circ}(T) - T S_{mol. i}^{\circ}(T)$$

$H_{mol. i}^{\circ}$  et  $S_{mol. i}^{\circ}$  étant respectivement l'enthalpie et l'entropie molaire du constituant  $i$  à la température  $T$  et à la pression standard. On peut utiliser cette expression pour calculer  $\Delta G^{\circ}$  dans une réaction.

$$\Delta G^{\circ} = \Delta H^{\circ} - T \Delta S^{\circ}$$

avec 
$$\Delta H^{\circ} = \sum_i \nu_i H_{mol. i}^{\circ}(T) \quad \text{et} \quad \Delta S^{\circ} = \sum_i \nu_i S_{mol. i}^{\circ}(T)$$

On définit ainsi l'**enthalpie** et l'**entropie standard de réaction**.

## Relations entre ces quantités

Ces différentes grandeurs ne sont pas indépendantes ; par exemple, si nous reprenons l'expression du potentiel chimique de la composante  $i$ , P et T données :

$$\mu_{mol. i}(T, P) = H_{mol. i} - T S_{mol. i}$$

mais, nous avons de l'équation de Gibbs-Duhem (page 265) :

$$S_{mol. i} = - \left( \frac{\partial \mu_{mol. i}}{\partial T} \right)_P$$

c'est à dire : 
$$H_{mol. i} = \mu_{mol. i} - T \left( \frac{\partial \mu_{mol. i}}{\partial T} \right)_P$$

Nous avons aussi :

$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\mu_{mol. i}}{T} \right)_P = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial \mu_{mol. i}}{\partial T} \right)_P - \frac{\mu_{mol. i}}{T^2}$$

## Chaleur de réaction

c'est à dire 
$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\mu_{mol. i}}{T} \right)_P = - \frac{H_{mol. i}}{T^2}$$

Relation de Gibbs-Helmholtz

Lorsqu'on pondère avec les coefficients stoechiométriques, on obtient des relations analogues pour les enthalpie et entropie standards de réaction :

$$\Delta S^\circ = - \frac{d}{dT} \Delta G^\circ$$

$$\Delta H^\circ = \Delta G^\circ - T \frac{d}{dT} \Delta G^\circ$$

$$\frac{d}{dT} \left( \frac{\Delta G^\circ}{T} \right) = - \frac{\Delta H^\circ}{T^2}$$

Relation de Gibbs-Helmholtz

$\Delta G^\circ$  ne dépendant que de T, la dérivée par rapport à T est une dérivée totale et non pas une dérivée partielle.

### Mesure des enthalpies de réaction

Dans une réaction chimique effectuée à pression constante, la chaleur échangée avec le milieu extérieur correspond à la variation d'enthalpie. Cette chaleur est mesurable et si, de plus, la réaction est effectuée à pression standard, la chaleur de réaction donne directement l'enthalpie standard de réaction  $\Delta H^\circ$ .

Avec la convention de signe adoptée, à une réaction *exothermique* correspond  $\Delta H^\circ < 0$  : elle dégage de la chaleur dans l'environnement. Au contraire, une réaction *endothermique* correspond à  $\Delta H^\circ > 0$ .

Parmi les substance chimiques, certaines sont des corps simples (éléments) ( $H_2$ ,  $O_2$ ,  $He$ ,  $C$ ,  $Si$ , etc...). Pour les autres (ex. :  $HCL$ ,  $CO_2$ ,  $CH_4$ , etc...), on peut imaginer des réactions chimiques de formation qui permet de les synthétiser. On trouve dans les tables thermodynamiques les **enthalpies standard de formation**.

## Déplacements d'équilibre

Nous avons vu que l'on peut déplacer l'équilibre d'une réaction avec la température. Nous allons montrer la loi qui régit ce déplacement d'équilibre avec T ; nous verrons aussi qu'il est possible de déplacer cet équilibre avec la pression.

### Déplacement de l'équilibre avec la température

Nous avons vu que la constante d'équilibre chimique s'écrit :

$$RT \log K_P(T) = -\Delta G^\circ$$

Si nous employons la relation de Gibbs-Helmholtz, nous obtenons :

$$\frac{d}{dT} \log K_P(T) = \frac{d}{dT} \left( -\frac{\Delta G^\circ}{RT} \right) = \frac{\Delta H^\circ}{RT^2}$$

Loi de van't Hoff

### Déplacement de l'équilibre avec la pression

On peut de la même façon garder la température constante et faire varier la pression ; nous avons vu que les constantes d'équilibre  $K_P$  et  $K_c$  sont indépendantes de la pression pour un gaz parfait. En fonction de la fraction molaire  $x$ , la constante  $K_x$  varie avec la pression.

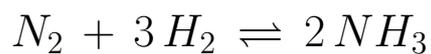
Comme  $K_x = K_P P^{-\sum_i \nu_i}$ ,

$$\frac{d}{dP} \log K_x = \frac{-\sum_i \nu_i}{P} = -\frac{\Delta V}{RT}$$

La loi de déplacement de l'équilibre est connue sous le nom de loi de Le Chatelier. Si  $\sum_i \nu_i$  est positif,  $K_x$  diminue si P augmente : on déplace l'équilibre de la droite vers la gauche.

## Chaleur de réaction

Exemple :



Cette synthèse de l'ammoniac se fait entièrement en phase gazeuse. Ici,  $\sum_i \nu_i < 0$  et on peut déplacer l'équilibre vers la droite en augmentant la pression à laquelle se fait la réaction.

# Physique Générale

## Phénomènes ondulatoires

### Propriétés générales

TRAN Minh Tâm

## Table des matières

<b>Caractéristiques des ondes</b>	<b>291</b>
Introduction . . . . .	291
Onde transverse - onde longitudinale . . . . .	292
Description d'une onde . . . . .	293
Vitesse d'une onde . . . . .	296
Equation d'onde . . . . .	300
Energie associée à une onde mécanique . . . . .	301
<b>Addition des ondes</b>	<b>304</b>
Le principe de superposition . . . . .	304

Ondes stationnaires . . . . . 307

Onde stationnaire et résonance . . . . . 309

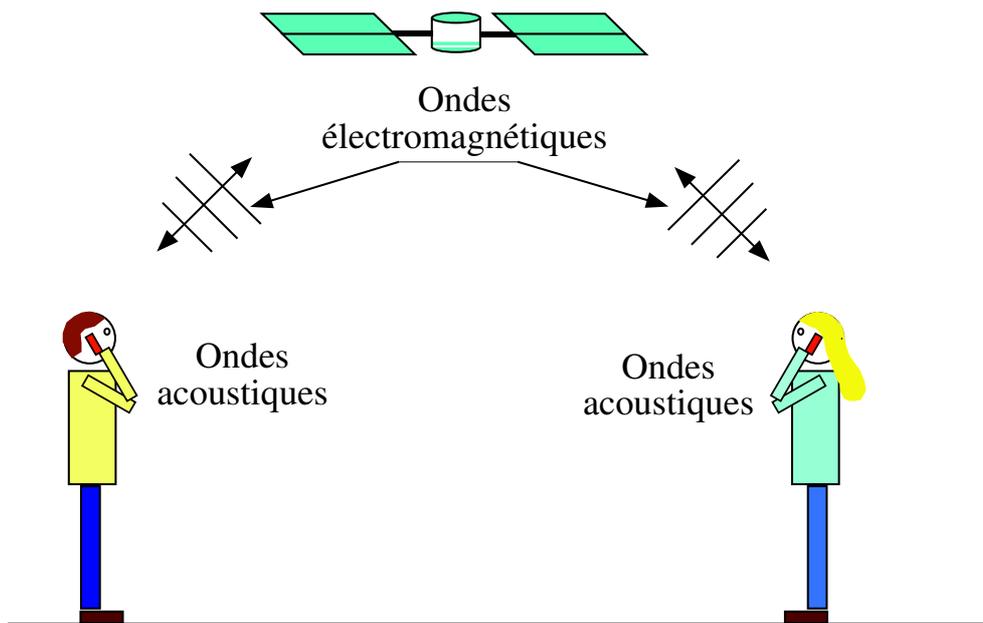
## Introduction

Les ondes sont très diverses :

1. les **ondes mécaniques** : nous avons tous en tête des ondes sur l'eau, des ondes acoustiques, des ondes sismiques ; ces ondes mécaniques n'existent que si elles ont un support matériel dans lequel elles se propagent : ce sont l'eau, l'air, la roche, etc... Ces ondes ayant un support matériel, nous pouvons utiliser les lois de Newton pour dégager certains aspects de leur propagation.
2. les **ondes électromagnétiques** : ces ondes peuvent vous être moins familières mais vous les utilisez constamment. Bien qu'elles portent les noms aussi diverses que rayons gamma, rayons X, ultra-violets, lumière, infra-rouges, micro-ondes, ondes radio, etc..., ces sont toutes des ondes électromagnétiques composés d'un champ électrique et d'un champ magnétique variables en fonction du temps. Ces ondes n'ont pas besoin de support matériel pour leur propagation : la lumière du Soleil et des étoiles viennent à nous après avoir voyagé dans le vide, les signaux de commande des sondes spatiales et les signaux renvoyés par ces sondes voyagent aussi dans le vide. Toutes les ondes électromagnétiques ont ceci en commun : elles se propagent toutes à la même vitesse dans le vide :  $c = 299\,792\,458$  m/s.
3. les **ondes de matière** : ces ondes vous sont certainement inconnues et sont associées aux électrons, protons et autres particules élémentaires, atome ou molécules. Toute un nouveau domaine de la Physique a été ainsi développé, avec son formalisme, ses interprétations.

La figure ci-dessous montre deux exemples d'ondes auxquelles nous sommes tout à fait habitués : les ondes acoustiques que nous émettons font vibrer la membrane du téléphone et les vibrations de la membrane de l'écouteur nous envoient des ondes acoustiques. L'onde électromagnétique (onde radio) qu'émet le téléphone est captée par un relais, puis envoyée à un satellite géostationnaire qui le renvoie sur un autre relais et, delà, à notre correspondant.

# Caractéristiques des ondes



Le développement que nous allons faire dans ce chapitre sera général pour être utilisable pour toutes les ondes. Les exemples traiteront cependant uniquement des ondes mécaniques.

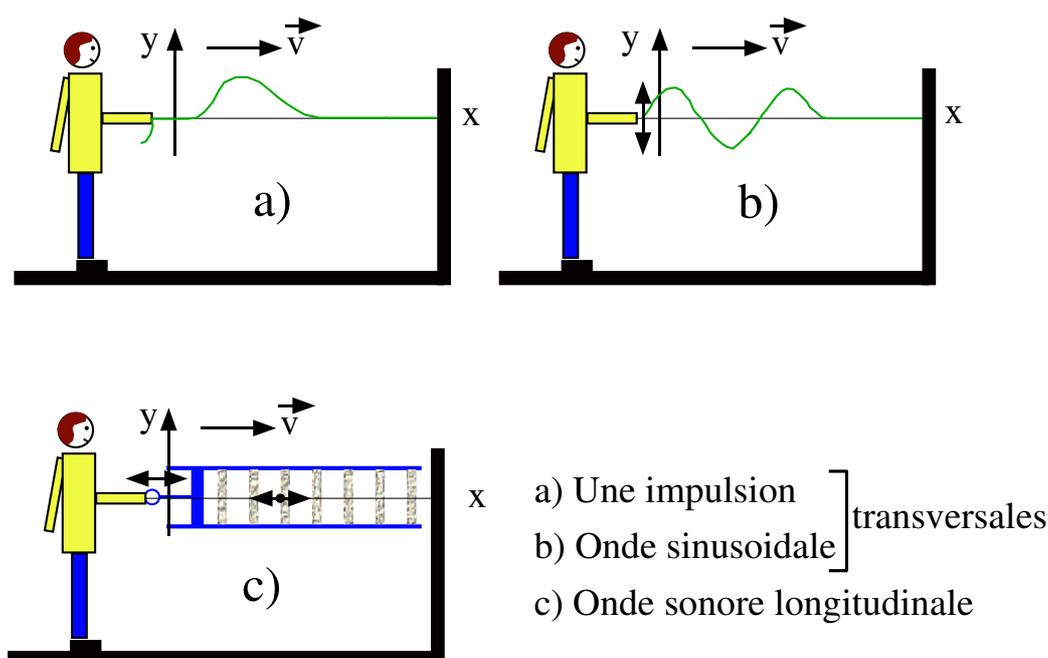
## Onde transverse - onde longitudinale

Nous décrivons ici des ondes mécaniques.

Imaginons que nous tenions dans nos mains une corde tendue et attachée à un mur. Nous pouvons donner à la corde un seul coup de bas en haut et de haut en bas : dans ce cas, cette impulsion se propagera le long de la corde pour arriver au mur. Si nous agissons continuellement la corde de bas en haut à un rythme constant, nous obtenons une onde périodique se propageant le long de la corde.

Dans ce problème, nous aimerions suivre l'onde dans son déplacement le long de la corde, ou bien, nous aimerions suivre le mouvement vertical d'un élément de la corde lorsque l'onde passe. Nous voyons déjà que le mouvement des éléments de la corde est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde ; c'est pour cette raison que l'on appelle cette onde une *onde transverse*.

## Caractéristiques des ondes



La figure c) montre une onde sonore produite par un piston dans un tube rempli d'air : en actionnant le piston d'avant en arrière, nous pouvons générer une succession de surpression et de dépression dans le tube. Lorsque nous poussons le piston vers la droite, nous créons une surpression dans une couche d'air ; cette surpression va à son tour comprimer la couche d'air à sa droite. Lorsque nous ramenons le piston vers la gauche, nous créons une dépression. A cause de l'élasticité, la première couche d'air revient vers la gauche, de même que les couches qui ont été comprimées. Comme résultat, nous avons une succession de surpression et de dépressions qui partent du piston pour se propager le long du tube. Le mouvement d'une couche, symbolisé par le point sur la figure c), est selon la direction de propagation des surpressions et dépressions : l'onde est *longitudinale*.

### Description d'une onde

Pour décrire le mouvement de la corde ou la différence entre la pression dans le tube et la pression extérieure des deux exemples précédents, nous devons avoir une fonction qui dépende de la position  $x$  et du temps  $t$ .

Pour fixer les idées, considérons seulement le mouvement de la corde et supposons que nous ayons une onde sinusoïdale. A un instant  $t$ , le déplacement

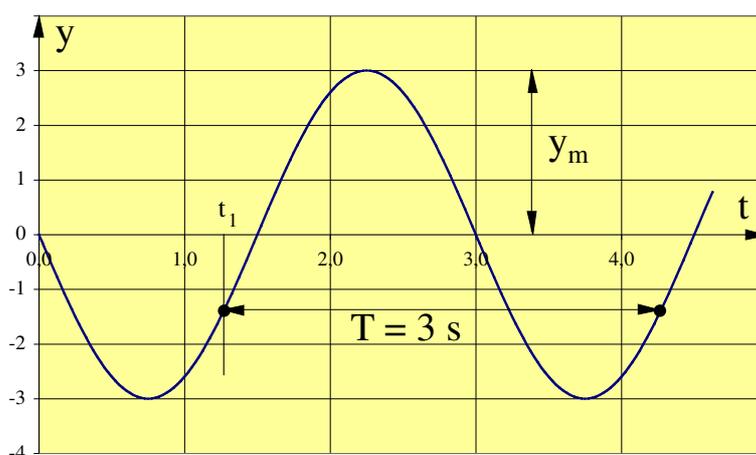
## Caractéristiques des ondes

d'un élément de la corde à la position  $x$  est

$$\underbrace{y(x, t)}_{\text{déplacement}} = \underbrace{y_m}_{\text{amplitude}} \sin(\underbrace{kx - \omega t}_{\text{phase}})$$

Cette équation nous permet d'avoir la forme de l'impulsion à tout instant et le mouvement d'un élément en fonction du temps.

La figure ci-dessous montre le déplacement d'un élément de la corde en  $x = 0$  en fonction du temps.



Nous avons donc, pour le mouvement de l'élément de la corde en  $x = 0$  :

$$y(0, t) = y_m \sin(-\omega t) = -y_m \sin \omega t \quad (x = 0)$$

La **période**  $T$  est l'intervalle de temps nécessaire à un élément de la corde pour avoir le même déplacement dans la même direction.

$$-y_m \sin \omega t_1 = -y_m \sin \omega(t_1 + T) \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

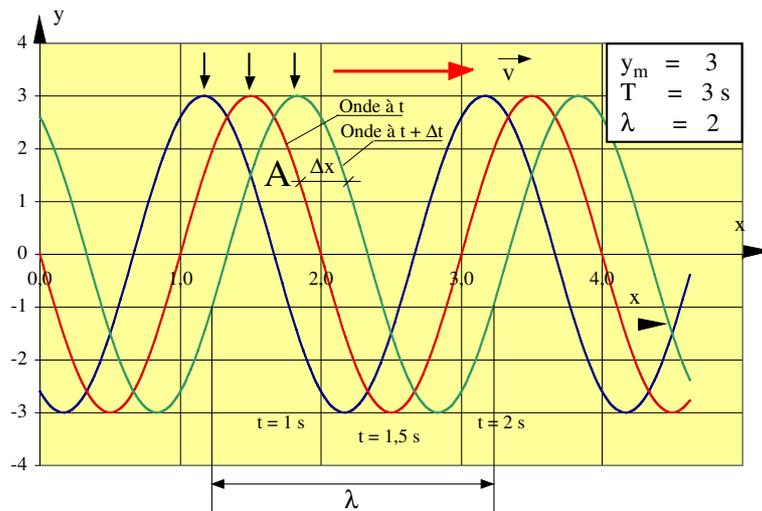
$\omega$  est appelé **pulsation** de l'onde, son unité est  $s^{-1}$ .

La **fréquence** de l'onde, égale à l'inverse de la période, vaut donc

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Pour 3 instants différents, nous prenons 3 instantanés de la corde : nous obtenons

## Caractéristiques des ondes



Nous voyons avec cette série de photos que l'onde avance : de l'instant  $t = 1$  s à  $t = 2$  s, nous voyons le maximum marqué par la flèche se déplacer vers la droite. Dans la représentation de la figure de la page précédente, nous nous sommes placés en  $x = 0$  et avons vu successivement un bout de la corde monter et descendre !

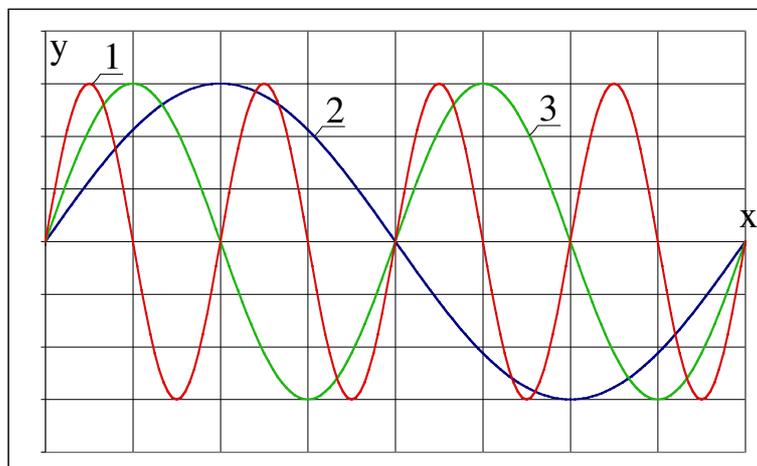
La **longueur d'onde**  $\lambda$  d'une onde est la distance parallèle au déplacement de l'onde pour laquelle cette dernière reprend sa forme. Pour une prise de vue à l'instant  $t = 0$ , nous avons donc :

$$y_m \sin kx = y_m \sin k(x + \lambda) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$k$  est le nombre d'onde, son unité est  $m^{-1}$ .

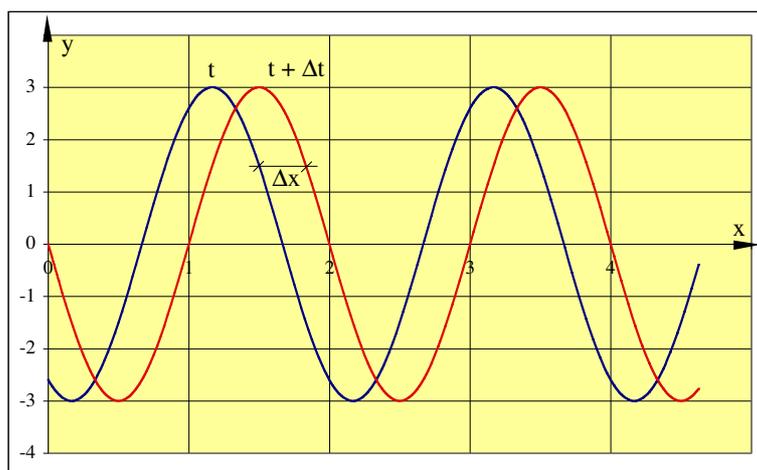
# Caractéristiques des ondes

**Point de contrôle** La figure suivante est un instantané sur lequel 3 ondes progressives sont prises en photo, chacune sur une corde tendue particulière. Des 3 phases suivantes **a)**  $(2x - 4t)$ , **b)**  $(4x - 8t)$ , **c)**  $(8x - 16t)$ , laquelle correspond à l'onde 1), à l'onde 2) et à l'onde 3)?



## Vitesse d'une onde

La figure ci-après montre deux instantanés d'une onde pris à l'instant  $t$  et à l'instant  $t + \Delta t$ ; sur la figure, nous avons également mentionné le déplacement  $\Delta x$  que l'onde a eu pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ .



Lorsque nous avons défini ce déplacement  $\Delta x$ , nous avons pris soin de prendre deux points ayant le même déplacement  $y$  : nous avons ainsi de-

## Caractéristiques des ondes

mandé que la phase de ces 2 points fût la même :

$$kx - \omega t = \text{constant}$$

( $x$  et  $t$  varient tous les deux, mais la combinaison précédente demeure constante)

Prenons la dérivée par rapport au temps de l'expression précédente :

$$k \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad \text{vitesse de l'onde}$$

La relation  $v = \frac{\lambda}{T}$  montre que l'onde avance de 1 longueur d'onde par période. Nous sommes partis d'une onde avançant dans la direction des  $x$  positifs la vitesse  $v$  est ainsi positive. L'onde sinusoïdale s'écrivait :

$$y = y_m \sin(kx - \omega t) \quad \text{onde progressive}$$

Pour des ondes se déplaçant dans le sens des  $x$  négatifs, à la vitesse  $|v|$ , nous aurions du avoir

$$v < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad kx + \omega t = \text{constant}$$

Une onde sinusoïdale "rétrograde" s'écrit donc :

$$y = y_m \sin(kx + \omega t) \quad \text{onde rétrograde}$$

**Point de contrôle** Considérons les 3 ondes suivantes : **1)**  $y(x, t) = 2 \sin(4x - 2t)$  **2)**  $y(x, t) = \sin(3x - 4t)$  **3)**  $y(x, t) = 2 \sin(3x - 3t)$ . Classez ces ondes selon leur vitesse de propagation.

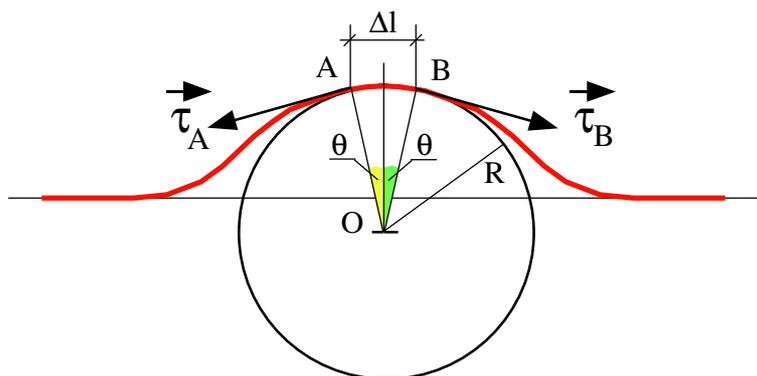
### Application : vitesse d'une onde mécanique sur une corde tendue

Nous avons vu que la vitesse d'une onde mécanique est égale au rapport de la longueur d'onde à sa période, mais ce sont les **propriétés de la matière** qui vont fixer la valeur de cette vitesse. En effet, dans sa propagation dans un support matériel, une onde mécanique met en mouvement des éléments de la matière, dotés

## Caractéristiques des ondes

de **masse** et d'**élasticité**. Nous allons chercher la vitesse d'une onde mécanique en utilisant la **loi de Newton**.

Considérons une impulsion sur une corde tendue comme celle dessinée quelques pages en arrière, et sur cette impulsion, un élément  $\Delta l$  de la corde. Cet élément est soumis aux tensions  $\tau$  et a une courbure : nous avons dessiné le cercle tangent en cet instant  $t$  (*cercle osculateur*).



Les deux tensions  $\tau$ , ont une résultante verticale :

$$F = 2 \cdot (\tau \sin \theta) \underset{\theta \text{ petit}}{\approx} 2 \tau \theta = \tau \frac{\Delta l}{R} \quad (\text{force})$$

La masse de l'élément  $\Delta l$  est de  $\Delta m = \mu \Delta l$ ,  $\mu$  est la masse par unité de longueur de la corde. A l'instant exact où l'onde est telle que représentée sur la figure, en utilisant la loi de Newton, nous avons :

$$F \underset{\text{Newton}}{=} \Delta m \cdot a \Rightarrow \tau \frac{\Delta l}{R} = (\mu \Delta l) \cdot \underbrace{\frac{v^2}{R}}_{\text{acc. centripète}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

La vitesse de l'onde dépend de la tension et de la masse linéaire de la corde, mais pas de la fréquence de l'onde ; en effet, la fréquence est fixée par ce qui génère l'onde et c'est la longueur d'onde qui "s'adapte" :  $\lambda = v / f$ .

**Point de contrôle** Vous envoyez une onde progressive sur une corde en agitant l'une de ses extrémités. Si vous augmentez la fréquence de vos oscillations, **a)** la vitesse de l'onde **b)** la longueur d'onde de l'onde augmentent-elles, diminuent-elles

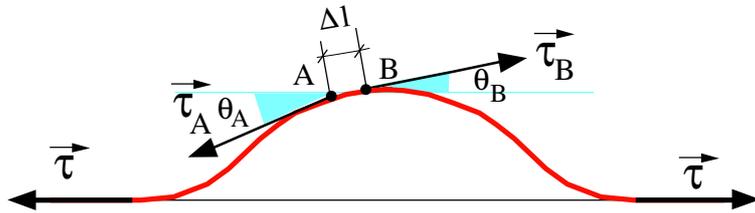
## Caractéristiques des ondes

ou demeurent-elles constantes ? Si maintenant vous augmentez la tension de la corde, **c)** la vitesse de l'onde **d)** la longueur d'onde de l'onde augmentent-elles, diminuent-elles ou demeurent-elles constantes ?

## Equation d'onde

C'est l'équation à laquelle doit satisfaire toute onde. Pour des raisons de didactique, nous reprenons l'exemple de l'impulsion que nous donnons à une corde tendue et admettrons que le résultat obtenu peut être généralisé à toutes les ondes.

Considérons un autre élément  $\Delta l$  dans une portion déformée de notre corde et utilisons encore l'équation de Newton :



$$\mu \Delta l \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \tau_B \sin \theta_B - \tau_A \sin \theta_A \quad \text{selon l'axe } y$$

Nous devons prendre la dérivée partielle de  $y(x, t)$ , car la déformation de la corde dépend de la position  $x$  et du temps  $t$ !

$$\tau_B \cos \theta_B - \tau_A \cos \theta_A = 0 \quad \text{selon l'axe } x$$

Dans les portions non déformées de la corde, nous avons évidemment, selon  $x$  :  $\tau_B \cos \theta_B = \tau$  et  $\tau_A \cos \theta_A = \tau$ .

En réintroduisant dans l'équation de Newton projeté sur l'axe  $y$ , nous avons :

$$\mu \Delta l \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \tau \left( \frac{\sin \theta_B}{\cos \theta_B} - \frac{\sin \theta_A}{\cos \theta_A} \right) = \tau (\tan \theta_B - \tan \theta_A)$$

Mais :

– la  $\tan \theta$  est égale à la dérivée  $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$  (1)

(la corde, à l'instant  $t_0$ , est le graphe de la fonction  $y = y(x, t_0)$ )

## Caractéristiques des ondes

– en faisant un développement limité :

$$\tan \theta(x + dx, t) = \tan \theta(x, t) + \frac{\partial \tan \theta(x, t)}{\partial x} dx \quad (2)$$

Par conséquent :

$$\tau (\tan \theta_B - \tan \theta_A) \underbrace{\approx}_{\text{éq. 2}} \tau \frac{\partial \tan \theta(x, t)}{\partial x} \Delta l \underbrace{=}_{\text{éq. 1}} \tau \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Delta l$$

L'équation de Newton, projetée sur l'axe  $y$  devient donc :

$$\mu \Delta l \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Delta l \quad \text{ou encore :}$$

$$\boxed{\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}}$$

(Equation d'onde)

[On vérifie facilement que l'onde harmonique  $y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$  satisfait bien à l'équation d'onde précédente, avec  $v = \omega / k$ . On vérifie aussi qu'une **fonction de la forme**  $y(x, t) = f(x - vt)$  **satisfait à l'équation d'onde** précédente.]

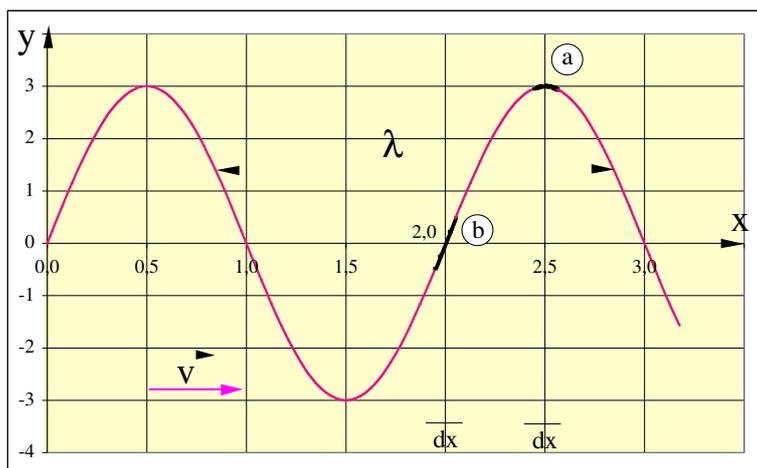
### Energie associée à une onde mécanique

Nous allons reprendre l'exemple de l'onde mécanique sinusoidale sur une corde tendue.

Dès que nous avons agité la corde, nous lui avons communiqué de l'énergie cinétique et au fur et à mesure que l'onde se propage, un élément de la corde est successivement tendu ou comprimé : nous voyons apparaître un terme d'énergie potentielle élastique. Nous avons figuré sur la figure ci-dessous un instantané de la corde à l'instant  $t = 0$ .

Sur la figure, nous comparons un élément de la corde à la position a) (déplacement maximum  $y_m$ ) et un autre élément à la position b) (déplacement nul).

## Caractéristiques des ondes



**Energie cinétique** L'élément de corde, de masse  $dm$ , a la vitesse maximale en b), son énergie cinétique est donc maximale : en effet, le déplacement d'un élément de corde étant  $y = y_m \sin(kx - \omega t)$ , sa vitesse est de  $u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t)$  (attention : ceci est la vitesse d'un élément de la corde et **non pas la vitesse de l'onde**). Pour  $t = 0$ , la vitesse est donc bien maximale à  $y = 0$  et elle est nulle pour  $y = \pm y_m$ .

**Energie potentielle élastique** Lorsqu'un élément de la corde est à  $y = y_m$ , sa longueur  $dx$  n'est pas perturbée (position a)), alors qu'en  $y = 0$  (position b)), l'élément de corde a un allongement maximum, ce qui correspond au maximum de l'énergie potentielle élastique.

En bref, lorsque les éléments de corde ont un déplacement maximum, ils n'ont ni énergie cinétique, ni énergie potentielle élastique, alors que pour un déplacement nul, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle élastique sont à leur maximum. C'est la force due à cette énergie élastique qui travaille à transférer l'énergie des régions où l'énergie mécanique (cinétique + potentielle) existe vers les régions où elle est nulle.

Lorsque nous imprimons à la corde un mouvement oscillatoire harmonique de sorte que son déplacement soit donné par  $y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$ , nous fournissons constamment de l'énergie pour le mouvement vertical des éléments de la corde et pour la compression et l'allongement de ceux-ci.

## Caractéristiques des ondes

Quand l'onde arrive dans une région initialement au repos, l'énergie est transférée à ces nouvelles sections.

*L'onde transporte de l'énergie dans sa propagation, mais ne transporte pas de matière.*

**Point de contrôle** Lorsque vous imprimez une onde à une corde tendue, l'énergie transportée sera-t-elle plus importante, moins importante ou la même lorsque vous **a)** augmentez la tension de la corde **b)** augmentez la fréquence des oscillations **c)** augmentez l'amplitude des oscillations? Répondez intuitivement, la relation exacte donnant l'énergie transportée n'ayant pas été démontrée.

## Le principe de superposition

Nous énonçons le principe suivant qui est à la base de toute étude sur l'addition des ondes. C'est le cas lorsque nous voyons deux ondes sur la surface d'un bassin se superposer à cause du passage de 2 (ou davantage) bateaux, lorsque deux ondes se propagent sur une même corde, etc...

**Principe de superposition** : “Superposer” des ondes revient à les additionner algébriquement pour obtenir une onde résultante. Cette superposition n'altère en rien la propagation de chacune des ondes initiales.

**Exemple** : addition de deux ondes sinusoïdales de même longueur d'onde et de même amplitude se propageant dans le même sens sur une corde tendue.

Nous envoyons donc sur la corde une première onde  $y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$  et une deuxième, décalée de la première :  $y_2(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi)$ . [Ces deux ondes ont les mêmes amplitudes, les mêmes pulsation  $\omega$ , les même nombre d'onde  $k$ ; elles se propagent toutes les deux dans la direction des  $x$  positifs, elles diffèrent seulement de la phase  $\varphi$  constante : l'onde 2 est en retard sur l'onde 1 de  $\varphi$ .]

Par le **principe de superposition**, l'onde résultante est :

$$y_r(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

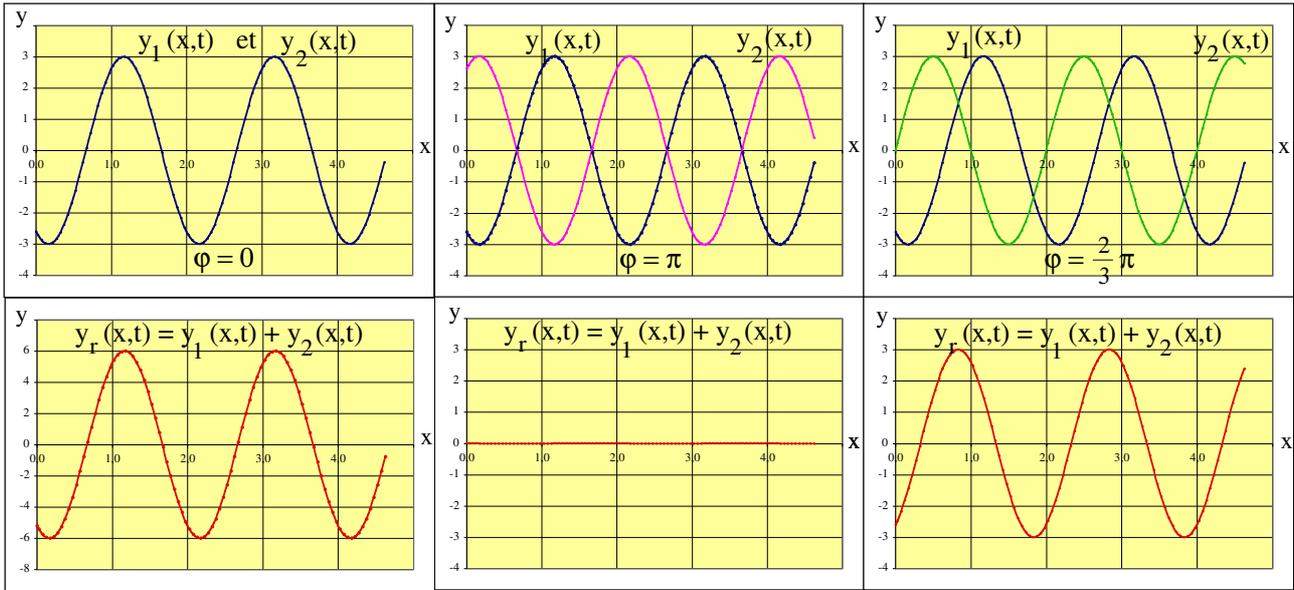
En utilisant les formules d'addition des sinus

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ , il vient :

$$y_r(x, t) = [2 y_m \cos \frac{1}{2}\varphi] \sin(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2})$$

**Conclusion** : La superposition de deux ondes de même amplitude, de même fréquence et de même longueur d'onde se propageant dans le même direction donne une onde résultante de mêmes fréquence et longueur d'onde se propageant sur le même support (notre corde) dans la même direction.

# Addition des ondes

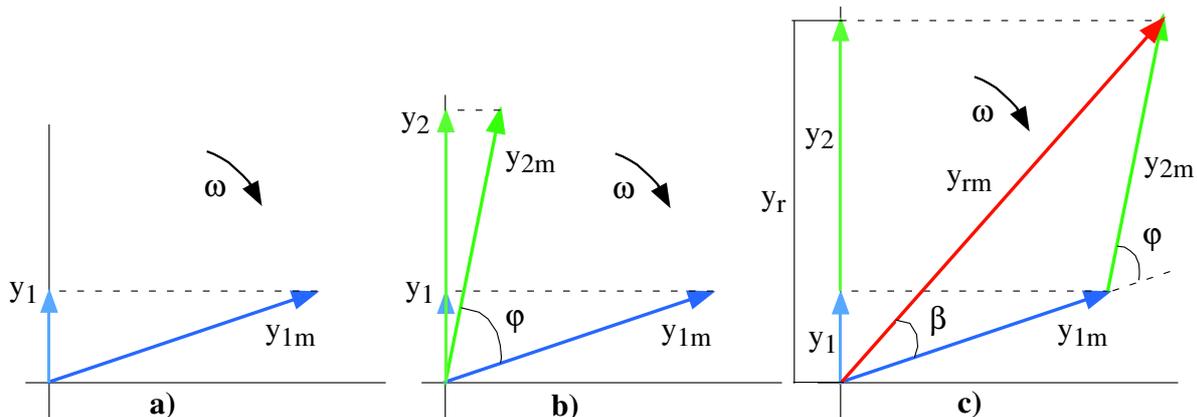


Attention! les valeurs sur l'axe vertical sont différentes d'un graphe à l'autre.

L'amplitude de l'onde résultante est égale à  $y_{r,m} = 2 y_m \cos \frac{1}{2}\varphi$ . Selon la valeur de la phase  $\varphi$ , les deux ondes qui interfèrent peuvent donner une interférence entièrement destructive ( $\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ ) ou entièrement constructive ( $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ ). Toutes les situations intermédiaires sont permises.

## Représentation de Fresnel

On peut représenter une onde sinusoïdale par un **vecteur** dont le module est égal à l'amplitude maximale de l'onde, et qui **tourne** autour de l'origine à la vitesse angulaire  $\omega$ , pulsation de l'onde. Sur la figure **a)** ci-dessous, l'onde  $y_1 = y_{1m} \sin(kx - \omega t)$  est représentée. Quand le vecteur  $\vec{y}_{1m}$  tourne



## Addition des ondes

à la vitesse angulaire  $\omega$  autour de l'origine, sa projection sur l'axe vertical varie de manière sinusoïdale entre  $\pm y_{1m}$  : cette projection correspond au déplacement d'un point de la corde dans notre exemple précédent. Si nous envoyons sur la corde une deuxième onde de **mêmes fréquence et longueur d'onde** mais en retard de  $\varphi$  par rapport à l'onde  $y_1$ , cette deuxième onde sera représentée par le vecteur  $\vec{y}_{2m}$  de la figure **b**).

En géométrie, la somme des projections de 2 vecteurs est égale à la projection de la somme de ces 2 vecteurs, nous construisons le vecteur résultant (figure **c**)  $\vec{y}_{rm} = \vec{y}_{1m} + \vec{y}_{2m}$  dont la projection  $y_r(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$  correspond au déplacement résultant de la superposition des 2 ondes  $y_1(x, t)$  et  $y_2(x, t)$ . L'amplitude maximale de l'onde résultante est évidemment le module du vecteur  $\vec{y}_{rm}$ . La phase entre l'onde résultante et l'onde  $y_1(x, t)$  est l'angle  $\beta$  dessiné sur la figure. [ Dans notre cas de l'interférence de 2 ondes de même amplitude mais déphasé de  $\varphi$ ,  $\beta = \varphi / 2$ .]

Remarque : Dans l'utilisation de la représentation de Fresnel, nous ne sommes pas limités au cas particulier de l'égalité des amplitudes maximales des deux ondes qui se superposent : les amplitudes peuvent être différentes, nous n'avons qu'à faire l'addition vectorielle des 2 vecteurs de Fresnel.

### Ondes stationnaires

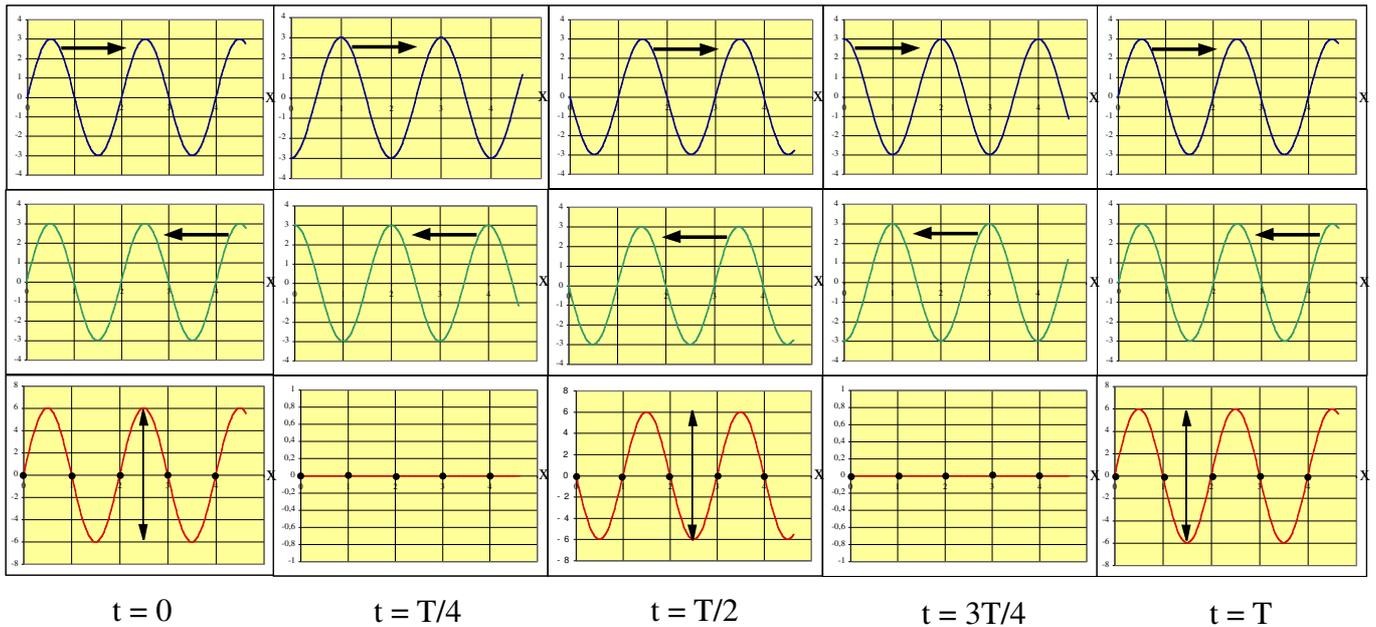
Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié l'interférence (la superposition) de deux ondes se propageant dans la même direction et dans le même sens. Nous étudions ici la superposition de 2 ondes se propageant en sens inverse l'une de l'autre et ayant les mêmes amplitudes, fréquences et longueur d'onde :  $y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$  (onde progressive) et  $y_2(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t)$  (onde rétrograde). Par le principe de superposition, nous avons :

$$y_r(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t)$$

En utilisant la formule d'addition des sinus vue 2 page avant, nous avons :

$$y_r(x, t) = [2 y_m \sin kx] \cos \omega t$$

## Addition des ondes



La figure donne le résultat de cette superposition dans le graphe du bas. Le résultat n'est pas une onde qui se propage, puisque  $y_r(x, t) = [2y_m \sin kx] \cos \omega t$  n'a pas la forme  $f(x - vt)$  qui lui permettrait de satisfaire à l'équation d'onde : l'onde est **stationnaire**.

Le terme  $2y_m \sin kx$  peut être considérée comme l'amplitude de l'oscillation d'un élément de la corde situé à la position  $x$ . Pour une onde qui se propage, la déformation maximale d'un point de la corde est la même pour tous les points de la corde ; ce n'est pas le cas ici, l'amplitude maximale d'oscillation d'un point dépend de la position de ce point. Les points où la déformation est toujours nulle sont tels que

$$\sin kx = 0 \Rightarrow kx = n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow x = n \frac{\lambda}{2} \quad n \text{ entier}$$

Ce sont les positions des **noeuds** d'une onde stationnaire. On remarque que deux noeuds adjacents sont séparés de  $\lambda/2$ , une demi-longueur d'onde (se reporter à la figure).

Les points où l'amplitude de la déformation résultante peut atteindre l'am-

## Addition des ondes

plitude maximale  $2y_m$  sont ceux pour lesquels

$$\sin kx = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad kx = \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow \quad x = \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ce sont les position des **ventres** d'une onde stationnaire; ils sont aussi séparés de  $\lambda/2$ , une demi-longueur d'onde.

**Point de contrôle** Deux ondes de mêmes amplitude et longueur d'onde interfèrent dans 3 situations différentes pour produire les ondes résultantes suivantes :

a)  $y_r = 4 \sin(5x - 4t)$

b)  $y_r = 4 \sin(5x) \cos(4t)$

c)  $y_r = 4 \sin(5x - 4t)$

Dans quelle situation les deux ondes se déplaçaient-elles vers les  $x$  positifs, vers les  $x$  négatifs, en sens opposés ?

### Onde stationnaire et résonance

Nous obtenons des ondes stationnaires en superposant une onde progressive et une onde rétrograde. Cette onde rétrograde est obtenue par les conditions que la physique impose aux extrémités du support matériel.

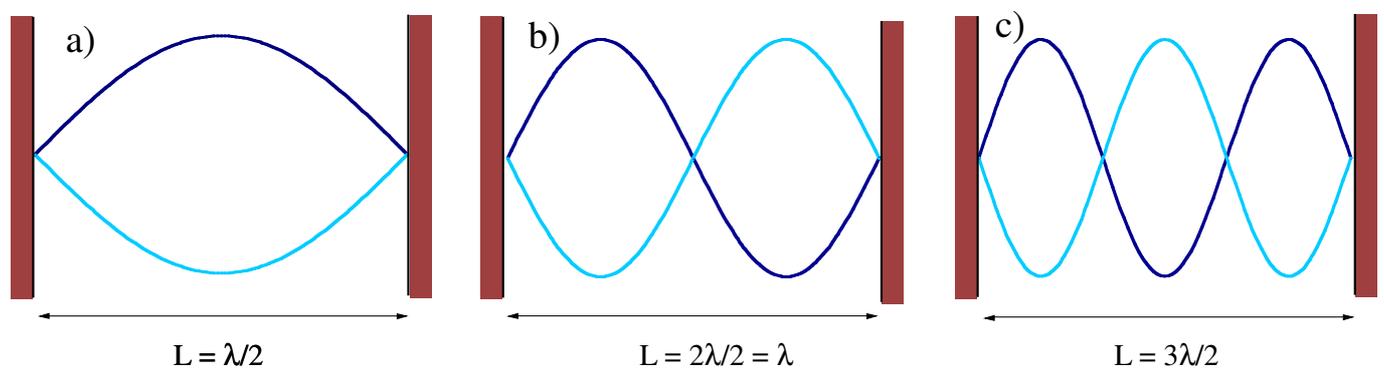
Exemples :

1. Une corde de guitare, de violon ou de piano est fixée à ses extrémités : lorsque la corde vibre, les points aux extrémités sont immobiles.
2. Dans le tuyau d'une orgue dont une extrémité est fermée et l'autre ouverte, nous avons un ventre de vibration à l'extrémité ouverte et un noeud de vibration à l'extrémité fermée.

Pour une corde, l'onde rétrograde peut être obtenue par une réflexion sur l'extrémité. Nous allons examiner ici le cas l'une corde fixée à ses extrémités, comme c'est le cas dans les instruments à musique. Lorsque nous envoyons d'une manière continue une onde sinusoïdale sur la corde, cette dernière

## Addition des ondes

se réfléchit à l'extrémité et revient ; en effet, la condition à l'extrémité fixe est que le déplacement  $y$  est nul : onde progressive et rétrograde de même fréquence, de même longueur d'onde doivent s'additionner et y donner une résultante nulle. L'onde rétrograde ainsi créée se superpose à l'onde progressive qui arrive, puis à la seconde extrémité revient dans un sens progressif pour se superposer à l'onde qui vient de se réfléchir sur la première extrémité, et ainsi de suite. Nous avons ainsi la formation d'une **onde stationnaire**. Pour certaines **fréquences**, une résonance s'établit. Voyons en les conditions.



La figure ci-dessus donne l'enveloppe de la figure que fait la corde de longueur  $L$  pincée à ses deux extrémités et siège d'ondes stationnaires. Nous avons les conditions suivantes, dans ce cas de la corde fixée aux extrémités :

$$L = \frac{1}{2} \lambda \quad L = \frac{2}{2} \lambda \quad L = \frac{3}{2} \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Comme la fréquence d'une onde est liée à sa vitesse dans le milieu et à sa longueur d'onde, nous avons la sélection suivante :

$$f = \frac{v}{\lambda} = n \frac{v}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

la fréquence la plus basse dans le cas de la corde pincée à ses deux extrémités est de  $f = v/2L$ , ( $n = 1$ ) : c'est la fréquence fondamentale ; l'onde stationnaire correspondante est dessinée sur la figure **a)** ci-dessus. La deuxième harmonique correspond à la fréquence  $f = 2v/2L$ , ( $n = 2$ ), la troisième harmonique à la fréquence  $f = 3v/2L$ , ( $n = 3$ ), etc...

# Physique Générale

## Phénomènes ondulatoires

### Ondes acoustiques

TRAN Minh Tâm

## Table des matières

<b>Les ondes acoustiques</b>	<b>310</b>
Introduction . . . . .	310
La vitesse du son . . . . .	311
Onde de déplacement, onde de pression . . . . .	313
La perception des ondes sonores . . . . .	316
Les battements . . . . .	323
L'effet Doppler . . . . .	325

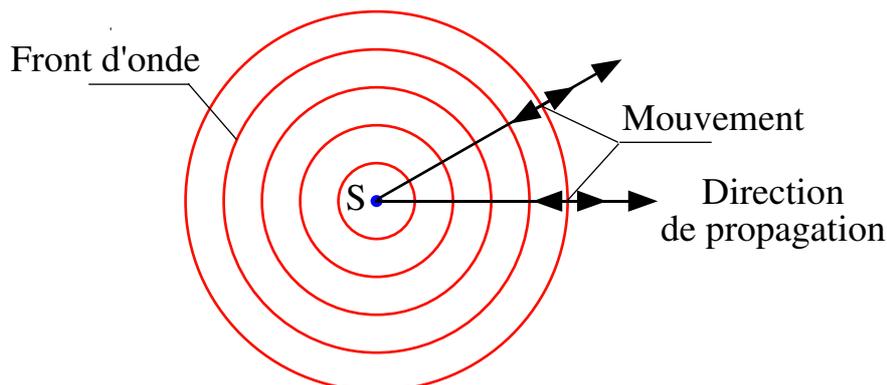
## Introduction

Nous avons commencé, à la fin du chapitre précédent, de parler d'onde acoustiques en travaillant sur les résonances qui se mettent en place pour une corde pincée à ses deux extrémités : c'est ce qui se passe dans les instruments (de musique) à corde, cette dernière en vibrant fait résonner une caisse de résonance, laquelle nous envoie des ondes acoustiques. La particularité des ondes acoustiques est qu'elles sont longitudinales : la déformation est parallèle à la direction de propagation de l'onde.

Exemples : voici quelques exemples d'utilisation des ondes acoustiques.

- Dans la prospection pétrolière, on emploie des ondes sismiques pour sonder la croûte terrestre.
- L'échographie, maintenant largement répandue, utilise des ultrasons dont la fréquence se situe entre 5 et 7,5 MHz en obstétrique et pour obtenir des images : la résolution est de l'ordre du millimètre.
- Les sonars utilisés dans les bateaux de surface ou dans les sous-marins utilisent également des ultra-sons de fréquence autour de 200 kHz pour les eaux de surface et de 50 kHz pour les eaux profondes.
- Les chauve-souris utilisent des ultra-sons d'une fréquence d'environ 83 kHz pour éviter des obstacles et pour rechercher leurs proies (nous y reviendrons).

Sur la figure ci-après, nous avons représenté une source d'ondes sonores pratiquement ponctuelle émettant dans toutes les directions.



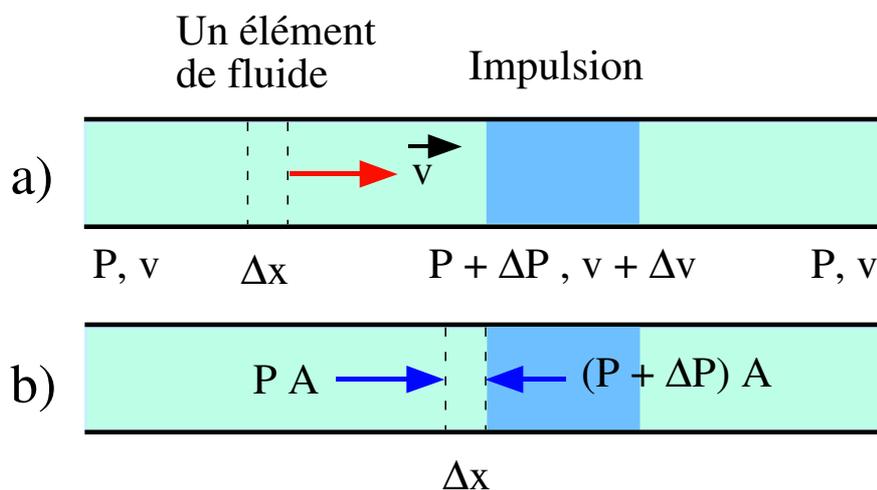
Les **fronts d'ondes** sont les surfaces (ici des sphères) sur lesquelles l'état de vibration est la même à l'instant considéré. La direction de propagation de l'onde transversale est évidemment normale à ces fronts d'onde. Des fronts d'onde parfaitement sphériques autour d'une source émettant

## Les ondes acoustiques

dans toutes les directions peuvent être observés si, autour de la source, le milieu est parfaitement isotrope. Autour de la source, les fronts d'onde sont ainsi sphériques, mais lorsqu'on est éloigné de la source, on peut faire l'approximation que les fronts sont plans, leur rayon de courbure devenant grand.

### La vitesse du son

Nous avons vu, pour une corde, que la vitesse de propagation de l'onde était  $v^2 = \frac{\tau}{\mu}$ , c.à.d. le rapport d'une propriété liée à l'élasticité (ici, la tension) à une propriété liée à l'inertie (ici, la masse linéaire) du milieu. Nous allons rechercher une expression équivalente pour les ondes acoustiques.



Une impulsion de compression (en foncé) se déplace dans le tube de section  $A$  vers la gauche à la vitesse  $v$  dans le référentiel du laboratoire (se reporter au texte).

Plaçons nous dans un référentiel qui suit l'impulsion : ce dernier semble alors immobile et l'air, dans notre référentiel, a une vitesse  $\vec{v}$  dirigé vers la droite. Appelons  $P$  la pression de l'air en dehors de l'impulsion et  $P + \Delta P$  celle de l'impulsion,  $\Delta P > 0$ . Un élément de fluide, d'épaisseur  $\Delta x$  et de section  $S$ , situé en dehors de l'impulsion se déplace donc vers cette dernière à la vitesse  $\vec{v}$ . Lorsque cet élément de fluide arrive sur l'impulsion, qui est

## Les ondes acoustiques

en surpression, il sera ralenti. Ce ralentissement durera tant que l'élément  $\Delta x$  n'est pas entièrement dans l'impulsion, c.à.d. pendant  $\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$ .

La force nette s'exerçant sur l'élément de fluide est (figure b)) :

$$F = -\Delta P A \quad (\text{dirigé vers la gauche}).$$

La masse de l'élément de fluide est  $\Delta m = \rho A \Delta x = \rho A v \Delta t$ .

L'accélération moyenne de l'élément de fluide est  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ .

Nous sommes maintenant à même d'écrire l'équation de Newton :

$$\underbrace{-\Delta P A}_{\text{force}} = \underbrace{(\rho A v \Delta t)}_{\text{masse}} \cdot \underbrace{\frac{\Delta v}{\Delta t}}_{\text{accélération}} \quad \Rightarrow \quad \rho v^2 = -\frac{\Delta P}{\Delta v / v}$$

L'élément de fluide a initialement un volume  $V (= A v \Delta t)$ ; en entrant dans l'impulsion, il est comprimé de  $\Delta V (= A \Delta v \Delta t)$ . Donc :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{A \Delta v \Delta t}{A v \Delta t} = \frac{\Delta v}{v}$$

$$\text{Par conséquent : } \rho v^2 = -\frac{\Delta P}{\Delta v / v} = -\frac{\Delta P}{\Delta V / V} = \frac{1}{\kappa}.$$

$\kappa = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)$  est le coefficient de compressibilité du fluide.

[ Pour un gaz parfait et une compression isotherme :  $V = N \frac{kT}{P} \Rightarrow \kappa = \frac{1}{P}$  .]

Nous avons donc :

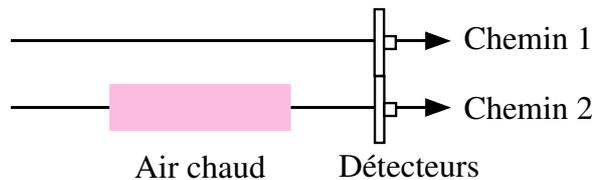
$$\boxed{v = \sqrt{\frac{1}{\rho \kappa}}}.$$

# Les ondes acoustiques

Milieu	Vitesse du son [m/s]	Milieu	Vitesse du son [m/s]
Air (0°C)	331	Air (20°C)	343
Hélium	965	Hydrogène	1284
Eau (0°C)	1402	Eau (20°C)	1482
Acier	5941	Granite	6000

$v = \sqrt{\frac{1}{\rho \kappa}}$  : nous avons ici encore la racine carré d'un rapport entre une propriété liée à l'élasticité, ici l'inverse du coefficient de compressibilité  $\kappa$  et d'une propriété liée à l'inertie (la masse spécifique  $\rho$ ). .

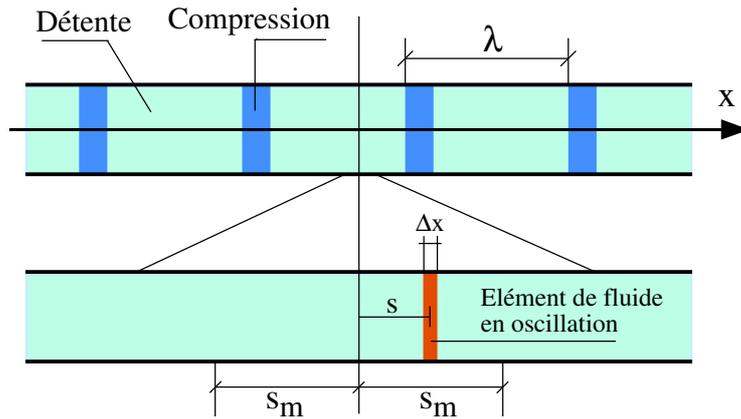
**Point de contrôle** Deux impulsions sonores identiques sont émises simultanément. L'une emprunte le chemin 1 et l'autre, le chemin 2 dessinés ci-après. Laquelle des deux impulsions arrivera en premier à l'endroit des détecteurs ?



## Onde de déplacement, onde de pression

Considérons toujours notre onde acoustique se propageant dans un tuyau. La génération d'une telle onde peut être faite par le mouvement entre tenu de la membrane d'un haut-parleur ou de celui d'un piston. Un avancement de la membrane déplace une couche d'air proche d'elle et la comprime. Un retrait de la membrane permet à la couche d'air de retourner à sa position initiale et à la pression de baisser. Comme chaque couche d'air pousse son voisin, de proche en proche, le déplacement des couches d'air et les changements de pression se propagent tout le long du tube. Contrairement au cas de la corde vibrante, le déplacement et les changements de pression se font ici parallèlement à la direction de propagation de l'onde : cette dernière est **longitudinale**.

## Les ondes acoustiques



Nous avons donc une onde de déplacement des couches de matière et une onde de pression. Pour éviter les confusions, nous dénotons par  $s(x, t)$  l'onde de déplacement et, pour une onde harmonique, l'écrivons comme :  $s(x, t) = s_m \cos(kx - \omega t)$  [C'est pour des raisons de pure commodité didactique que nous avons choisi de décrire  $s(x, t)$  par la fonction cosinus, une écriture en sinus n'aurait en rien changé le résultat, si ce n'est par le rajout d'une phase constante qui aurait alourdi les expressions.]

De la définition du coefficient de compressibilité (p. précédente), nous tirons :

$$\Delta P = -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

Le volume  $V$  est ici celle de la petite cellule de fluide en oscillation dessinée sur la figure  $V = A \cdot \Delta x$ . La variation  $\Delta V$  de ce volume est due au fait que les déplacements de ses faces ne sont pas les mêmes ; ces faces n'étant pas à la même abscisse  $x$ , elles ont une différence de déplacement de  $\Delta s$  ; donc  $\Delta V = A \cdot \Delta s$ . Par conséquent :

$$\Delta P = -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta x} = -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{\kappa} k s_m \sin(kx - \omega t)$$

L'amplitude maximale de la variation de pression est de  $\Delta P_m = k s_m / \kappa$ .

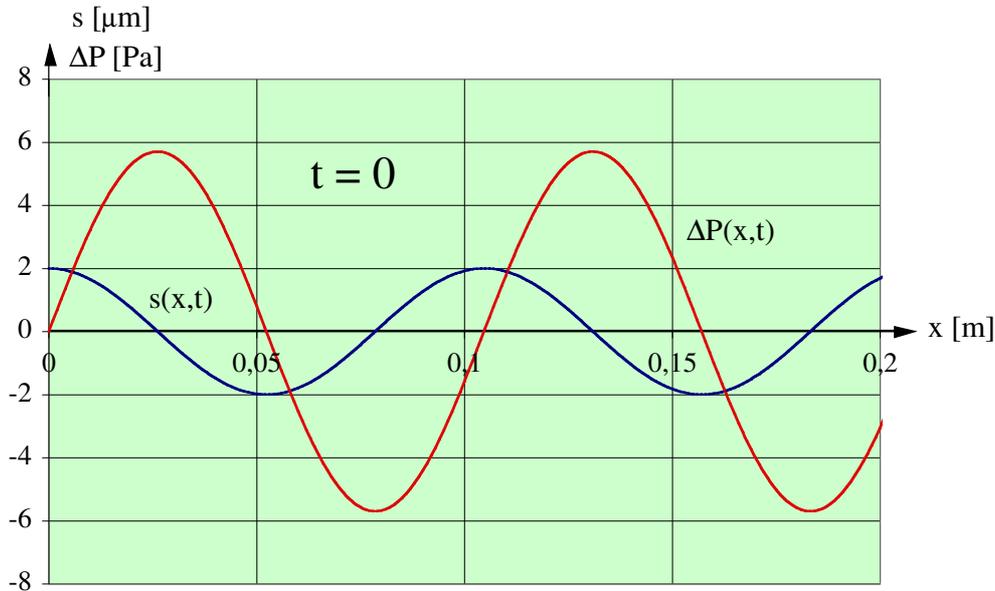
La vitesse de l'onde acoustique dans le milieu étant  $v = \sqrt{\frac{1}{\kappa \rho}}$ , nous avons

$$\Delta P_m = \frac{1}{\kappa} k s_m = (v^2 \rho) k s_m \underbrace{=}_{k = \omega / v} (v \rho \omega) s_m$$

## Les ondes acoustiques

**Résumé** Si l'onde de déplacement est  $s(x, t) = s_m \cos(kx - \omega t)$  ,  
 l'onde de pression est :  $\Delta P(x, t) = \Delta P_m \sin(kx - \omega t)$   
 avec  $\Delta P_m = (v \rho \omega) s_m$  .

Les deux ondes sont déphasées de  $\pi / 2$  (ou  $90^\circ$ ).



Onde de déplacement  $s(x, t)$  et onde de pression  $\Delta P(x, t)$ .

**Ordres de grandeur** Le maximum de surpression (ou de dépression)  $\Delta P_m$  que l'oreille humaine peut supporter est de 28 Pa (seuil de douleur), ce qui est très faible par rapport à la pression atmosphérique ( $1 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$ ). Pour une onde acoustique d'une fréquence de 1000 Hz se propageant à une vitesse de 343 m/s dans l'air dont la masse volumique est de  $1,21 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , le déplacement maximum des couches d'air est de :

$$s_m = \frac{\Delta P_m}{v \rho \omega} = \frac{28}{343 \cdot 1,21 \cdot 2\pi \cdot 1000} = 1,1 \times 10^{-5} \text{ m} = 11 \mu\text{m}$$

La surpression qui correspond au seuil de perception est de  $2,8 \times 10^{-5} \text{ Pa}$ . En refaisant le même calcul, on obtient un déplacement maximum de  $s_m = 1,1 \times 10^{-11} \text{ m} = 11 \text{ pm}$ . C'est extrêmement faible, environ un dixième du rayon d'un atome!

## La perception des ondes sonores

### L'intensité sonore

L'intensité d'une onde sonore est définie comme la puissance de l'onde reçue  $P$  rapportée à la surface  $A$  qui l'intercepte  $I = \frac{P}{A}$ . Comme l'énergie de l'onde doit être conservée alors que l'onde se développe, l'intensité perçue diminue comme le carré de la distance à la source.

Si  $P_s$  est la puissance émise par la source, l'intensité de l'onde sur la surface d'une sphère de rayon  $r$  et ayant la source en son centre est de  $I = \frac{P_s}{4\pi r^2}$ . L'intensité de l'onde décroît donc comme le carré de la distance à la source. Comme pour l'onde mécanique, l'intensité sonore est proportionnelle au carré de l'amplitude maximale des vibrations ou de la surpression.

### L'échelle des décibels.

Nous avons vu au paragraphe précédent combien l'échelle de l'audition était vaste puisque la surpression maximale à laquelle l'oreille est sensible varie de  $2,8 \times 10^{-5}$  Pa (seuil de perception) à 28 Pa (seuil de douleur) : il y a donc un facteur  $10^6$  entre la surpression la plus basse et la surpression la plus élevée, par conséquent, un facteur  $10^{12}$  entre les intensités sonores au seuil de perception et au seuil de douleur [nous ne démontrerons pas le fait que l'intensité de l'onde est proportionnel au carré de son amplitude, mais cela semble évident, si nous considérons l'énergie transportée par une onde élastique]. Lorsque nous percevons un son, la sensation qui en résulte est reliée à l'intensité sonore captée par la loi de Fechner-Weber : le **niveau d'intensité sonore**  $N$  est défini par

$$N = (10 \text{ db}) \log_{10} \frac{I}{I_{\text{seuil}}}$$

Ici db est l'abréviation de **décibel**, l'unité de l'intensité sonore (d'après Alexander G. Bell). L'intensité au seuil de perception est de  $10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

# Les ondes acoustiques

[La loi de Frechner-Weber souffre bien entendu du fait que l'on doit comparer des sensations, forcément subjectives. Il n'en reste pas moins qu'elle traduit la tendance vérifiable que la sensation varie beaucoup moins rapidement de le stimulus : une échelle couvrant 12 ordres de grandeur n'est donc pas raisonnable, préférons plutôt une échelle logarithmique !]

## Les instruments de musique

Ils peuvent être à corde (piano, violon, guitare, etc...), à membrane (tambours, tambourins, etc...), à vent (orgue, trompette, flûte, etc...) à pièces de métal ou de bois (xylophone, cloches, etc...). Tous cependant utilisent le fait de produire des **ondes stationnaires** qui, nous l'avons vu, ont la propriété de sélectionner par résonance des fréquences particulières de vibration.

Nous avons examiné le cas particulier de la corde pincée à ses deux extrémités. Lorsque la corde est en résonance, les vibrations se transmettent à la caisse de résonance qui, en vibrant à son tour, transmet des ondes progressives longitudinales dans l'atmosphère.

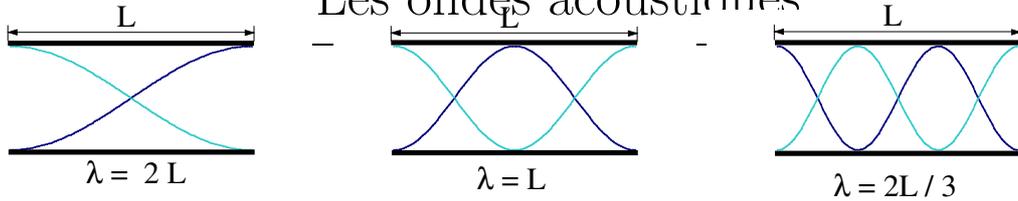
Pour les instruments à vent, deux cas de résonance peuvent se rencontrer.

– L'instrument est ouvert aux deux extrémités (exemple : le "K'long Put" des minorités au Viêt Nam). Dans ce cas, il n'y a pas de limitation au déplacement des éléments de fluide aux extrémités : nous y aurons de ventres de déplacement ; ce sont ces ventres de déplacement de l'onde stationnaire qui mettent en mouvement le fluide à l'extérieur, donnant lieu à un son se propageant jusqu'à nous. Les conditions de résonance sont données par

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \Rightarrow \quad f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

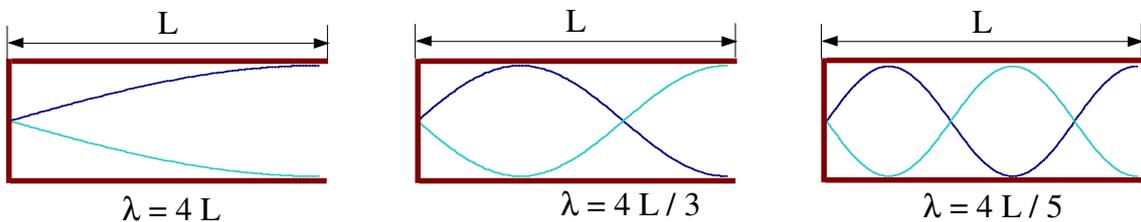
– L'instrument n'a qu'une ouverture (clarinette, didgeridoo des Aborigènes d'Australie, ...). Nous aurons un noeud de déplacement à l'extrémité fermée qui peut être l'emplacement de l'anche ou la bouche du musicien

## Les ondes acoustiques



et un ventre de déplacement à l'extrémité ouverte. Comme pour le cas précédent, ce sont les vibrations des couches de fluide à l'extrémité ouverte qui font vibrer à leur tour le fluide à l'extérieur de l'instrument, donnant lieu à une onde sonore qui nous parvient. Ici :

$$\lambda = \frac{4L}{n} \quad n = 1, 3, \dots \quad \Rightarrow \quad f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{4L} \quad n = 1, 3, \dots$$



Rappel : Nous avons pour la résonance d'une corde pincée aux deux extrémités :

$$f = n \frac{v}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Nous pouvons donc dire que la longueur d'un instrument de musique reflète la gamme de fréquences qu'il peut jouer, une longueur plus courte résultant en des fréquences plus élevées.

**Point de contrôle** Un tuyau sonore A, de longueur  $L$ , et un tuyau B, de longueur  $2L$ , ont tous les deux leurs extrémités ouvertes. Quelle est l'harmonique émise par B qui a la même fréquence que la fondamentale de A ?

**Point de contrôle** Dans la série suivante de fréquences, une fréquence (inférieure à 400 Hz) manque : 150, 225, 300, 375 Hz. Quelle est-elle ?

## Les caractéristiques d'un son

On a l'habitude de classer les phénomènes auditifs en 3 catégories données dans le tableau suivant.

## Les ondes acoustiques

Cause physique	Sensation	Exemple
Onde quelconque non périodique	<b>bruit</b>	Chute, tonnerre, choc, etc...
Onde périodique	<b>son</b>	Vocalise humaine, Instrument de musique, etc...
Onde sinusoïdale	<b>son pur</b>	Diapason

Nous avons vu précédemment que les sons qui nous parviennent sont produits par les ondes stationnaires apparaissant dans l'instrument. Le son émis par un instrument est ainsi une somme d'ondes sinusoïdales dont les fréquences sont celles sélectionnées par la résonance (voir ci-dessus) et dont les importances relatives sont caractéristiques de l'instrument. En effet, un son produit par un instrument est la somme des oscillations correspondantes à la fréquence fondamentale et de une ou plusieurs harmoniques supérieures. L'auditeur perçoit ainsi la somme algébrique de ces différents sons purs.

Ainsi, lorsque plusieurs instruments jouent une note déterminée, nous arrivons à distinguer ces instruments par leur **timbre**. Le timbre est caractérisée par la distribution des amplitudes des harmoniques délivrées par l'instrument.

La **hauteur** d'un son pur est caractérisée par sa fréquence.

### **Décomposition en série de Fourier** (donné sans démonstration)

Nous avons vu qu'un son pur est produit par une onde sinusoïdale, un son par une onde périodique et un bruit par une onde non périodique. Pour mettre en relation le son et le son pur, une onde périodique et une onde sinusoïdale, il existe une transformation mathématique permettant

## Les ondes acoustiques

de passer des fonctions périodiques à une somme de fonctions sinusoidales (nous traitons maintenant de **fonctions**, puisque nous nous intéressons uniquement à l'aspect temporel de l'onde; en effet, dans la perception auditive, on ne tient pas compte de la variable d'espace de l'onde, mais uniquement de la variation avec le temps. ) : c'est la décomposition en série de Fourier.

Considérons une fonction périodique  $f(t)$  d'une période de  $T = 2\pi$  (On peut toujours se ramener à cette période par un changement de variable) , nous pouvons écrire la fonction  $f(t)$  comme une série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt \quad (\text{F})$$

Les coefficient  $a_0, a_n, b_n$  sont les coefficients de Fourier qu'il faut déterminer pour la fonction  $f(t)$  étudiée.

Le calcul pour les trouver utilise le fait que les fonctions  $\sin mt$  et  $\cos nt$  ( $m$  et  $n$  entiers) sont "orthogonales" dans l'intervalle  $[0 - 2\pi]$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin mt \cdot \sin nt dt &= 0 & m \neq n \\ \int_0^{2\pi} \cos mt \cdot \cos nt dt &= 0 & m \neq n \\ \int_0^{2\pi} \sin mt \cdot \cos nt dt &= 0 & \forall m, n \\ \int_0^{2\pi} \sin^2 mt dt &= \int_0^{2\pi} \cos^2 nt dt = \pi & \forall m, n \neq 0 \end{aligned}$$

En multipliant à gauche et à droite l'équation (F) précédente par  $\sin mt$  et en intégrant, nous trouvons

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \sin mt dt$$

De même, en multipliant par (F) par  $\cos nt$  et en intégrant :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \cos nt dt \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

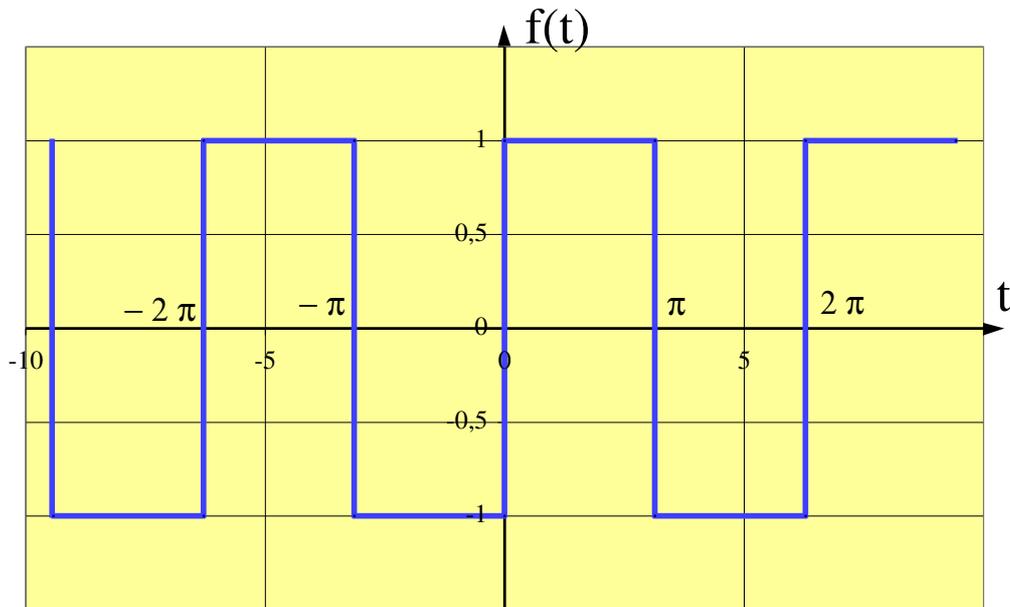
# Les ondes acoustiques

## Un exemple concret

Considérons la fonction périodique suivante :

$$f(t) = \begin{cases} \dots \\ +1 & \text{pour } -2\pi < t < -\pi \\ -1 & \text{pour } -\pi < t < 0 \\ +1 & \text{pour } 0 < t < \pi \\ -1 & \text{pour } \pi < t < 2\pi \\ \dots \end{cases}$$

C'est une fonction impaire, par conséquent, nous nous attendons à ce que

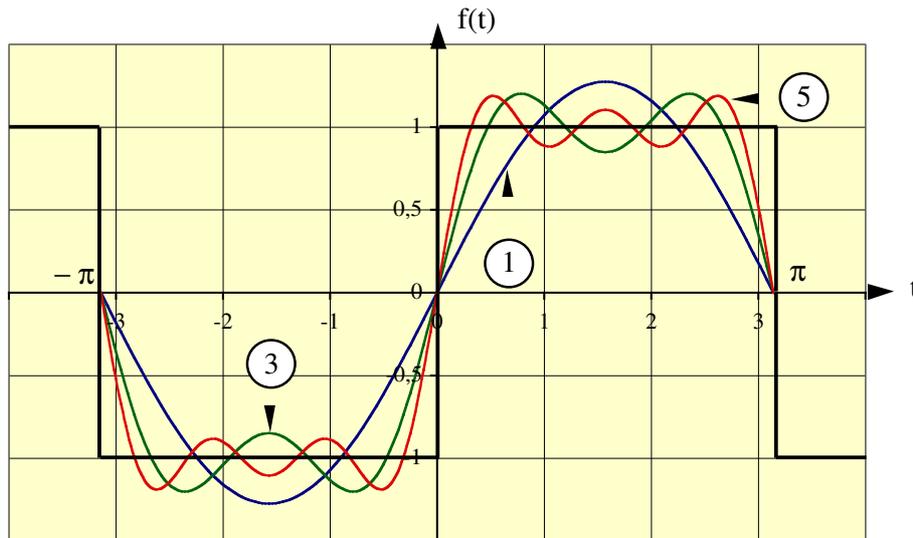


le développement ne contienne aucune fonction cosinus (le cosinus est une fonction paire) . Il ne reste plus que le développement en sinus et le résultat du calcul est :

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \frac{1}{7} \sin 7t + \dots \right]$$

Sur le dessin ci-après, nous avons dessiné la fonction  $f(t)$  avec (1) la série réduite à son premier terme, (3) la série avec les 2 premiers termes, (5) la série avec les 3 premiers termes.

## Les ondes acoustiques



$$(1) : \frac{4}{\pi} \sin t \quad (3) : \frac{4}{\pi} \left[ \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t \right] \quad (5) : \frac{4}{\pi} \left[ \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t \right]$$

Nous remarquons les points suivants pour cette fonction périodique :

1. les coefficients de la série décroissent quand nous allons vers les termes plus élevés de la série,
2. les fréquences des sinusoides de la série sont des multiples entiers de la fréquence du premier terme,
3. le premier terme a la période de la fonction  $f(t)$ ,
4. le premier terme de la série constitue déjà une bonne approximation de la fonction.

**Utilité de la décomposition de Fourier** : dans un grand nombre de cas, la réponse d'un système physique à une sollicitation harmonique est beaucoup plus simple que celle du système à une sollicitation périodique quelconque, en particulier, cette réponse peut être elle-même harmonique. Si on attend une réponse linéaire du système physique, le résultat s'obtient par l'addition des réponses partielles harmoniques. Le seul problème est alors que la série comporte un nombre infini de termes; heureusement, nous avons vu que les coefficients de la série décroissent assez rapidement.

## Les ondes acoustiques

Pour les sons, ces caractéristiques se retrouvent plus ou moins :

1. les amplitudes des harmoniques sont en générale plus faibles que celle de la fondamentale et leurs importances relatives sont données par l'instrument,
2. les fréquences des harmoniques sont des multiples entiers des la fréquence de fondamentale,
3. la période de l'onde sonore est donnée par celle du son pur à la fréquence fondamentale.

### Les battements

Si nous avons deux sources sonores de fréquences proches, par exemple  $f_1 = 440$  Hz et  $f_2 = 445$  Hz, nous ne pouvons pas distinguer ces deux sons, mais percevons à une distance fixe de ces deux sources un son dont la fréquence est de 442,5 Hz, c.à.d. la moyenne des deux fréquences ; cette fréquence est trop proche des deux fréquence  $f_1$  et  $f_2$  pour en être distinguée. Une autre particularité est que l'intensité de l'onde perçue augmente et diminue à une fréquence de 5 Hz, différence entre les fréquences des deux sources. Ce phénomène est appelé le battement.

Considérons la variation temporelle des vibrations des couches d'air en un point donné :

$$s_1 = s_m \cos \omega_1 t \quad s_2 = s_m \cos \omega_2 t$$

Nous avons, pour des raisons de simplicité pris deux ondes dont les amplitudes sont les mêmes. En utilisant les formules d'addition des cosinus

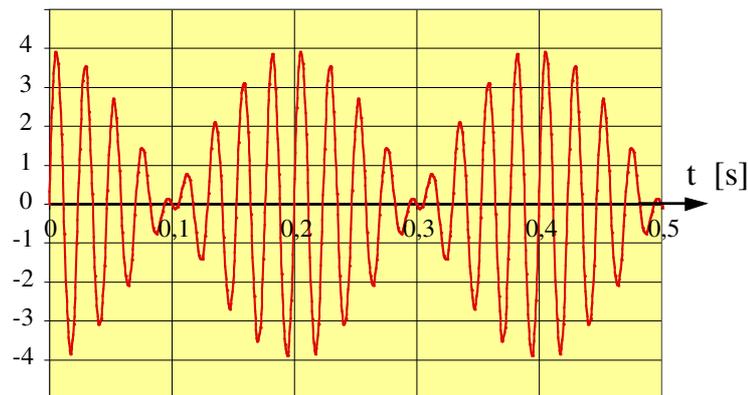
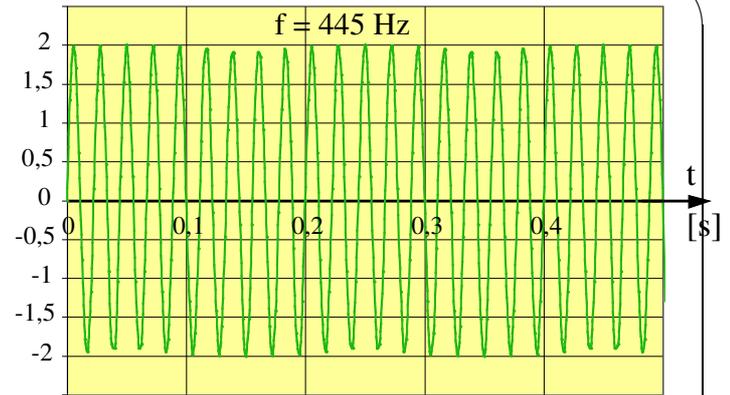
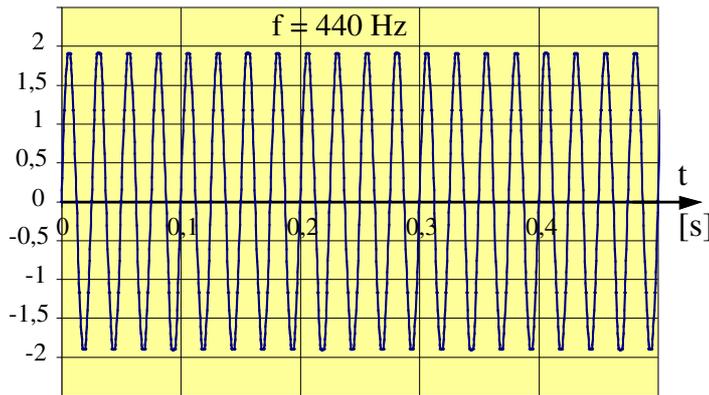
$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

nous obtenons :

$$s = s_1 + s_2 = \left[ 2 s_m \cos \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) t \right] \cos \left\{ \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) t \right\}$$

Si les fréquences  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont proches,  $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) = \omega \approx \omega_1 \approx \omega_2$ . L'onde sonore a donc une pulsation  $\omega$  et son amplitude est modulée par le terme  $\cos \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) t$ .

# Les ondes acoustiques



Onde résultante.

L'intensité maximale de l'onde résultante est atteinte quand  $\cos \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) t$  prend les valeurs  $+1$  ou  $-1$ , ce qui arrive 2 fois par période de la fonction cosinus (se reporter au dessin précédent). La pulsation des battements  $\omega_{battement}$  est donc :

$$\omega_{battement} = 2 \times \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) = \omega_2 - \omega_1$$

La fréquence des battements est ainsi de  $f_{battement} = f_2 - f_1$ .

**Point de contrôle** Vous disposez d'un diapason à 440 Hz pour accorder un instrument à corde en jouant le LA. Vous augmentez la tension de la corde et la fréquence du battement entre le son du diapason et le son de votre instrument, qui était de 6 Hz, augmente. Vous faudra-t-il continuer de tendre votre corde ou faudra-t-il la relâcher quelque peu ?

## L'effet Doppler

Nous avons tous fait l'expérience de la variation de la fréquence d'un klaxon ou d'une sirène lorsqu'une voiture s'approche ou s'éloigne de nous : cet effet est l'effet Doppler (d'après Christian Johann Doppler, physicien autrichien, 1803 - 1853). [Ce changement de fréquence lié au mouvement se retrouve également pour les ondes électromagnétiques ; on a découvert que la galaxie Andromède s'approche de nous (la voie lactée) en observant un "décalage vers le bleu" de la lumière émise par Andromède.]

Deux cas limites peuvent ainsi se présenter : soit la source est immobile et l'observateur en mouvement, soit l'observateur est immobile et la source en mouvement ; les cas intermédiaires où source et observateur sont en mouvement sont bien entendu possibles.

### La source est immobile

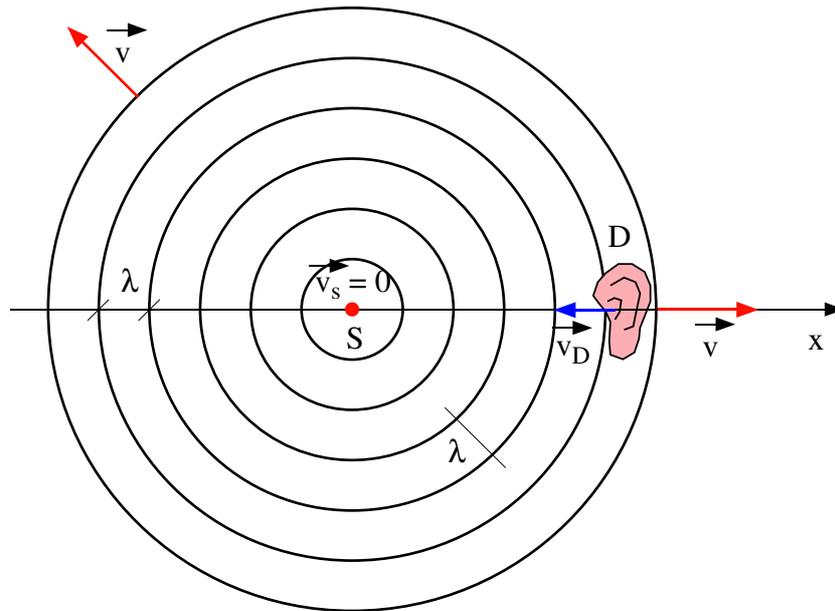
La figure ci-après montre un observateur, figuré par une oreille ou un détecteur D, en mouvement à la vitesse  $\vec{v}_D$  ; la source S est immobile. Les ondes sonores qu'elle émet se déplacent à la vitesse  $\vec{v}$ . Cette vitesse est reliée à la fréquence d'émission  $f$  par  $f = v / \lambda$ ,  $\lambda$  étant la longueur d'onde de l'onde émise.

Pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ , par rapport à D, les fronts d'onde parcourent une distance de  $(v + v_D) \Delta t$  et le nombre de fronts d'onde détectés par l'observateur D est de  $\frac{(v + v_D) \Delta t}{\lambda}$ . Le taux d'interception de ces fronts d'onde est justement la fréquence perçue par l'observateur :

$$f' = \frac{(v + v_D) \Delta t / \lambda}{\Delta t} = \frac{v + v_D}{\lambda} \underbrace{=}_{\lambda = v/f} f \frac{v + v_D}{v}$$

Nous avons fait la démonstration pour un observateur s'approchant de la source sonore (figure a)) (les vitesses s'additionnent) . Dans le cas où l'obser-

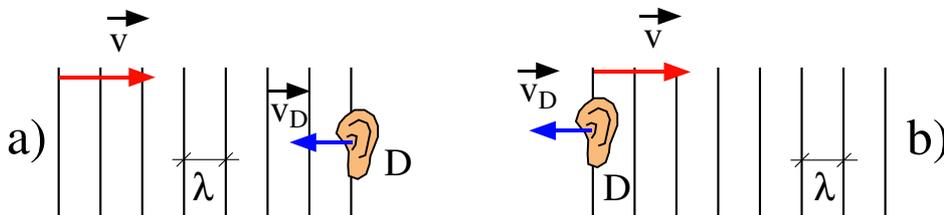
# Les ondes acoustiques



vateur s'éloigne de la source (figure b)), les vitesses se retranchent et

$$f' = f \frac{v - v_D}{v}$$

Par conséquent, en toute généralité :  $f' = f \frac{v \pm v_D}{v}$ .

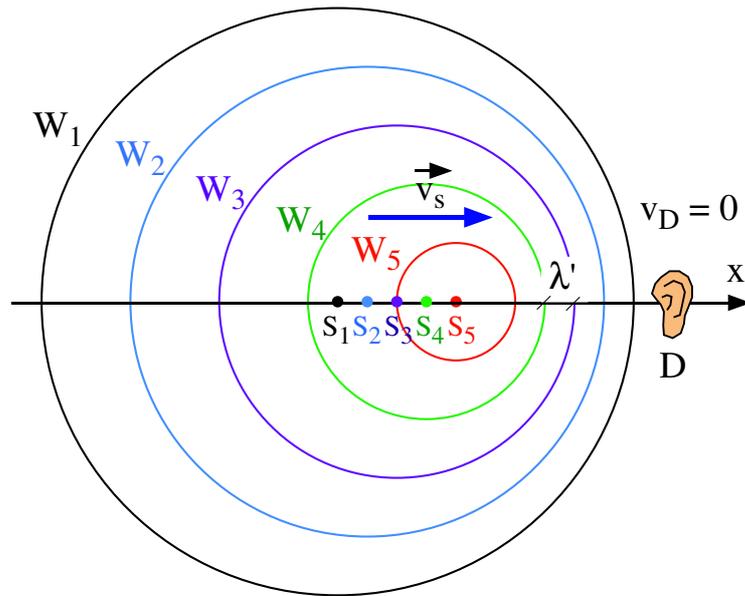


## L'observateur est immobile

Considérons maintenant des intervalles de temps  $\Delta t = T$ , une période de l'onde sonore émise par la source en mouvement à la vitesse  $\vec{v}_s$ . [Rappel : une période est le temps que met l'onde pour parcourir une distance égale à une longueur d'onde]. Pendant  $\Delta t = T$ , les fronts d'onde se sont propagés d'une distance  $vT$  alors que la source s'est déplacée de  $v_s T$ . Après une période, un nouveau front d'onde est émis, et ainsi de suite.

Dans la direction de l'observateur D, les fronts d'onde sont distants de  $vT - v_s T$  : c'est la distance entre deux états vibratoires identiques perçue

## Les ondes acoustiques



par D, c'est la "nouvelle longueur d'onde"  $\lambda'$  qui correspond à une fréquence

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{vT - v_s T} \underbrace{=}_{T=1/f} f \frac{v}{v - v_s}$$

Si nous avons mis l'observateur D dans le sens opposé au mouvement de la source, nous aurions eu une "nouvelle longueur d'onde" de  $vT + v_s T$ .

La fréquence perçue par un observateur immobile est donc

$$f' = f \frac{v}{v \pm v_s}$$

En toute généralité, si observateur D et source S se déplacent tous les deux :

$$\boxed{f' = f \frac{v \pm v_D}{v \pm v_s}} \quad \text{Effet Doppler}$$

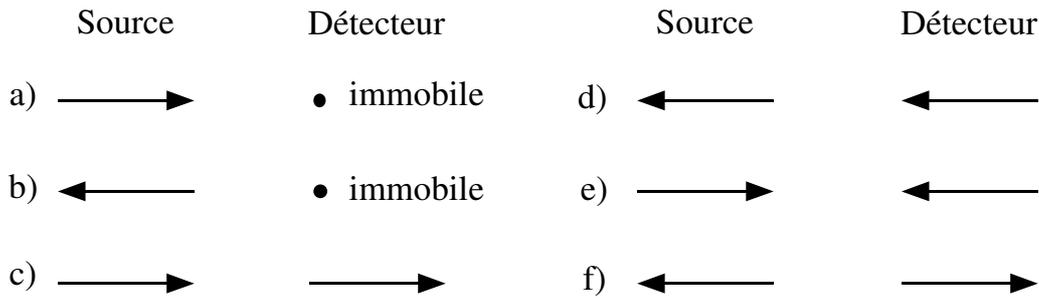
### Application : le vol de la chauve-souris

Les chauve-souris se guident et cherchent leurs proies en émettant des ondes ultra-sonores d'environ 80 kHz et en détectant les réflexions de ces ondes sur des obstacles. Leurs proies sont des papillons de nuit (entre autres) ; les mouvements de la chauve-souris et de sa proie par rapport à l'air font que la fréquence de l'onde réfléchie par le papillon, lorsqu'elle est captée en retour par la chauve-souris, diffère de celle émise de quelques kHz. La

## Les ondes acoustiques

chauve-souris traduit immédiatement cette différence en une vitesse relative entre sa proie et elle, ce qui lui permet de fondre sur elle.

**Point de contrôle** La figure ci-après montre les directions d'une source sonore et d'un détecteur pour 6 situations différentes. Pour chacun de ces cas, la fréquence détectée est-elle plus grande, plus petite que la fréquence émise par la source ou bien ne pouvez-vous rien conclure ?

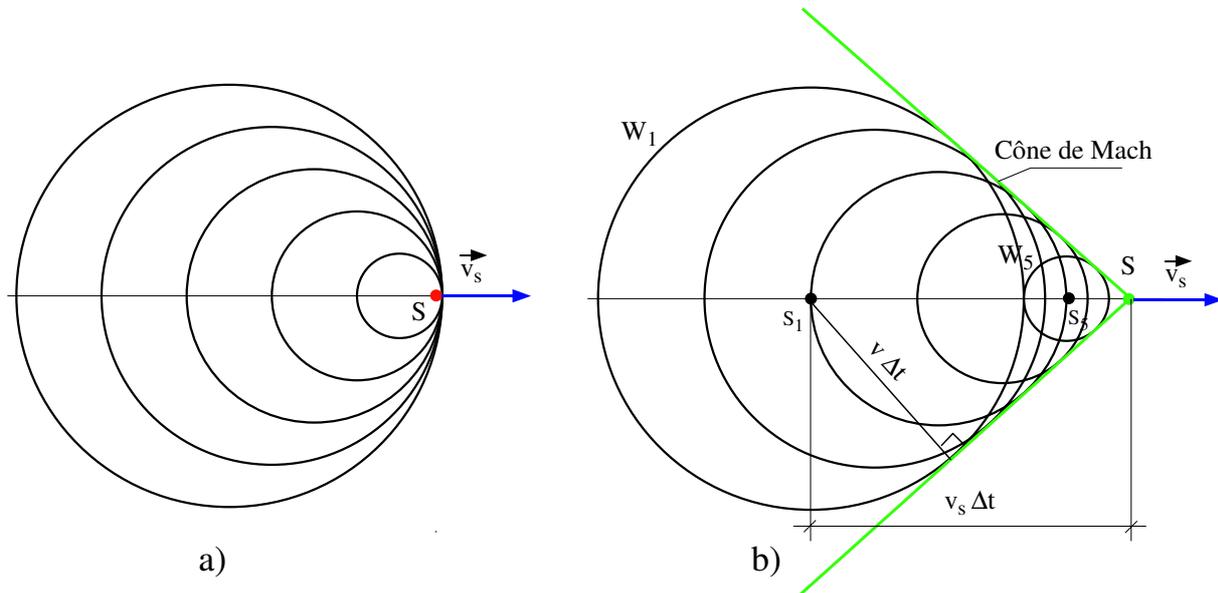


### Le vol supersonique

Dans le cas précédent d'une source sonore en mouvement et d'un observateur immobile, l'équation donnant  $f'$  n'a plus de sens si  $v_s \geq v$ .

La figure a) ci-dessous montre une source se déplaçant à une vitesse  $v_s$  égale à celle des front d'onde qu'elle génère. La figure b) montre le cas où la source se déplace plus rapidement que la vitesse du son dans le milieu. Les fronts d'onde ont une tangente commune qui est le cône de Mach. Une *onde de choc* apparaît sur ce cône puisque un saut de pression abrupt existe de part et d'autre : en effet, les fronts d'ondes de surpression s'accumulent derrière le cône et c'est cette surpression qui donne le bang supersonique.

# Les ondes acoustiques



L'onde de choc est visible parce que la brusque diminution de pression de l'air provoque un refroidissement entraînant la condensation de l'humidité.

# Physique Générale

Phénomènes ondulatoires

Ondes électromagnétiques

TRAN Minh Tâm

## Table des matières

<b>Les ondes électromagnétiques</b>	<b>326</b>
Les équations de Maxwell . . . . .	326
Une onde bien étrange . . . . .	329
Le principe de Huygens . . . . .	330
La réfraction . . . . .	331
<b>Interférence et diffraction</b>	<b>334</b>
Les fentes de Young (interférences) . . . . .	334
Diffraction par une fente . . . . .	337
Intensité lumineuse dans une diffraction . . . . .	340

Diffraction par une ouverture circulaire . . . . . 342

Lecture : les ailes du MORPHO . . . . . 344

## Les équations de Maxwell

Aux chapitres de l'électricité et du magnétisme, nous n'avons pas traité des phénomènes d'induction. Ces phénomènes relient les variations temporelles des flux des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  à des champs magnétiques et électriques. Ainsi, la variation du flux du champ  $\vec{B}$  au travers des spires d'un bobinage engendre un courant, c'est à dire un champ électrique "induit" dans ce bobinage : c'est le principe de la dynamo et des alternateurs.

Deux lois gouvernent ces phénomènes d'induction :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

Loi de Faraday - Lenz.

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{r} = + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

Loi d'Ampère - Maxwell.

Comme dans les chapitres de l'électricité et du magnétisme, le sens d'intégration donne le sens du vecteur normal à la surface sous-tendue par la courbe  $\mathcal{C}$  ; en effet, nous calculons le flux de  $\phi_E = \int \vec{E} d\vec{S}$  et  $\phi_B = \int \vec{B} d\vec{S}$  non plus à travers une surface fermée pour laquelle le sens de  $d\vec{S}$  est évidente, mais au travers d'une surface sous-tendue par la courbe  $\mathcal{C}$  et nous devons connaître la normale à cette surface !

Avec les lois de Gauss pour les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , les deux lois de Faraday-Lenz et d'Ampère-Maxwell constituent les 4 lois de Maxwell à la base de l'électromagnétisme. Nous allons montrer que les deux lois précédentes donnent lieu à des ondes électromagnétiques. Dans notre étude, les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  varient avec la position  $x$  et avec le temps  $t$ .

Utilisons la loi de Faraday-Lenz dans la situation de la figure a) ci-après : le champ  $\vec{E}$  est parallèle à l'axe  $y$  et varie selon  $x$  et en fonction du temps. Pour le contour d'intégration dessiné sur la figure, le champ  $\vec{E}$  a varié de  $d\vec{E}$  entre  $x$  et  $x + dx$  et le champ  $\vec{B}$  ne peut être que parallèle à l'axe  $z$  pour que le flux  $\phi_B$  ne soit pas identiquement nul :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = (E + dE)h - Eh = h dE \quad , \quad - \frac{d\phi_B}{dt} = - \frac{d}{dt}(B h dx) = - h dx \frac{dB}{dt}$$

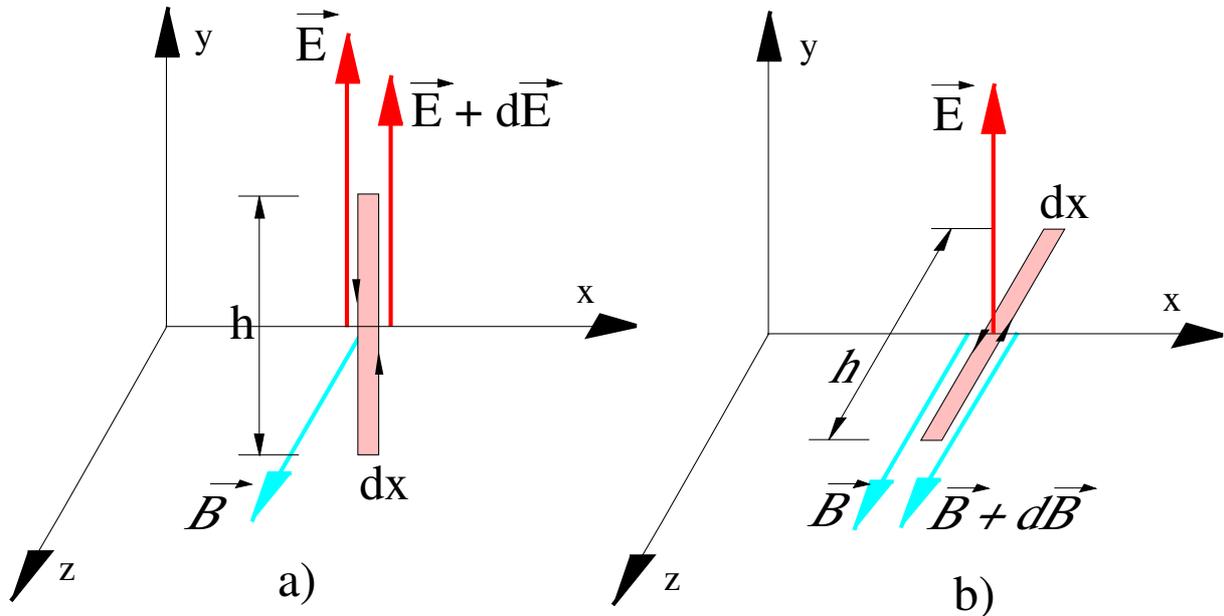
# Les ondes électromagnétiques

( $\vec{B}$  varie évidemment d'une position  $x$  à l'autre et est fonction du temps); donc :

$$h dE = -h dx \frac{dB}{dt} \Rightarrow \frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt} \quad \text{ou plutôt :}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (1)$$

puisque les champs dépendent des 2 variables  $x$  et  $t$ .



Utilisons maintenant la loi d'Ampère-Maxwell dans la situation de la figure b). Comme précédemment :

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{r} = B h - (B + dB) h = -h dB \quad , \quad \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt}(E h dx) = \mu_0 \epsilon_0 h dx \frac{dE}{dt}$$

donc :  $-h dB = \mu_0 \epsilon_0 h dx \frac{dE}{dt} \Rightarrow -\frac{dB}{dx} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{dE}{dt}$  ou plutôt :

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (2)$$

Dérivons l'équation (1) par rapport à  $x$  :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x} \stackrel{(2)}{=} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Nous obtenons pour le champ électrique une équation d'onde  $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$  :

le champ  $\vec{E}(x, t)$  se propage donc à la vitesse  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ .

# Les ondes électromagnétiques

De même, si nous dérivons l'équation (2) par rapport à  $x$  :

$$-\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial x} \stackrel{(1)}{=} -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

Nous obtenons aussi pour le champ magnétique une équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \quad \text{la vitesse de propagation du champ } \vec{B}(x, t) \text{ est aussi } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

De plus, on vérifie très facilement à partir des équations (1) et (2) que si

$\vec{E} = E_m \cdot \sin(kx - \omega t) \hat{j}$ , alors  $\vec{B}$  est une onde harmonique en phase avec  $\vec{E}$ .

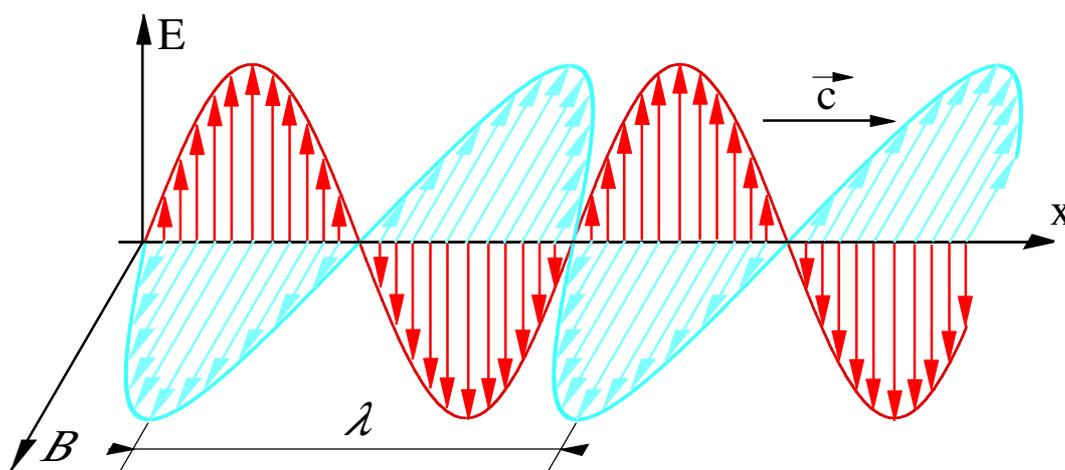
## Résumé :

1. Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  d'un champ électromagnétique sont constamment orthogonaux.
2. Si  $\vec{E} = E_m \cdot \sin(kx - \omega t) \hat{j}$ , alors  $\vec{B} = B_m \cdot \sin(kx - \omega t) \hat{k}$ , avec

$$\frac{E_m}{B_m} = c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Les deux vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont en phase.

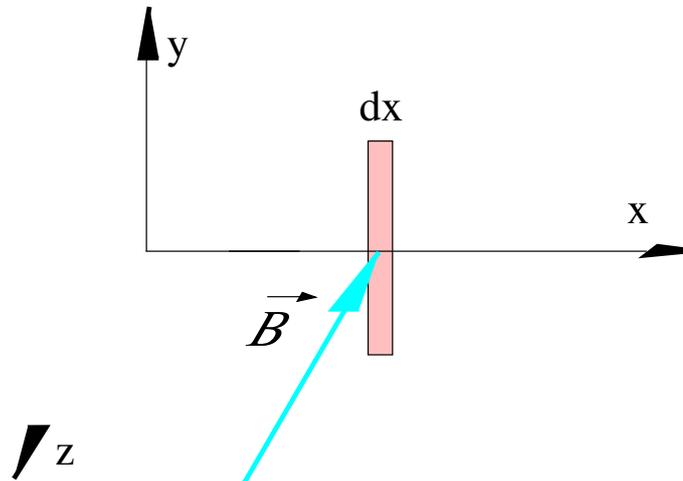
3. Les ondes sont transversales : les ondes  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  oscillent perpendiculairement à la direction de propagation.



4. L'intensité de l'onde est proportionnelle au carré de l'amplitude maximale du champ électrique (comme pour une onde sonore).

# Les ondes électromagnétiques

**Point de contrôle** Le champ magnétique  $\vec{B}$  au travers du rectangle de largeur  $dx$  d'il y a 2 pages est dessiné à nouveau pour un instant différent :  $\vec{B}$  est dans le plan  $xz$ , parallèle à l'axe  $z$  dans le sens dessiné et son module est en train d'augmenter. Dessinez le champ électrique  $\vec{E}$  induit en indiquant la direction du champ et ses valeurs relatives de part et d'autre du rectangle.



## Une onde bien étrange

Toutes les ondes dont nous avons étudié les propriétés jusqu'à présent ont besoin d'un support matériel pour leur propagation : les ondes acoustiques ont besoin de la matière dont l'élasticité leur permet de se propager, les vibrations transversales d'une corde ont évidemment besoin de cette corde, etc... Ce sont les propriétés de la matière, à savoir sa masse linéaire (ou spécifique) et son élasticité (ou sa compressibilité) qui déterminent la vitesse des ondes mécaniques et acoustiques.

L'onde électromagnétique se propage dans la matière (la lumière se propage dans le verre, dans le plexiglas,...) mais elle voyage également dans le vide. On a longtemps pensé qu'il existait un milieu que l'on a nommé *éther* qui servait de support à la propagation des ondes électromagnétiques. Si tel était le cas, la Terre baignant dans cet *éther*, on devrait trouver une différence entre la vitesse de la lumière envoyée dans le sens de rotation de la Terre et celle envoyée en sens opposé. En 1887, Michelson et Morley, dans une série d'expériences célèbres, montrèrent que, dans le vide, la lumière se propage avec la même vitesse dans toutes les directions. Ce n'est qu'en 1905 avec la Théorie de la relativité spéciale que l'on nota cette propriété particulière de la vitesse de la lumière : si vous envoyez un faisceau de lumière selon un axe et que vous demandez à plusieurs observateurs en mouvement d'en mesurer la vitesse, quelque soit le référentiel où cette vitesse est mesurée, le résultat obtenu est le même.

# Les ondes électromagnétiques

Revenons à la figure de la page précédente : nous y avons représenté un instantané des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  ; à chaque point sur l'axe  $x$ , nous avons un couple de champ  $\vec{E}$  et de champ  $\vec{B}$  oscillant en phase et constituant l'onde électromagnétique. (Les deux sinusoides relient simplement les extrémités des vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sur cet instantané.)

Considérons le champ magnétique : comme il varie sinusoidalement en fonction du temps, il induit par la loi de Faraday-Lenz un champ électrique perpendiculaire qui varie aussi sinusoidalement. Comme le champ électrique varie sinusoidalement avec le temps, il induit à son tour un champ magnétique perpendiculaire (loi d'Ampère-Maxwell) variant également sinusoidalement, et ainsi de suite. Les deux champs se créent ainsi continuellement par induction et le résultat est une onde électromagnétique se propageant à la vitesse

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s.}$$

## Origines des ondes électromagnétiques

Elles sont multiples ; la plupart des ondes électromagnétiques, la "lumière", que nous percevons proviennent des atomes et des molécules d'où elles sont émises. Que l'on observe des "raies" d'émission bien précises montre que l'on a un phénomène quantique. Le spectre visible s'étend de  $\lambda = 700 \text{ nm}$  (rouge) à  $\lambda = 400 \text{ nm}$  (violet) (les fréquences correspondantes sont  $4,3 \times 10^{14}$  et  $7,5 \times 10^{14} \text{ Hz}$ ). Les rayons X ( $\lambda < 10^{-9} \text{ m}$ ) sont aussi d'origine atomique, alors que les rayons  $\gamma$  ( $\lambda < 10^{-13} \text{ m}$ ) sont d'origine nucléaire. Certains astres sont aussi la source de rayons X et de  $\gamma$  de très haute énergie.

Dans le domaine des applications quotidiennes, citons les bandes de fréquences AM autour de 1 MHz, les bandes FM autour de 100 MHz, celle des téléphones portables en Europe autour 900 et 1800 MHz, etc...

## Le principe de Huygens

La lumière blanche qui nous vient du Soleil est composé d'un spectre continu de fréquences (ou de longueurs d'ondes), comme nous le montre la décomposition spectrale par un prisme : cette décomposition est due à la différence de vitesse de l'onde dans le passage d'un milieu (l'air, p.ex.) à un autre (le verre, p.ex) : ce phénomène est due au fait que cette modification de la vitesse de la lumière dépend de la longueur d'onde de cette dernière : c'est le phénomène de la réfraction.

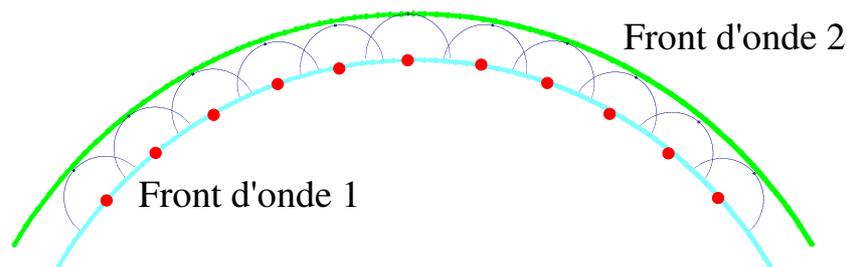
La décomposition spectrale de la lumière se manifeste aussi dans l'irisation de lames minces comme celles des bulles de savon, d'huile sur l'eau, etc... A la base du

# Les ondes électromagnétiques

phénomène, il y a l'interférence de la lumière. Pour l'expliquer, il faut cependant dépasser l'optique géométrique qui a permis, à la Renaissance, de construire les instruments d'optique et d'expliquer la propagation des "rayons" lumineux.

C'est 1678 que le physicien hollandais Christian Huygens (1629-1695), un contemporain de Newton, mit au point une méthode pour prédire la position future d'un front d'onde, connaissant sa position actuelle; cette méthode, appelée *principe de Huygens* s'énonce comme

*Tout point d'un front d'onde peut être considéré comme la source d'ondelettes se propageant vers l'avant à la même vitesse que l'onde; le nouveau front d'onde est l'enveloppe de toutes les ondelettes (c.à.d. la tangente à toutes ces ondelettes).*



\* Source

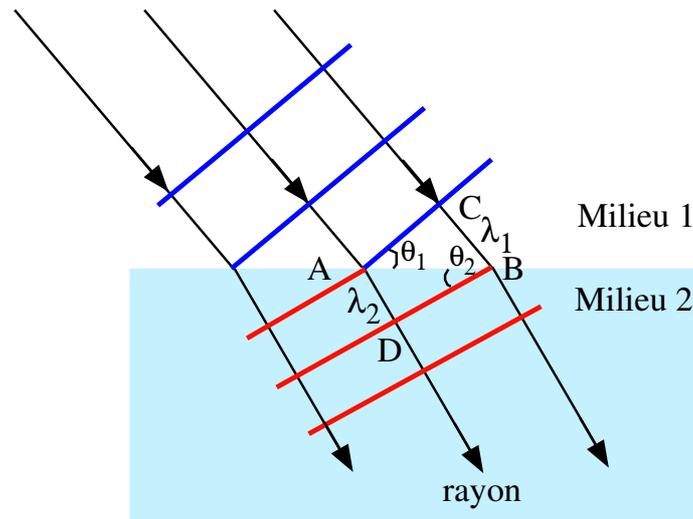
Particulièrement utile pour décrire ce qui se passe lorsque les fronts d'onde rencontrent des obstacles, le Principe de Huygens permet de décrire la réfraction et aussi les interférences lumineuses ainsi que les phénomènes de diffraction.

## La réfraction

La figure ci-après montre une onde plane figurée par des fronts d'onde plans au passage de l'interface de deux milieux. Appelons  $v_1$  et  $v_2$  les vitesses de la lumière dans les milieux 1 et 2 et faisons l'hypothèse que  $v_1 > v_2$ . Lorsque

## Les ondes électromagnétiques

le front d'onde touche l'interface en A, le point A peut être considéré comme la source d'une ondelette se propageant dans le milieu 2. Lorsque le front d'onde d'avant touche le point B, l'ondelette issue de A s'est déjà propagé jusqu'en D. Le temps séparant ces deux événements est de  $\lambda_1 / v_1 =$  temps nécessaire pour le front d'onde pour aller de C à B dans le milieu 1 et de  $\lambda_1 / v_1 =$  temps pour aller de A à D dans le milieu 2. Donc :  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}$ .



Pour le triangle rectangle ABC :  $\sin \theta_1 = \frac{\lambda_1}{AB}$ ,

Pour le triangle rectangle ABD :  $\sin \theta_2 = \frac{\lambda_2}{AB}$ . Par conséquent :

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

**L'indice de réfraction** d'un milieu est défini comme étant le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide à celle de la lumière dans le milieu :

$$n = \frac{c}{v}$$

par conséquent, pour notre cas de la réfraction :

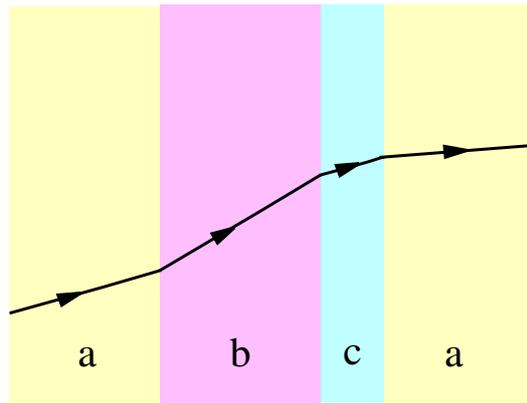
$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (\text{Loi de Snell - Descartes})$$

De  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}$ , nous tirons, en prenant le milieu 2 comme étant le vide,

## Les ondes électromagnétiques

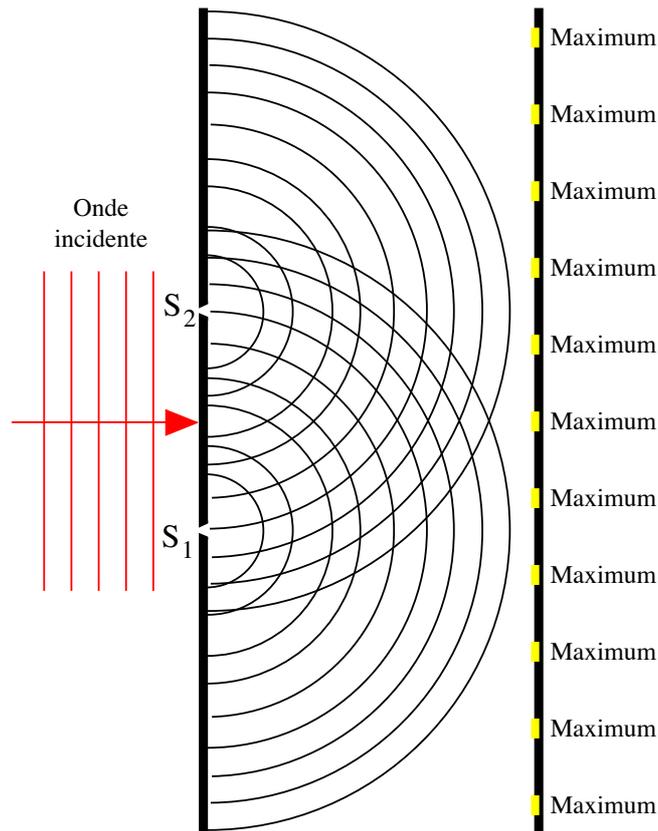
$\lambda_n = \lambda \frac{v}{c} = \frac{\lambda}{n}$  : la longueur d'onde d'une onde lumineuse dépend du milieu que l'onde traverse. Sa fréquence est cependant invariante.

**Point de contrôle** La figure ci-après montre un rayon lumineux monochromatique passant à travers des lames parallèles transparentes **a**, **b**, **c** puis **a**. Classez les milieux selon la vitesse que prend la lumière en les traversant.



## Les fentes de Young (interférences)

L'expérience de Thomas Young a eu lieu en 1801 et montra que la lumière est une onde et produit des interférences tout comme des ondes mécaniques sur la surface de l'eau. La figure ci-dessous en montre le principe.



Une lumière monochromatique et parallèle est incidente sur deux fentes  $S_1$  et  $S_2$  **minces** qui jouent alors le rôle de 2 sources de lumière *cohérentes*. Les ondes issues de  $S_1$  et  $S_2$  interfèrent et forment sur l'écran une "figure d'interférence" avec des maxima et minima d'intensité encore appelés "franges" d'interférence.

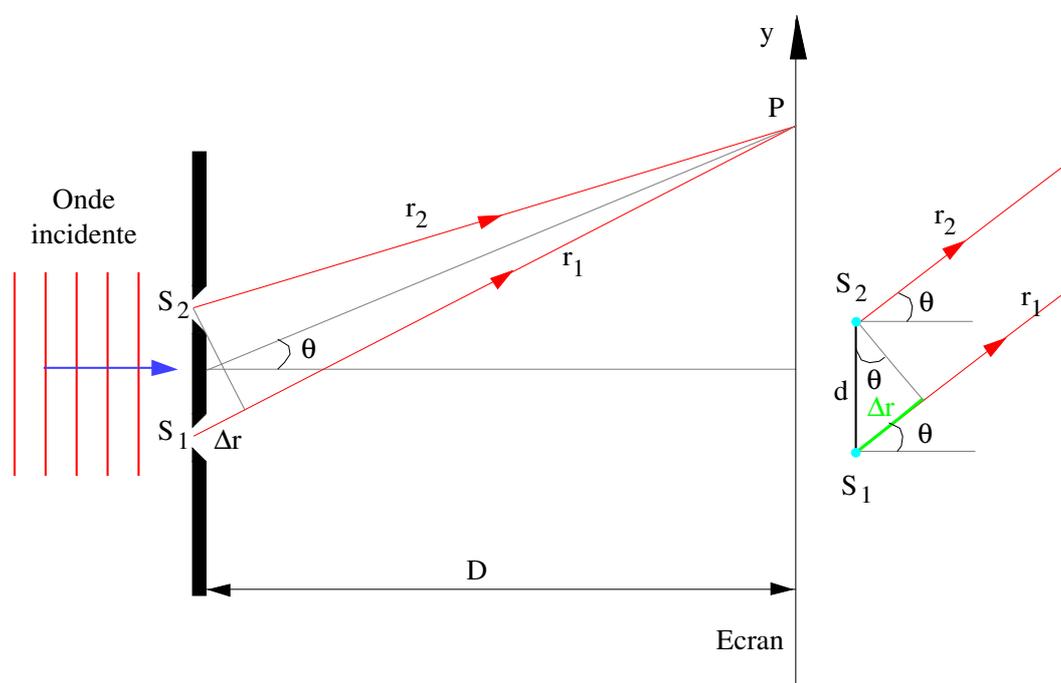
**Cohérence** L'existence des franges d'interférence dans l'expérience de Young n'est possible que si la lumière issue de  $S_1$  et  $S_2$  est cohérente. Sur le schéma expérimental, nous voyons que ces deux points sont situés sur un même front d'onde, c.à.d. sur une surface où la vibration est dans le même

# Interférence et diffraction

état :  $S_1$  et  $S_2$  sont des sources ayant le même état vibratoire et sont dites cohérentes.

Si nous remplaçons  $S_1$  et  $S_2$  par deux lampes à incandescence, les franges disparaissent : en effet, dans les lampes, la lumière est émise par un grand nombre d'atomes, émettant indépendamment et au hasard pendant des intervalles de temps extrêmement brefs (de l'ordre de la nanoseconde). Aucune cohérence n'est à attendre de telles sources.

## Formation des franges



Prenons un point  $P$  sur l'écran. En ce point, la superposition des ondes issues de  $S_1$  et de  $S_2$  sera entièrement constructive et aboutira à une frange claire si la différence des phases de ces ondes est un multiple entier de  $2\pi = 360^\circ$ , quelque soit le temps. Par conséquent, la différence de parcours  $\Delta r = |r_2 - r_1|$  doit être un multiple entier de la longueur d'onde :  $\Delta r = m\lambda$  avec  $m = 0, 1, 2, \dots$  (franges claires). De même, les franges sombres correspondent à des différences de phase de  $\pi = 180^\circ$ , c.à.d. à  $\Delta r = (m + \frac{1}{2})\lambda$  avec  $m = 0, 1, 2, \dots$  (franges sombres).

## Interférence et diffraction

Comme l'écran est éloigné des deux fentes  $S_1$  et  $S_2$ , nous pouvons écrire (cf. figure de droite) :  $\Delta r = d \sin \theta$ ,  $d$  étant l'écartement des deux fentes.

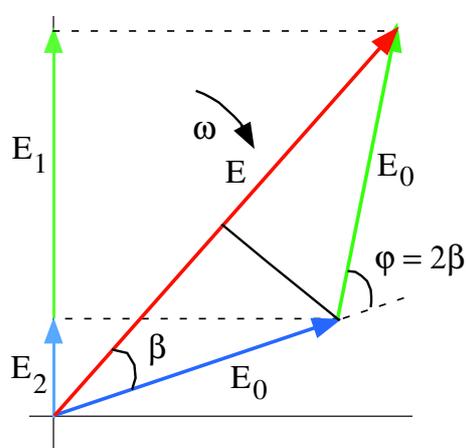
$$\begin{aligned} d \sin \theta &= m\lambda && \text{avec } m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{franges claires}), \\ d \sin \theta &= (m + \frac{1}{2})\lambda && \text{avec } m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{franges sombres}). \end{aligned}$$

### Intensité sur l'écran dans l'expérience de Young

La lumière émise par les deux sources  $S_1$  et  $S_2$  est en phase, puisque ces deux fentes sont sur un même front d'onde. Pour la situation dessinée à la page précédente (P du même côté que  $S_2$ ), au point P, la lumière issue de  $S_1$  arrive en retard par rapport à celle émise de  $S_2$ . Les champs électriques sont donc :

$$E_2 = E_0 \sin \omega t \quad E_1 = E_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

La résultante de la superposition de  $E_1$  et  $E_2$  peut être obtenue par la construction de Fresnel :



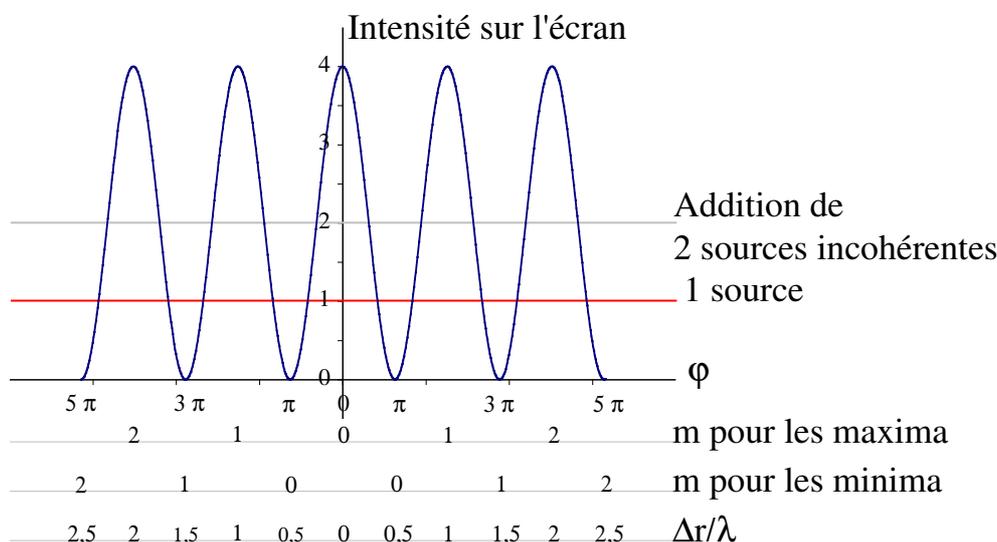
Le module du champ résultant est  $E = 2 E_0 \cos \beta = 2 E_0 \cos \frac{1}{2}\varphi$ . L'intensité lumineuse étant proportionnelle au carré du module du champ électrique,  $I = 4 E_0^2 \cos^2 \frac{1}{2}\varphi$ . La différence de phases, due ici à une différence de parcours des ondes, est reliée à la longueur d'onde par

$$\left( \begin{array}{c} \text{différence} \\ \text{de phase} \end{array} \right) = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \begin{array}{c} \text{différence} \\ \text{de parcours} \end{array} \right)$$

## Interférence et diffraction

Par conséquent : 
$$\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta .$$

Nous avons dessiné sur la figure suivante l'intensité sur l'écran :



Sur la figure, est aussi représentée l'intensité sur l'écran quand une des fentes est obscurcie : nous ne voyons alors qu'une distribution uniforme de lumière. Si les deux sources étaient incohérentes, nous doublons évidemment l'intensité par rapport à une source unique. Comme l'interférence ne peut pas "créer" de l'énergie, l'intensité moyenne sur l'écran en présence des interférences est égale à celle de la superposition de deux sources incohérentes !

**Point de contrôle** Quelle est la différence de parcours des entre les "rayons" issus des deux fentes en terme de longueur d'onde et quelle est la différence de phase des ondelettes

**a)** pour le troisième maximum latéral de la figure d'interférence ?

**b)** pour le troisième minimum latéral de la figure d'interférence ?

### Diffraction par une fente

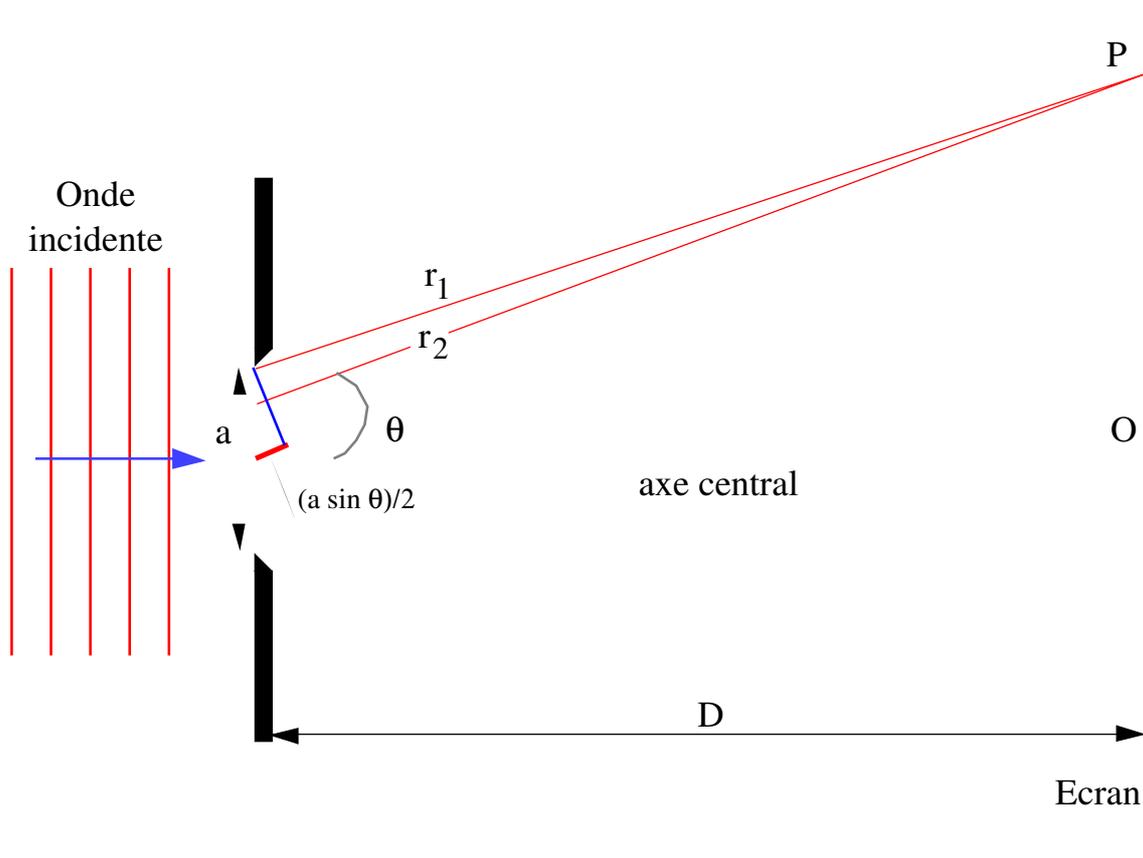
Nous avons tous fait l'expérience de regarder la lumière des lampadaires au travers d'un parapluie (noir, de préférence) : nous y voyons des croisillons ayant les couleurs de l'arc-en-ciel autour d'un point central brillant. Ce phénomène est la diffraction ; dans le cas du parapluie, il s'agit de la

## Interférence et diffraction

diffraction par un trou dans le maillage de la toile du parapluie, phénomène plus compliqué que la diffraction par une fente que nous allons traiter.

Considérons une fente de largeur  $a$  et de longueur infinie. La lumière est incidente perpendiculairement à la fente et, par conséquent, les fronts d'onde sont parallèles à la fente (cf. figure).

**Le maximum principal d'intensité** se trouve sur l'axe central perpendiculaire à la fente. En effet, en utilisant le Principe de Huygens, le front d'onde arrivant sur la fente et l'occupant entièrement, chaque point de la fente peut être considérée comme point source. Sur l'axe et sur l'écran, toutes les ondelettes issues de la fente arrivent en phase et donc interfèrent de manière constructive, donnant lieu à un maximum d'intensité.



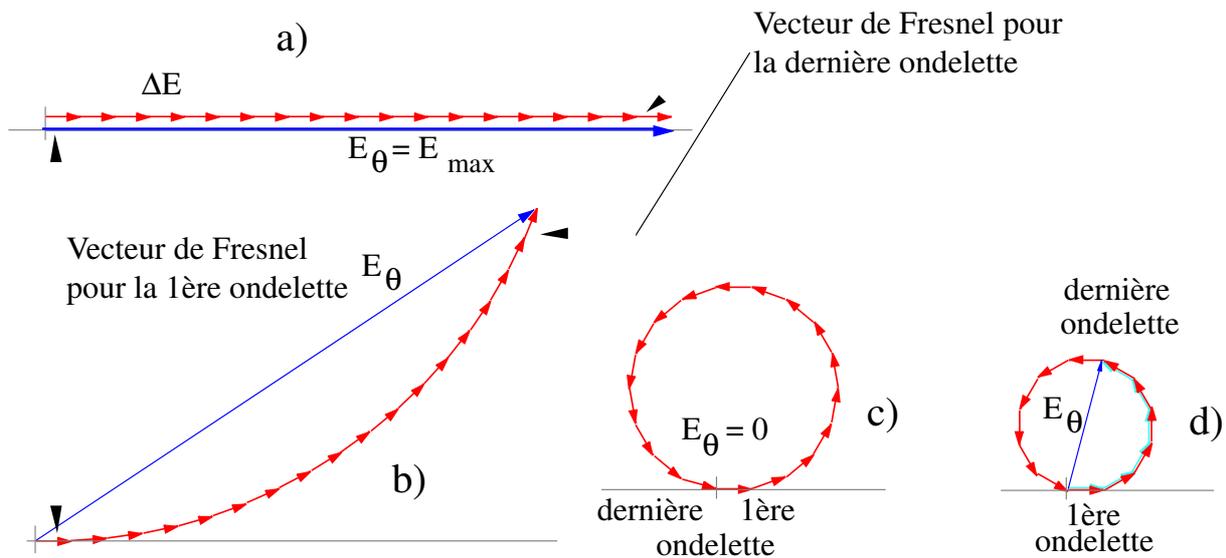
Diffraction par une fente de largeur  $a$ . Nous recherchons l'intensité de la lumière au point  $P$  sur l'écran, représenté par l'angle  $\theta$ . Les chemins  $r_1$  et  $r_2$  de 2 ondelettes issues de la fente sont dessinés. Au point  $O$  : maximum principal d'intensité.

## Interférence et diffraction

Pour un point  $P$  quelconque sur l'écran, repéré par l'angle  $\theta$ , appliquons le Principe de Huygens. Divisons la fente en  $N$  zones de largeurs égales  $\Delta x$ , cette largeur étant suffisamment petite pour que nous puissions faire l'hypothèse que la zone correspondante est une source d'ondelette dans le sens du Principe de Huygens. Au point  $P$ , nous aurons par conséquent la superposition des  $N$  ondelettes, de mêmes amplitudes, mais présentant une différence de phase entre 2 ondelettes voisines de

$$\Delta\varphi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \cdot (\text{différence de chemin}) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \Delta x \sin \theta$$

Pour trouver l'amplitude de l'onde  $\vec{E}_\theta$  résultante, nous utilisons la construction de Fresnel :



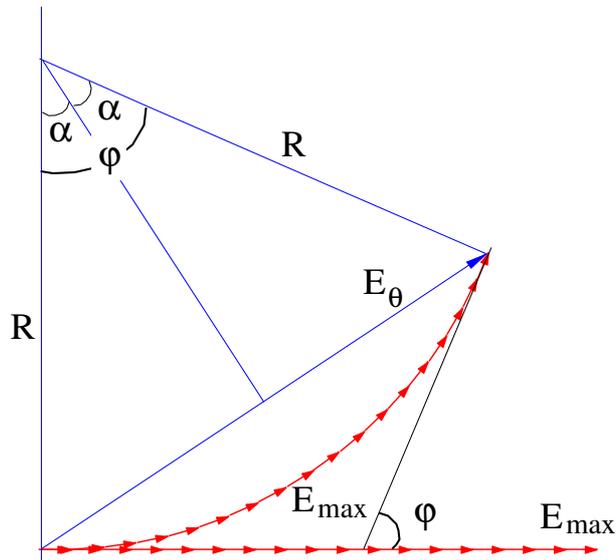
Sur ce dessin, nous avons divisé la fente en  $N = 18$  zones :  $\vec{E}_\theta = \sum \Delta\vec{E}$ . La première ondelette est celle qui est la plus proche du point  $P$ , les autres ondelettes sont en retard avec des retards de  $\Delta\varphi$  d'une ondelette par rapport à la précédente.

- a) Cette construction correspond au maximum d'intensité au point  $O$  :  $\theta = 0$ .
- b) Construction pour un angle  $\theta$  quelconque.
- c) Construction correspondante au premier minimum d'intensité :  $\vec{E}_\theta = \vec{E}_{\min} = 0$ .
- d) Construction correspondante au premier maximum secondaire.

**Intensité lumineuse dans une diffraction**

La figure **b)** précédente donne l'amplitude  $E_\theta$  de l'onde résultante au point P de l'écran. Il nous reste à calculer l'intensité lumineuse en P et à la relier aux paramètres physiques du problème : la largeur  $a$  de la fente et la longueur d'onde  $\lambda$  de la lumière.

Sur la figure, nous avons pris  $N = 18$  zones sur la largeur de la fente. Si nous faisons tendre  $N$  vers l'infini,  $\Delta x \rightarrow 0$  et la ligne brisée formée par les  $N$  vecteurs de Fresnel devient un arc de cercle d'une longueur de  $E_{max}$  égale à l'amplitude au point central O d'intensité maximale et de rayon  $R$ .



L'angle  $\varphi$  dessiné est l'angle entre le premier et le dernier vecteur de Fresnel : c'est donc la différence de phase entre l'ondelette issue d'un bord de la fente et celle partant de l'autre bord de la fente :  $\varphi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) a \sin \theta$  .

Nous retrouvons  $\varphi$  comme angle au centre interceptant la corde  $E_\theta$  (angles à côtés perpendiculaires). En abaissant la perpendiculaire du centre sur le côté  $E_\theta$ , nous avons :  $\sin \alpha = \sin \frac{1}{2} \varphi = \frac{E_\theta}{2R}$  .

Mais  $\varphi = \frac{E_{max}}{R}$  (un angle est le rapport de la longueur de l'arc sur le

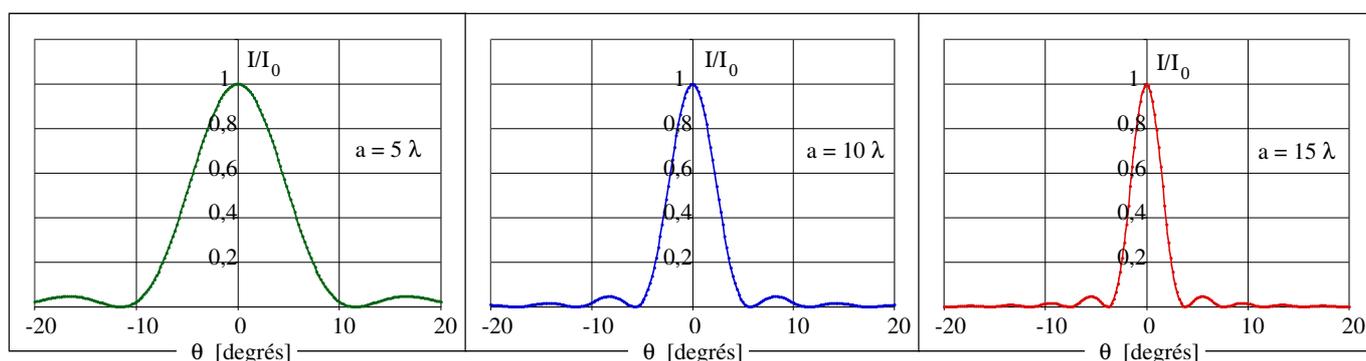
## Interférence et diffraction

rayon) ,

$$E_{\theta} = \frac{E_{max}}{\frac{1}{2} \varphi} \sin \frac{1}{2} \varphi$$

L'intensité lumineuse étant proportionnelle au carré de l'amplitude du champ électrique, nous avons :

$$\frac{I_{\theta}}{I_{max}} = \frac{E_{\theta}^2}{E_{max}^2} \Rightarrow I_{\theta} = I_{max} \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad 2\alpha = \varphi = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) a \sin \theta$$



La figure montre l'intensité relative dans la diffraction par une fente pour 3 valeurs du rapport  $a/\lambda$ . Plus la fente est large, plus le pic central de diffraction est étroit.

**Position des minima d'intensité** Des deux dernières relations

$$\frac{I_{\theta}}{I_{max}} = \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad 2\alpha = \varphi = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) a \sin \theta$$

nous déduisons la position des minima d'intensité :  $\alpha = m\pi$ ,  $m$  entier

$$\begin{aligned} \text{c.à.d.} \quad m\pi &= \left( \frac{\pi}{\lambda} \right) a \sin \theta & m &= 1, 2, 3, \dots \text{ ou} \\ a \sin \theta &= m\lambda & m &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Ainsi, le 1<sup>er</sup> minimum (1<sup>ère</sup> frange sombre) est situé à  $\sin \theta = \frac{\lambda}{a}$ .

**Point de contrôle** Nous produisons une figure de diffraction sur un écran avec une longue fente mince illuminée avec de la lumière bleue. Cette figure de diffraction augmente-t-elle en largeur (les minima et maxima secondaires s'éloignent-ils de l'axe central) si **a)** on utilise de la lumière jaune ? **b)** si on diminue la largeur de la fente ?

**Intensité des maxima secondaires** La relation donnant l'intensité relative  $\frac{I_\theta}{I_{max}} = \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2$  présente des maxima secondaires pour  $\alpha \approx \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi$  pour  $m = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{I_1}{I_{max}} = \left(\frac{\sin\left(1 + \frac{1}{2}\right) \pi}{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \pi}\right)^2 = 4,50 \times 10^{-2} \quad \text{premier maximum secondaire}$$

$$\frac{I_2}{I_{max}} = \left(\frac{\sin\left(2 + \frac{1}{2}\right) \pi}{\left(2 + \frac{1}{2}\right) \pi}\right)^2 = 1,60 \times 10^{-2} \quad \text{deuxième maximum secondaire}$$

Les maxima secondaires ont des intensités qui décroissent rapidement.

### Diffraction par une ouverture circulaire

Dans la plupart des instruments d'optique (l'oeil, les lunettes astronomiques, les jumelles, les microscopes), l'observation d'un point  $A$  revient à focaliser sur un écran (qui peut être notre rétine), les "rayons lumineux" issus de  $A$  : la construction de l'image utilise ainsi l'optique géométrique. Cependant, par leur construction même, les instruments d'optique sont limités par des diaphragmes circulaires qui sont, par exemple, les montures de la première lentille de l'objectif. L'image  $B$  de  $A$  que fournit l'instrument est en réalité une petite tache entourée d'anneaux de diffraction.

L'analyse de la diffraction par une ouverture circulaire est assez long et fastidieux et demande une intégration sur la surface de l'ouverture. Tous calculs faits, on trouve que le premier minimum (frange sombre) d'une figure de diffraction par une ouverture circulaire de diamètre  $d$  est située à

$$\sin \theta = 1,22 \frac{\lambda}{d}$$

le facteur 1,22 résultant de l'intégration sur la surface de l'ouverture circulaire.

La valeur d'un instrument dépend de la possibilité qu'il offre de distinguer des détails très fins, c.à.d. d'apercevoir distinctes l'une de l'autre les images

## Interférence et diffraction

de deux points voisins  $A$  et  $A'$ . Il faut donc que l'objectif nous fournisse déjà deux taches de diffractions séparées au moins par une région moins éclairée, une utilisation ultérieure d'oculaires grossissants ou de plaques photographiques à grains fins pourra ensuite permettre une séparation de ces images. Le pouvoir séparateur d'un instrument est donc dicté par celui de son objectif. Nous utiliserons le **critère de Rayleigh** pour le pouvoir séparateur :

*Les deux taches de diffraction apparaissent séparées à l'oeil quand le maximum central de l'une coïncide avec le premier minimum nul de l'autre.*

Les deux points  $A$  et  $A'$  apparaissent distincts s'ils sont séparés d'un angle

$$\theta_R = \arcsin \frac{1,22 \lambda}{d} \underset{\substack{\approx \\ \text{petits angles}}}{\approx} \frac{1,22 \lambda}{d}$$

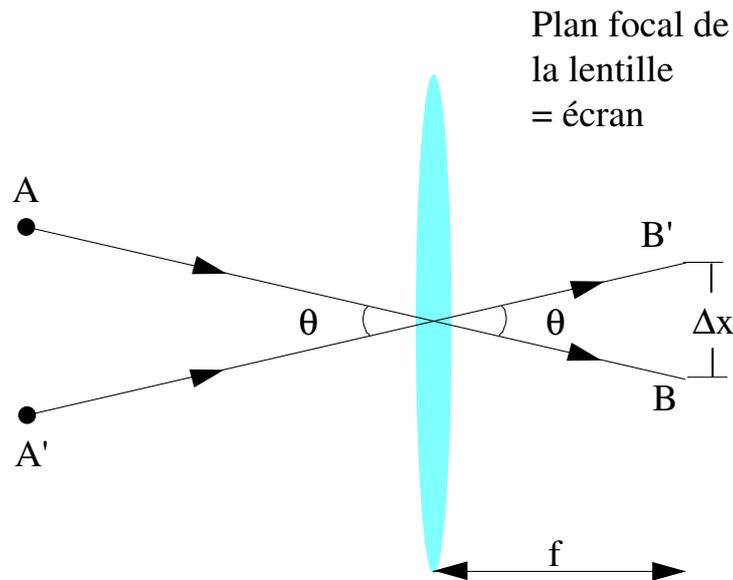
Ainsi, pour augmenter le pouvoir séparateur, c.à.d. pour obtenir une figure de diffraction aussi petite que possible, il est avantageux d'augmenter le diamètre de la lentille de l'objectif ou/et d'utiliser une lumière à plus faible longueur d'onde. C'est ainsi que la lumière ultraviolette ( $\lambda < 400 \text{ nm}$ ) est souvent utilisée avec les microscopes.

[Les microscopes électroniques utilisent le fait que les électrons se comportent dans certaines circonstances comme des ondes ; dans ces appareils, les faisceaux d'électrons se comportent comme des ondes ayant une longueur d'onde effective de  $10^{-5}$  fois celle de la lumière visible. La résolution que l'on peut obtenir est sans commune mesure avec celles des microscopes ordinaires.]

Exemple : Une lentille convergente d'un diamètre de 32 mm et d'une focale de 24 cm forme des images sur un écran placé dans son plan focal. La lumière utilisée a une longueur d'onde de  $\lambda = 550 \text{ nm}$ .

La séparation angulaire de deux points satisfaisant au critère de Rayleigh

# Interférence et diffraction



est de :

$$\theta = \theta_R = 1,22 \frac{\lambda}{d} = \frac{1,22 \cdot 550 \times 10^{-9}}{32 \times 10^{-3}} = 2,1 \times 10^{-5} \text{ radians}$$

Cette séparation angulaire correspond aux positions des deux maxima de la figure de diffraction. La séparation en longueur sur l'écran est alors :

$$\Delta x = f \cdot \theta = 0,24 \cdot 2,1 \times 10^{-5} = 5,03 \mu\text{m}$$

**Point de contrôle** Supposez que vous distinguez à peine deux points rouges à cause de l'ouverture de la pupille de vos yeux. Si on augmente la lumière autour de vous de sorte que votre pupille se contracte, le pouvoir séparateur de votre oeil augmente-t-il ou diminue-t-il, autrement dit, pouvez-vous mieux distinguer les deux points rouge ? (Considérez uniquement la diffraction).

## Lecture : les ailes du MORPHO

Les papillons Morpho Rhetenor et Morpho Peleides habitent en Guyane et en Amérique latine. Leurs ailes sont d'un magnifique bleu irisé.

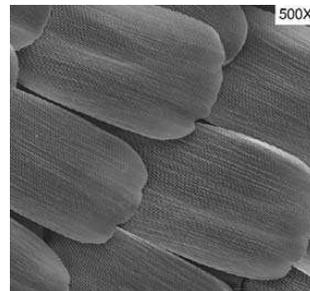
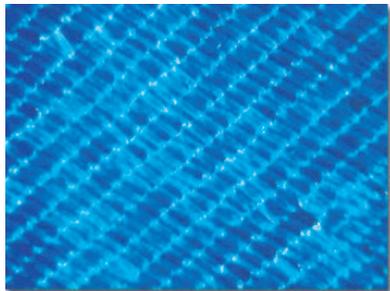
Cette belle couleur bleue est due à l'interférence constructive de la lumière réfléchie sur des *plateaux* transparents constitués d'un matériau équivalent

## Interférence et diffraction



*Morpho Peleides*

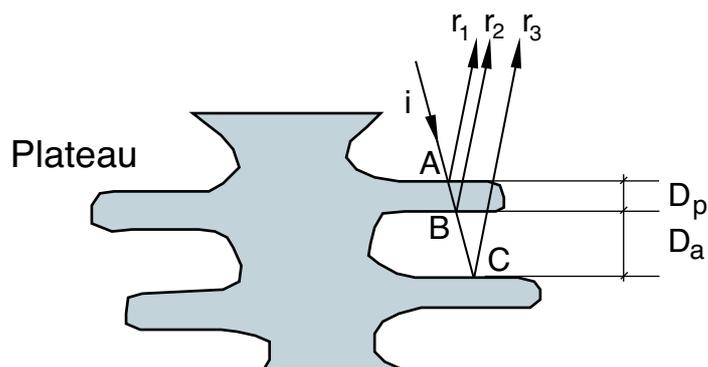
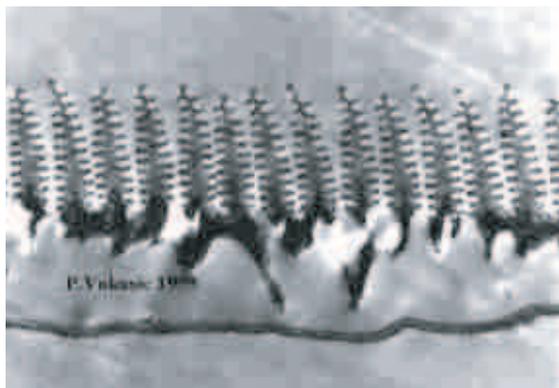
à celle des cuticules. Ces *plateaux* sont parallèles à l'aile (donc perpendiculaire à la lumière incidente). Les figures suivantes montrent successivement la structure en "tuiles" des ailes et la coupe de ces "tuiles" montrant la structure en *plateaux* (l'image a été obtenue au microscope électronique à transmission).



Structure en "tuiles" des ailes du MORPHO

Les *plateaux* ont un indice de réfraction  $n = 1,53$  et leur épaisseur est de  $D_p = 63,5$  nm ; ils sont séparés par une couche d'air d'épaisseur  $D_a = 127$  nm. La lumière a une incidence presque perpendiculaire aux *plateaux* (l'angle d'incidence dessiné sur la figure est fortement exagéré pour les besoins du dessin). Nous allons chercher la longueur d'onde visible à laquelle la lumière réfléchie sur les *plateaux* présente-t-elle une interférence maximale ; en effet, la belle couleur irisée que nous percevons est due à une telle interférence. Considérons que l'indice de réfraction de l'air est de 1.

# Interférence et diffraction



Coupe des “tuiles”

**Idée principale** : pour avoir un maximum d'interférence, la différence de phase entre  $r_1$  et  $r_2$  ou entre  $r_1$  et  $r_3$  doit être de  $2\pi$ . Cependant, nous avons ici

- Une réflexion du rayon  $r_1$  d'un milieu à faible indice de réfraction (l'air) sur un milieu à fort indice (matériau du *plateau*). Cette réflexion entraîne un déphasage de  $\pi$ , c.à.d. un “retard” d'une demi longueur d'onde.
- Une réflexion du rayon  $r_2$  sur un milieu à plus faible indice n'introduit pas de déphasage.

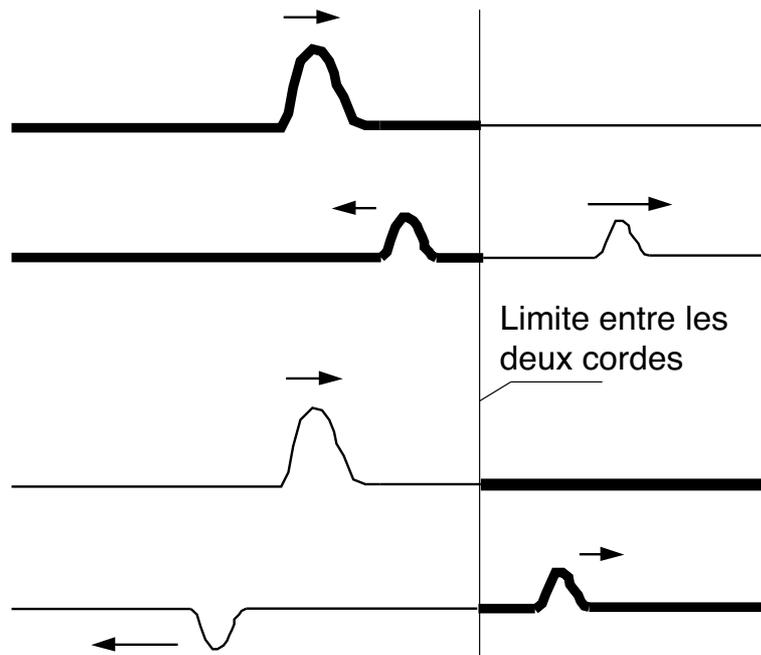
Ceci est analogue à la propagation d'une onde transversale sur une corde constituée de deux segments de densités linéaires différentes :

- Quand l'onde vient de la partie la plus dense de la corde, où sa vitesse est faible, l'onde réfléchie n'est pas opposée à l'onde initiale.
- Quand l'onde vient de la partie légère de la corde, où sa vitesse est grande, l'onde réfléchie est opposée à l'onde initiale.
- Pour les ondes électromagnétiques (la lumière), l'analogue de la région dense de la corde est la région où l'indice de réfraction est la plus élevée (vitesse de l'onde faible) et inversement.
- Une onde en opposition est déphasée de  $\pi$ , ce qui correspond à une demi longueur d'onde.

Reprenons la figure de la coupe des “tuiles”.

Considérons les rayons réfléchis  $r_1$  et  $r_2$  (due à l'état des surfaces “interne” et “externes” des *plateaux*, il y a toujours une partie de la lumière qui subit

## Interférence et diffraction



des réflexions).

Par rapport à l'onde incidente  $i$  :

L'onde 1 a une différence de phase de  $\pi$  ou une différence de chemin d'une demi longueur d'onde.

Pour que l'onde 2 interfère constructivement avec l'onde 1, il faut que le chemin parcouru rajoute 0,5, 1,5, 2,5, ...,  $(m+0,5)$  longueurs d'ondes au retard pris par l'onde 1. Comme la longueur d'onde dans un milieu d'indice de réfraction  $n$  est de  $\lambda(n) = \lambda/n$ , nous avons :

$$2D_p = (m+0.5) \times \lambda(n) = (m+0.5) \times \frac{\lambda}{n} \Rightarrow \lambda = \frac{2nD_p}{m+0.5} \quad m = 0, 1, \dots$$

Pour  $m = 0$ , nous trouvons  $\lambda = \frac{2 \cdot 1,53 \cdot 63,5}{0,5} = 388 \text{ nm}$ , qui est une longueur d'onde dans l'Ultra-Violet. Pour des  $m$  plus élevés, nous aurons des longueurs d'onde encore plus petites! Par conséquent, l'interférence entre les ondes 1 et 2 ne peuvent pas expliquer la couleur des ailes du Morpho.

**Autre idée** : on peut ne pas se restreindre à des interférences entre rayons incident et réfléchis sur un même *plateau*.

## Interférence et diffraction

Considérons les rayons 1 et 3. La différence de chemins est de  $2D_p + 2D_a$  (l'indice "a" est pour air et "p" pour plateau). Comme les réflexions des deux ondes introduisent toutes les deux un déphasage de  $\pi$ , nous n'avons pas à tenir compte de l'effet de ces réflexions.

Le nombre de longueurs d'onde correspondant au trajet  $2D_p$  est de :

$$N_p = \frac{2D_p}{\lambda(n)} = \frac{2D_p n}{\lambda}$$

et celui correspondant au trajet  $2D_a$  est de :

$$N_a = \frac{2D_a}{\lambda}$$

Nous désirons que la somme de ces deux nombres de longueurs d'onde soit un entier pour qu'une interférence constructive puisse se réaliser :

$$N_p + N_a = \frac{2D_p n}{\lambda} + \frac{2D_a}{\lambda} = m \quad m = 1, 2, \dots$$

Donc :

$$\lambda = \frac{2 \cdot 63,5 \cdot 1,53 + 2 \cdot 127}{m} = \frac{448}{m} \text{ nm}$$

Pour  $m = 1$ , on trouve  $\lambda = 448 \text{ nm}$ . Cette valeur de la longueur d'onde correspond à la couleur turquoise des ailes du Morpho.

Par conséquent, si vous regardez les ailes du Morpho perpendiculairement, la lumière qui vous est réfléchiée a subi des interférences entièrement constructives si la longueur d'onde est dans la région blue-vert. Les couleurs jaune et rouge ( l'autre bout du spectre visible) n'ont pas d'interférences entièrement constructives et leur intensité est fortement réduite. Si vous regardez l'aile du Morpho sous un autre angle, les rayons qui vous parviennent ont eu des incidences inclinées et ont parcouru des distances plus grandes dans les plateaux, donnant lieu à des interférences entièrement constructives pour des longueurs d'onde différentes : la couleur à laquelle le maximum d'intensité vous parvient change avec l'angle sous lequel vous regardez l'aile du Morpho, ce qui donne cette irisation de l'aile.

## Interférence et diffraction

De grandes firmes industrielles se sont inspirées de ces interférences et ont utilisé des matériaux synthétiques pour former des structures périodiques nanométriques : L'Oréal a ainsi créé des produits cosmétiques sans colorant chimique ; la figure ci-apès montre un tel produit inspiré du vivant.



## Réponses aux Points de Contrôle

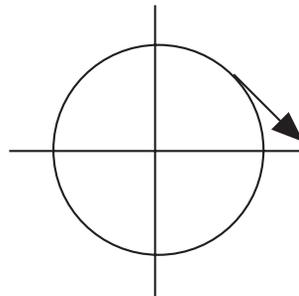
5 mars 2013

- Page 15      a) cas 1 :  $v = 3 \text{ m/s}$ , cas 4 :  $v = 0 \text{ m/s}$   
                  b) cas 2 :  $v = - 8t$  , cas 3)  $v = - 2 \times 2 /t^3$  ( $t > 0$ )
- Page 16      a) + , b) - , c) - , d) +
- Page 20      cas d)
- Page 20      ascension : déplacement +,  
                  chute : déplacement –  
                  accélération à l'apogée :  $-g = -9,81 \text{ m/s}^2$
- Page 22      a) a et b parallèle  
                  b) a et b anti-parallèle,  $|a| > |b|$   
                  c) a et b anti-parallèle,  $|a| < |b|$   
                  d) a et b orthogonaux
- Page 26      a)  $90^\circ$  ( $\pi/2$ )      b)  $180^\circ$  ( $\pi$ )  
                  c) 0 ou  $180^\circ$  ( $\pi$ )    d)  $90^\circ$  ( $\pi/2$ )

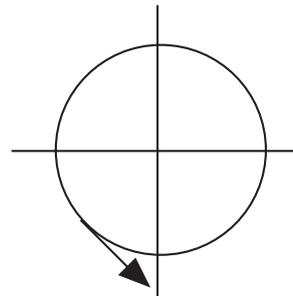
12 mars 2013

Page 27  $\Delta r = 7 \hat{i} - 9 \hat{j}$  : parallèle au plan Oxy

Page 28



1er quadrant  
sens horaire



3ème quadrant  
sens anti-horaire

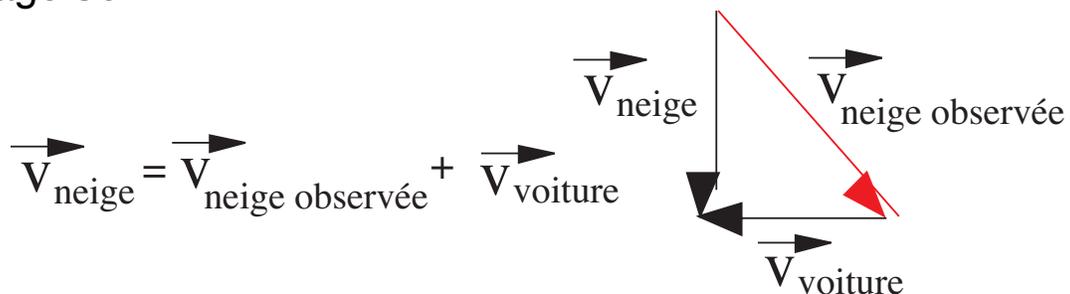
Page 29 OP : coordonnée x  
OQ : coordonnée y : accélération nulle  
OQ : coordonnée x : accélération nulle aussi  
[OP] = m  $\Rightarrow$  3 m/s<sup>2</sup>, 5 m, 4 m.s<sup>-5/2</sup>  
[OQ] = m  $\Rightarrow$  2 m/s, 9 m, 6 m

Page 31 2) voir l'expérience montrée sur DVD :  
flèche et pomme ont la même accélération  
verticale.

Page 34  $[a_r] = (m/s)^2 \cdot (1/m) = m/s^2$  donc juste

Page 34 omega  $\omega$  est en s<sup>-1</sup> puisque l'angle n'a pas de  
dimension.

Page 36



Page 37 l'intervalle de temps sépare deux événements  
(que vous choisirez).

**19 mars 2013**

Page 42 a) et b) : 2 N vers la gauche (il ne s'agit pas de mettre en mouvement le bloc !)

Page 43 a) N et mg sont égaux,  
b)  $N > mg$

Page 44  $\vec{N}$  et  $\vec{f}$  ne sont pas colinéaires

Page 45 les forces dont parle l'âne sont des **forces internes**.

Page 47 a)  $g = 0$  : pas d'accélération ni de tension  
b)  $M = 0$  :  $a = g$  , chute libre de m  $\Rightarrow T = 0$   
c)  $m \rightarrow \infty$  :  $a = g$  , chute libre de m  $\Rightarrow T = 0$

Page 48 0 car dans ce cas,  $a = -g$

**26 mars 2013**

Page 56      **2** a la plus longue période  
                 **1** a la plus grande vitesse

Page 58      Le travail de la force centripète est nul car  
                  $\vec{F}$  est perpendiculaire à  $d\vec{r}$   
                 la puissance qu'elle développe aussi.

Page 60      a)  $W = 0$ ,  
                 b)  $W = 0$

**9 avril 2013**

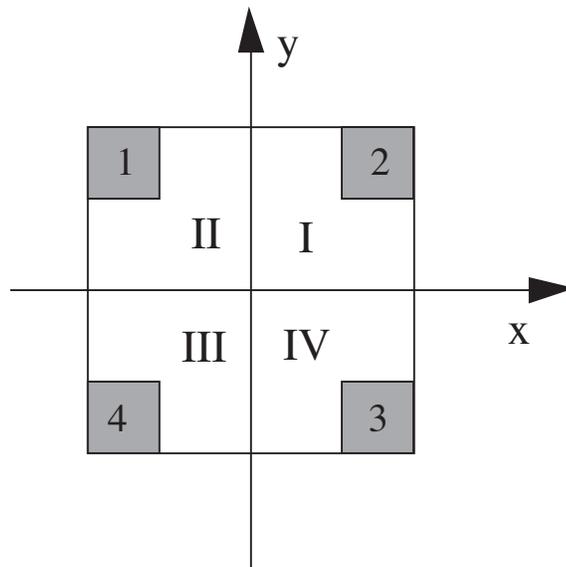
Page 64

La force n'est pas conservative : considérez le travail de la force le long d'un chemin fermé, il doit être égal à zéro, quelque soit ce chemin.

16 avril 2013

Page 74

- a) au centre
- b) dans le quadrant IV
- c) sur l'axe 0y avec  $y < 0$
- d) au centre
- e) dans le quadrant III
- f) au centre



Page 76

- a)  $\vec{P}_{tot} = 0$
- b) non
- c) dans la direction - Ox

Page 79

$$\Delta p = p_{xf} - p_{xi} = -2p_{xi}$$

Page 79

- $P_{tot} = P_1 + P_2$  donc :
- a) 10 kg.m/s , b) 14 kg.m/s , c) 6 kg.m/s

Page 84

Les 3 sphères ont toutes le même moment d'inertie : 36 kg.m<sup>2</sup>

23 avril 2013

Page 86  $\vec{F}_2$  dirigé de haut en bas  
 $|\vec{F}_2| < |\vec{F}_1|$

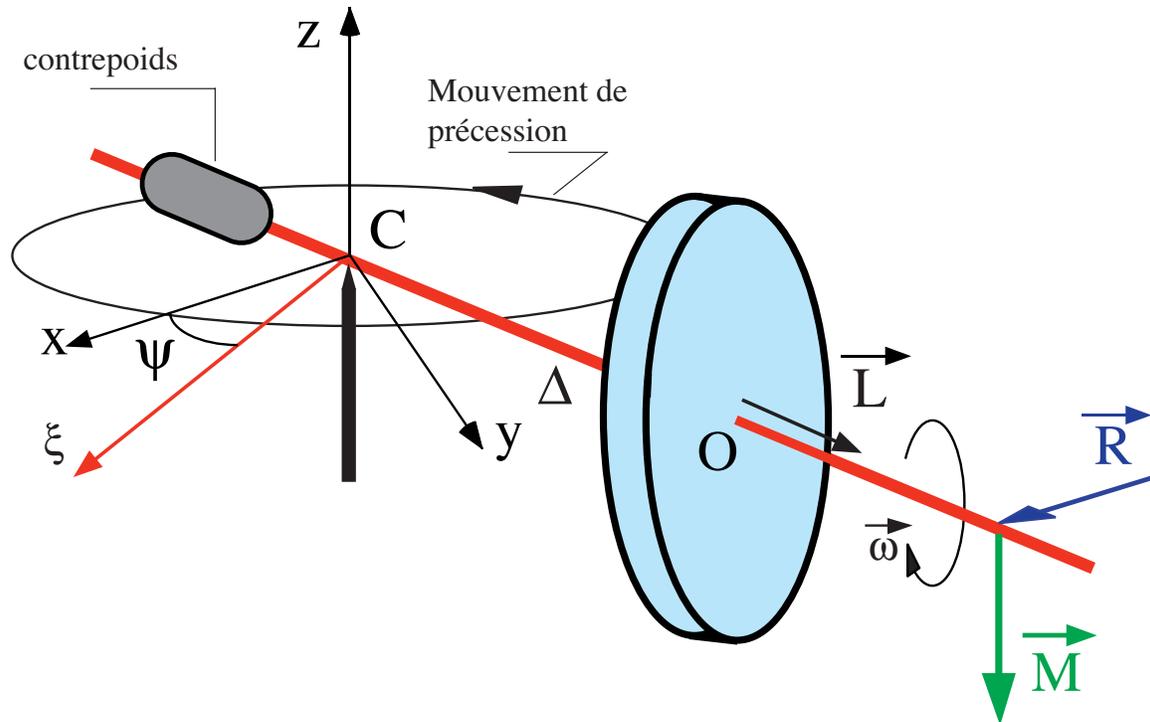
Page 90 On choisit la direction de rotation positive selon le sens anti-horaire ! Les signes des moments cinétiques sont déterminés par rapport à cette direction.

$$|\vec{L}_1| = |\vec{L}_3| \text{ puis}$$

$$|\vec{L}_2| = |\vec{L}_4| \quad \vec{L}_5 = 0$$

$$\vec{L}_2 < 0 \quad \vec{L}_3 < 0$$

Page 95 Le gyroscope est déséquilibré et précède comme le montre la figure. Son axe rencontre le mur qui réagit par une force  $R$ . Le moment de cette force par rapport à  $C$  est  $M$  (dirigé vers le bas) : l'axe du gyroscope tend à descendre vers le bas car  $d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt$ .



**Annance importante :**

Du au manque de temps, le paragraphe sur l'Hydrostatique (Phys\_105.pdf) ne sera pas traité et donc ne fera pas l'objet d'interrogation à l'examen.

**Le 23 avril, nous aborderons l'hydrodynamique** (Phys\_129.pdf)

**1er mai 2013**

Page 133 Le fluide sort de la ramification avec un débit de  $13 \text{ cm}^3/\text{s}$

Page 135 En négligeant la pression hydrostatique ou si l'ensemble est dans un plan horizontal :

- a. même débit partout
- b.  $v_1 > v_2 = v_3 > v_4$
- c.  $P_4 > P_3 = P_2 > P_1$

Page 145  $h_1 = 2 \cdot h_2$  : deux fois plus de liquide s'est écoulé dans le béccher 1

Page 149

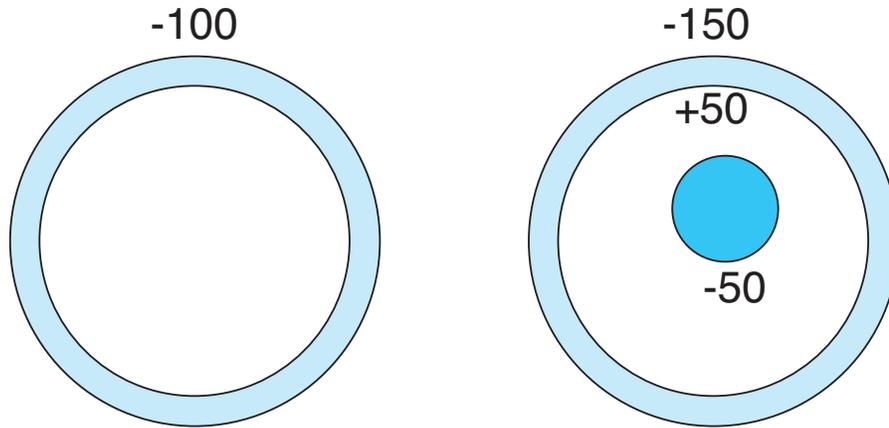
- a. La *longueur caractéristique* peut être ici le diamètre des billes.
- b. Si on introduit une paroi, ce sera la bille la plus éloignée de la paroi qui aura la plus grande vitesse.

**7 mai 2013**

- Page 152     -15 e : la charge nette finale de -30 e est partagée car les deux sphères sont conductrices
- Page 155     Méthode : recherchez les composantes du champ E selon x et selon y observez qu'entre a) et b) et qu'entre c) et d) il y a une symétrie  
Le champ E est le même à l'origine.
- Page 158     a) vers la gauche  
b) vers la gauche  
c) la vitesse diminuera
- Page 162     Flux de E au travers de la face avant : +E.A  
Flux de E au travers de la face arrière : -E.A  
Flux de E au travers de la face supérieure : 0  
Flux de E au travers de la face inférieure : 0
- Page 162     Le flux est le même dans les 3 cas  
(Th. de Gauss)

13 mai 2013

Page 163

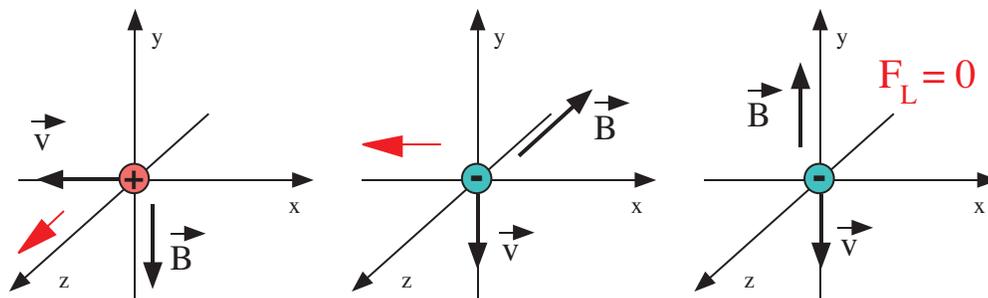


Page 166 a) le travail produit est négatif  
b)  $\Delta U = -W$  augmente

Page 167 Nous donnons de l'énergie au proton pour qu'il remonte le champ E : a) travail positif,  
b) le potentiel électrique sera plus haut.

Page 169 a positif, c potentiel nul, b potentiel négatif

Page 174



Page 177 l'électron a la trajectoire dont le rayon est le plus petit  
il parcourt sa trajectoire dans le sens horaire.

15 mai 2013

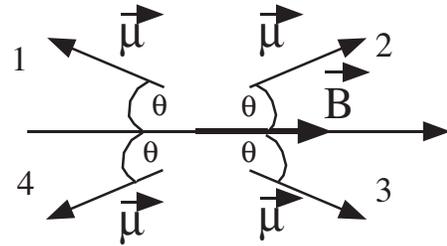
Page 179 Le champ B est dans le sens -y pour que la force soit maximale

Page 181



module de  $\tau$  :

$$|\vec{\mu}| |\vec{B}| \sin\theta$$



Page 183

Si on ne considère pas les signes :

d), puis a) et c) à égalité, puis b)

Pour le cas b), en partant de la gauche :

Le courant 1 est dans la boucle, puis le

courant 2 en dehors, puis 3 est dans la boucle

**26 septembre 2013**

Page 196      Tous les processus correspondent à des transformations isothermes, **sauf le processus c)**

Page 206      Le gaz doit **fournir** du travail sur le cycle :  $W_{\text{net}} < 0$  : seuls les transformations c et e peuvent réaliser cette requête.

**3 octobre 2013**

Page 208      a)  $\Delta U$  est le même pour les 4 processus  
                  b) dans l'ordre décroissant : 4, 3, 2, 1  
                  c) dans l'ordre décroissant : 4, 3, 2, 1

Page 208      a)  $\Delta U = 0$   
                  b) le travail est absorbé par le gaz  
                       $W > 0 \Rightarrow Q < 0$

Page 211      Utilisez  $Q = M c \Delta T \Rightarrow Q = 1 \cdot c_A \cdot 3 = 1 \cdot c_B \cdot 4$

Page 216      Les molécules sont à la même température,  
                  donc  
                  a)  $\langle E \rangle$  est le même pour les 3 types de  
                      molécules  
                  b)  $\langle v_3^2 \rangle > \langle v_2^2 \rangle > \langle v_1^2 \rangle$

**10 octobre 2013**

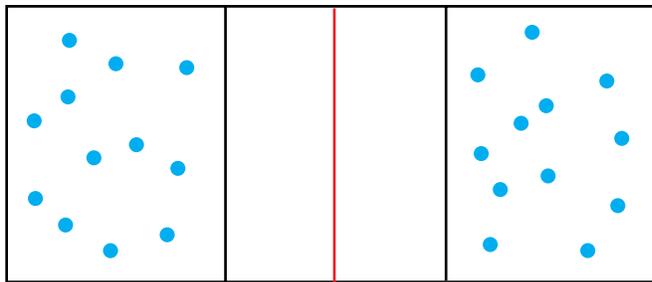
Page 224      On constate tout d'abord que  $T_3 > T_2 > T_1$ .  
Le gaz est parfait, son énergie interne ne dépend que de sa température, donc :  
 $\Delta U$  le plus grand pour le processus 5, puis 1, 2, 3 et 4 à égalité.

Page 227       $|W_{\text{adiabatique}}| < |W_{\text{isotherme}}|$   
La courbe  $PV^\gamma$  est en dessous de la courbe  $PV = \text{cst}$  car la température baisse.  
Dans une détente isotherme, vous apportez de l'énergie calorifique (chaleur) pour maintenir la température du gaz constante, il n'est donc pas étonnant que le travail recueilli est plus grand que dans une détente adiabatique où la température du gaz baisse.

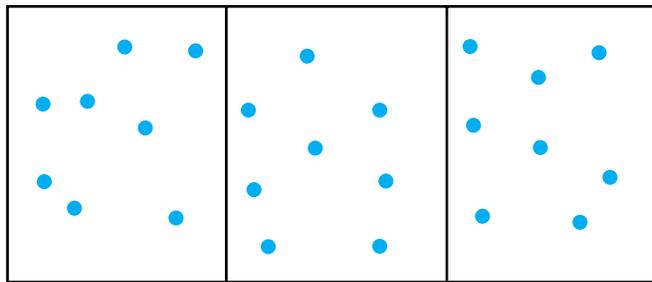
17 octobre 2013

Page 240

L'état macroscopique qui a le plus d'états détaillés est un état d'équilibre, vu les conditions imposées, et inversement. Nous voyons que, dans la situation a), les moitiés gauche et droite peuvent contenir des situations de non-équilibre tels que celles indiquées sur la figure a).



a)



b)

C'est donc le cas b) qui a le plus grand nombre d'états détaillés.

Page 242

$$\Delta S = k \left[ \ln W_{N/2}^N - \ln W_N^N \right] = k \ln W_{N/2}^N$$

$$\Delta S \approx k \ln \left[ \left( \frac{2}{\pi N} \right)^{1/2} 2^N \right]$$

$$\Delta S \approx k/2 [\ln 2 - \ln \pi - \ln N] + kN \ln 2$$

$$\Delta S \approx kN \ln 2 \quad \text{si } N \text{ est très grand}$$

L'entropie étant une fonction d'état, sa variation ne dépend pas de la transformation choisie, que ce soit une détente de Joule ou une détente isotherme quasi-statique, mais que des états initial et final : on aurait pu trouver la relation précédente en étudiant la détente isotherme quasi-statique (réversible) (cf. page 237)

24 octobre 2013

Page 243

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \Rightarrow \Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = mc \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = mc [\ln T_2 - \ln T_1]$$

$\uparrow$   
 $\delta Q = mc dT$

a) 20°C → 30°C :

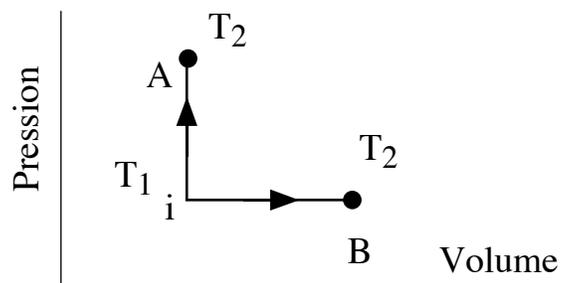
$$\Delta S = mc [\ln(273 + 30) - \ln(273+20)] =$$

$$\Delta S = mc \cdot 0,03356 \text{ [J/K]}$$

b) 30°C → 35°C :  $\Delta S = mc \cdot 0,01637 \text{ [J/K]}$

c) 80°C → 85°C :  $\Delta S = mc \cdot 0,01406 \text{ [J/K]}$

Page 246



Faisons de A à B une détente isotherme :

$$\Rightarrow Q_{AB} > 0 \Rightarrow \Delta S_{AB} > 0$$

$$\Delta S_{iA} + \Delta S_{AB} + \Delta S_{Bi} = 0$$

$$\Delta S_{iA} = -\Delta S_{AB} - \Delta S_{Bi} = \Delta S_{iB} - \Delta S_{AB}$$

comme  $\Delta S_{AB} > 0 \Rightarrow \Delta S_{iB} > \Delta S_{iA}$

Page 249

Machine a) :  $\eta = 20\%$

Machine b) :  $\eta = 25\%$

Machine c) :  $\eta = 33\%$

**31 octobre 2013**

Page 261 a) Sur un cycle, toutes les variations des fonctions d'état sont nulles.

**Uniquement si on ne tient pas compte du potentiel chimique :**

b)  $\Delta U = 0$

c)  $\Delta G = 0$

Page 269 a) L'équilibre des phases se traduit par l'égalité des potentiels chimiques des deux phases.

Page 270 b) Les 3 lignes de transition de phase se coupent au point triple.

7 novembre 2013

Page 276

$$P_{osmotique\ 2} = P_{osmotique\ 1} \cdot \frac{kT_2 x_2 N_{solvant}}{kT_1 x_1 N_{solvant}} = 7,21\ atm$$

**14 novembre 2013**

- page 296      se fixer un temps, par exemple  $t = 0$  et  
considérer les longueurs d'onde  $\lambda = 2\pi/k$   
la phase a) correspond à l'onde 2  
la phase b) correspond à l'onde 3  
la phase c) correspond à l'onde 1
- page 297      La vitesse de propagation de l'onde  $v = \frac{\omega}{k}$   
On a donc : par ordre décroissante de la  
vitesse : l'onde 2, l'onde 3 puis l'onde 1.
- Page 298      Si on augmente la fréquence des oscillations  
imprimées à la corde  
a) la vitesse de l'onde ne change pas (la  
vitesse ne dépend que de la masse linéaire  
de la corde et de sa tension)  
b)  $\lambda = \frac{v}{f}$  diminue si la fréquence augmente  
Si on augmente la tension  $\tau$  de la corde  
c)  $v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$  augmente  
d)  $\lambda = \frac{v}{f}$  augmente si la vitesse de l'onde  
augmente

a) l'énergie transportée augmente avec

le terme  $\omega = k v = k \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$

b) l'énergie transportée augmente avec la fréquence ( $\omega = 2\pi f$ )

c) l'énergie transportée augmente avec l'amplitude des oscillations

En effet, pour les trois cas précédents

$$E^{\text{cin}} = \omega^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

**21 novembre 2013**

- Page 308      a) et c) les deux ondes initiales se déplaçaient vers les  $x > 0$  . Si on avait  $y_r = 4 \sin (5x + 4t)$  les deux ondes se seraient déplacées les deux vers les  $x < 0$
- b) les deux ondes se déplacent en sens opposés et forment une onde stationnaire.
- Page 313      L'impulsion empruntant le chemin 2 arrivera en premier sur les détecteurs

**28 novembre 2013**

Page 318 La deuxième harmonique ( $n = 2$ ) du tuyau B

Page 318 Il manque la fréquence de 75 Hz

Page 324 En tendant la corde, on constate que la fréquence des battements augmente : il ne faut donc pas continuer de la tendre, mais la relâcher !

Page 328

- a) la fréquence est plus grande
- b) la fréquence est plus petite
- c) on ne peut pas conclure
- d) on ne peut pas conclure
- e) plus grande
- f) plus petite

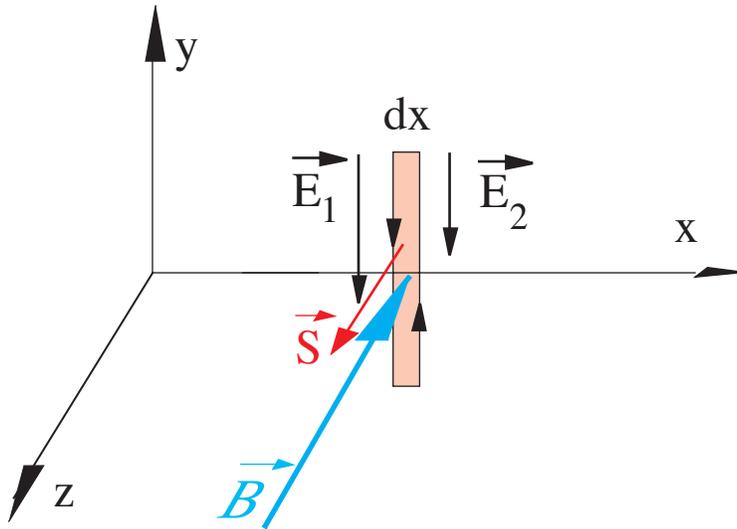
5 décembre 2013

Page 329

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad \text{Loi de Faraday - Lenz}$$

$$\phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} = -B \cdot h \cdot dx \Rightarrow$$

$$-\frac{d\phi_B}{dt} = +\frac{\partial B}{\partial t} \cdot h \cdot dx = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = E_1 \cdot h - E_2 \cdot h > 0$$



Page 333

1)  $\theta_b > \theta_{a1} \Rightarrow n_b < n_a \Rightarrow v_b > v_a$

2)  $\theta_c < \theta_b \Rightarrow n_b < n_a \Rightarrow v_c < v_b$

3)  $\theta_c > \theta_{a2} \Rightarrow n_b < n_a \Rightarrow v_c > v_a$

4) Donc :  $v_b > v_c > v_a$

**6 décembre 2013**

Page 337    a)     $\Delta r = 3 \lambda$     et     $\varphi = 6\pi$   
                 b)     $\Delta r = 2,5 \lambda$     et     $\varphi = 5\pi$

Page 341    a) la figure de diffraction augmente en largeur :  
                 la longueur d'onde de la lumière jaune est plus  
                 élevée que celle de la lumière bleue et  
                 le premier minimum est à  $\sin \theta = \lambda/a$   
                 b) la figure de diffraction augmente en largeur :  
                 reportez-vous à la figure de la page 341.

Page 344    Pour la diffraction, le pouvoir séparateur  
                 diminue (mais il augmente si on réduit le  
                 diamètre de la pupille car on diminue alors les  
                 aberrations dues à l'optique géométrique)