ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Cours Euler

Concours 2008

1er octobre 2008

Partie 1

Durée : 45 minutes

Nombres d'exercices : 15

Instructions : Commence par écrire ton prénom et nom à la place indiquée sur le cahier *et* sur la feuille de réponse. Puis lis les instructions.

1. Matériel autorisé : un stylo et un crayon, un effaceur et une gomme.
   Ne sont pas autorisés : calculatrice, règle, rapporteur, compas, feuilles de papier.
2. Toutes les réponses doivent être cochées au crayon ou à l'encre sur la feuille de réponse.
3. Tu peux utiliser toute place libre dans ce cahier comme brouillon. Si tu manques de place, tu peux encore utiliser les deux dernières pages du cahier qui sont blanches.
4. Tu dois rendre le cahier de données à la fin de la première partie. Garde le formulaire et la feuille de réponse pour la partie 2.
5. Tu as maintenant cinq minutes pour lire le formulaire qui se trouve sous ce cahier. Il te sera utile pour résoudre les exercices. Nous te dirons quand tu peux ouvrir le cahier et commencer les exercices.

Prénom : ....   Nom : ....

Exercice 1

On a deux ensembles X et Y :

$$\begin{aligned} X &= \{12, 13, 5, 8, 24\} \\ Y &= \{5, 24, 59, 6, 8\} \end{aligned}$$

Combien de nombres de l'ensemble X sont aussi dans l'ensemble Y ?

(A) Deux

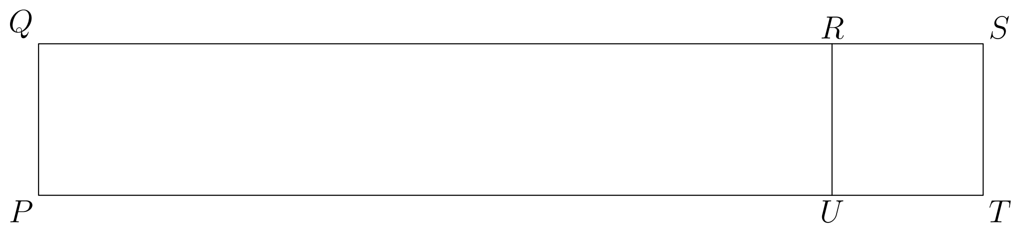
(B) Trois

(C) Cinq

(D) Huit

Exercice 2

Dans la figure ci-dessous, $PQST$ est un rectangle et $URST$ est un carré. $PU = 42\ cm$ et $UT = n\ cm$ où n est un nombre naturel.



Si l'aire de $PQST$ doit être inférieure à 450 cm^2 mais supérieure à 350 cm^2, laquelle des valeurs suivantes est possible pour la longueur de UT ?

(A) 6 cm

(B) 7 cm

(C) 8 cm

(D) 9 cm

Exercice 3

Si $x = b \times (b+5)$, alors $x + 1 =$?

(A) $b^2 + 6$

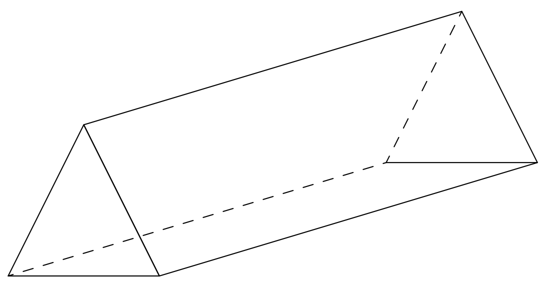
(B) $b^2 + 5 + 1$

(C) $2b + 5b + 1$

(D) $b^2 + 5b + 1$

Exercice 4

Le solide ci-dessous est constitué de faces rectangulaires et triangulaires. Chaque face rectangulaire a une aire de $r\ cm^2$ et chaque face triangulaire une aire de $t\ cm^2$.



Que vaut l'aire totale de la surface du solide ?

(A) $3r + 2t\ cm^2$

(B) $3t + 2r\ cm^2$

(C) $6rt\ cm^2$

(D) $4t + r\ cm^2$

Exercice 5

Sur un kilomètre de route, seulement 200 mètres sont goudronnés.

Quelle proportion de la route n'est pas goudronnée ?

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{200}{1000}$

(C) $\frac{4}{5}$

(D) $\frac{40}{5}$

Exercice 6

Si $0,3 \times x = 1$, que vaut x ?

(A) 0,7

(B) 9

(C) $\frac{10}{3}$

(D) $\frac{3}{10}$

Exercice 7

On écrit les nombres naturels en base dix avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Par exemple, le nombre 347 comporte trois chiffres : 3, 4 et 7.

Combien de nombres naturels à trois chiffres peut-on former si les 3 chiffres sont choisis parmi 4, 5, 7 et 8 (comme par exemple 777, 844 ou 758) ?

(A) 12

(B) 24

(C) 30

(D) 64

Exercice 8

Marc et Maeva se tiennent dos à dos. Ils marchent alors chacun 10 pas en ligne droite. Maeva s'arrête là où elle est arrivée. Marc se retourne et rejoint Maeva en ligne droite. Il lui faut 18 pas pour retrouver Maeva. La longueur des pas de Maeva et de Marc est constante.

Si Marc fait 4 pas, combien de pas doit faire Maeva pour parcourir la même distance ?

(A) 2,5

(B) 5

(C) 6

(D) 8

Exercice 9

La moyenne d'une suite de n nombres $x_1, \ldots, x_n$ se calcule comme la moyenne de tes notes dans une branche. C'est la somme de tous ces nombres divisée par n :

$$\text{moyenne} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

5 personnes écrivent un nombre sur un bout de papier et ce nombre doit être un entier strictement plus grand que 0.

Sachant que la moyenne de ces nombres est de 15, quel est le plus grand nombre qu'elles ont pu écrire ?

(A) 11

(B) 15

(C) 71

(D) 75

Exercice 10

Un nombre entier est dit *pair* si c'est un multiple de 2. On veut trois nombres pairs qui se suivent (comme par exemple 2, 4 et 6 ou 28, 30 et 32) et qui vérifient la propriété suivante :

« La somme de ces trois nombres pairs vaut 228. »

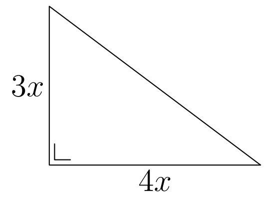
Si n représente le plus petit de ces trois nombres, laquelle des équations suivantes décrit la propriété voulue :

(A) $3n = 228$

(B) $3n + 6 = 228$

(C) $6n = 228$

(D) $3n + 3 = 228$



Exercice 11

Le triangle rectangle ci-dessus a un périmètre de 24 cm. Quelle est la valeur de x ?

(A) 12

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{12}{7}$

(D) 2

Exercice 12

Si $3^x + 3^x + 3^x = 3^6$, que vaut x ?

(A) 2

(B) 3

(C) 5

(D) 6

Exercice 13

Un verre est rempli à $\frac{1}{5}$ avec du jus d'orange. On complète avec un mélange qui contient en quantité égale du jus d'orange, du jus de grapefruit et du jus d'ananas, jusqu'à ce que le verre soit complètement plein.

Quelle est la proportion finale de jus d'orange ?

(A) $\dfrac{1}{8}$

(B) $\dfrac{8}{15}$

(C) $\dfrac{7}{15}$

(D) $\dfrac{1}{3}$

Exercice 14

Le matin, Isabelle a conduit jusqu'à son travail à une vitesse moyenne de 75 kilomètres par heure. Le soir, elle rentre chez elle à une vitesse moyenne de 50 kilomètres par heure.

Si Isabelle a passé une heure au total à conduire, combien de kilomètres a-t-elle parcouru le matin ?

(A) 30 kilomètres

(B) 25 kilomètres

(C) 62,5 kilomètres

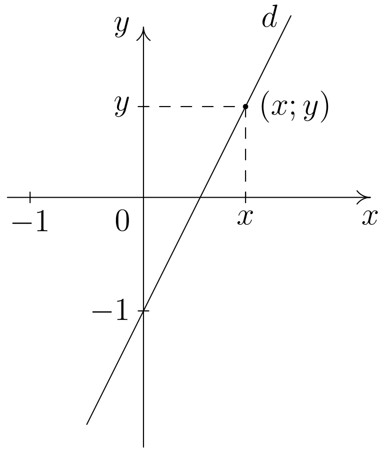
(D) 60 kilomètres

Exercice 15

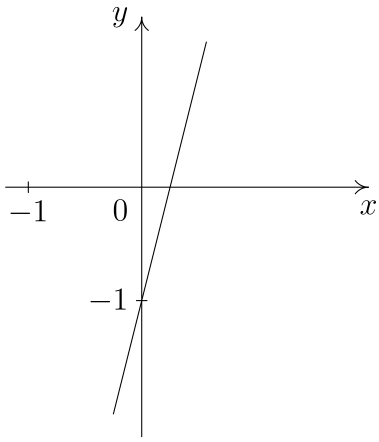
La figure ci-dessous montre le graphe d'une droite d. Les points $(x\,;y)$ du plan qui se trouvent sur la droite d ont tous la même propriété : la coordonnée y est reliée à la cordonnée x par l'équation

$$y = a \times x + b,$$

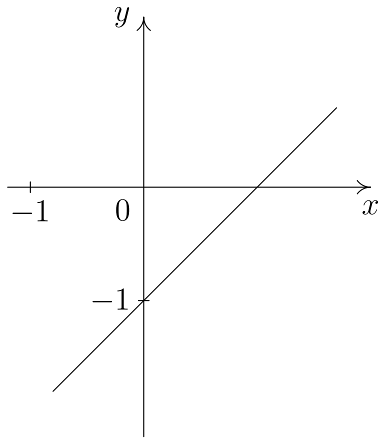
où a et b sont des nombres réels fixés. Le nombre a s'appelle la *pente* de la droite.



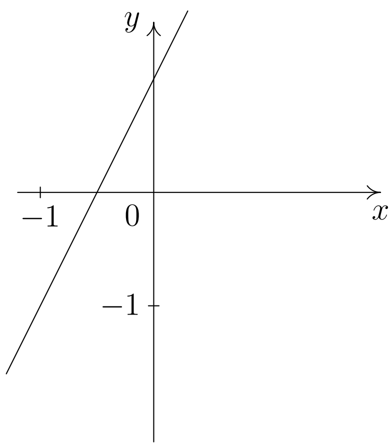
Laquelle des figures suivantes représente le mieux le graphe de la droite $y = 2a \times x + b$?



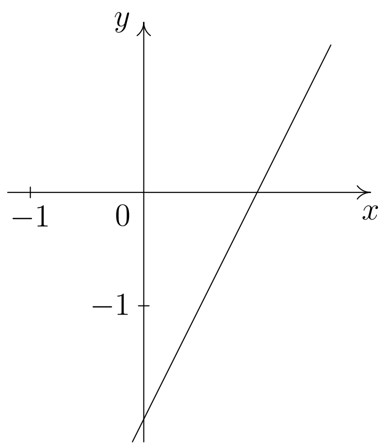
(A)



(B)



(C)



(D)

Cours Euler

Concours 2008

1er octobre 2008

Partie 2

Durée : 45 minutes

Nombres d'exercices : 15

Instructions : Commence par écrire ton prénom et nom à la place indiquée sur le cahier. Puis lis les instructions.

1. Matériel autorisé : un stylo et un crayon, un effaceur et une gomme.
   Ne sont pas autorisés : calculatrice, règle, rapporteur, compas, feuilles de papier.
2. Toutes les réponses doivent être cochées à l'encre ou au crayon sur la feuille de réponse.
3. Tu peux utiliser toute place libre dans ce cahier comme brouillon. Si tu manques de place, tu peux encore utiliser la dernière page du cahier qui est blanche.
4. Tu dois rendre toutes les feuilles à la fin du test.
5. Nous te dirons quand tu peux ouvrir le cahier et commencer les exercices.

Prénom : ....   Nom : ....

Exercice 1

Laetitia a parcouru 50 kilomètres en deux heures et Jessica le double de kilomètres en la moitié du temps. Quelle a été la vitesse moyenne de Jessica en kilomètres par heure ?

(A) 25

(B) 50

(C) 100

(D) 200

Exercice 2

Trois points distincts P, Q et R sont sur une droite d. Quatre points distincts S, T, U et V sont sur une autre droite, parallèle à la droite d.

Combien y a-t-il de droites différentes qui passent par exactement deux de ces 7 points ?

(A) 14

(B) 7

(C) 12

(D) 17

Exercice 3

Dans un magasin, on trouve des boîtes de deux sortes différentes. Pour une sorte, le volume total de 5 boîtes vaut x cm^3, $x > 0$. Pour l'autre sorte, il faut 15 boîtes pour arriver au même volume x.

Quel est le volume d'une boîte en cm^3 pour la sorte de boîtes qui ont le plus grand volume ?

(A) $\frac{x}{5}$

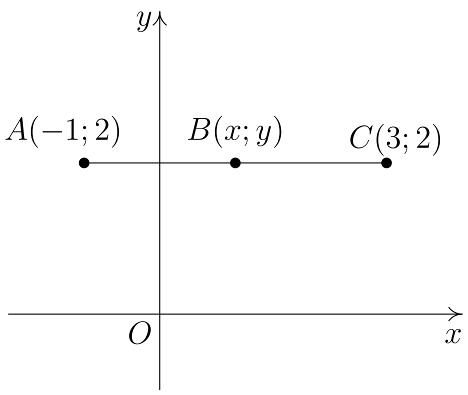
(B) $15x$

(C) $\frac{5}{x}$

(D) $5x$

Exercice 4

Dans la figure ci-dessous, le point B est le milieu du segment AC.



Que vaut x ?

(A) 0,5

(B) 1

(C) 2

(D) 3

Exercice 5

Un magasin vend des cartons de glaces. Chaque carton contient trois sortes de glaces, des glaces vanille, des glaces chocolat et des glaces mocca. Dans chaque carton, $\frac{1}{3}$ des glaces sont à la vanille et il y a 2 fois moins de glaces mocca que de glaces vanille.

Etant donné que le carton contient 18 glaces au chocolat, combien y a-t-il de glaces en tout dans un carton ?

(A) 36

(B) 27

(C) 23

(D) 9

Exercice 6

On écrit ${}_{x}\overset{z}{\triangle}_{y}$ pour l'opération ${}_{x}\overset{z}{\triangle}_{y} = z^y - x \times z$.

Que vaut ${}_{3}\overset{3}{\triangle}_{3}$?

(A) 0

(B) 9

(C) 3

(D) 18

Exercice 7

Si tous les hommes de la famille Dujardin mesurent moins de 1 mètre 80, laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

(A) Tous les hommes de moins de 1 mètre 80 font partie de la famille Dujardin.

(B) Aucun homme de plus de 1 mètre 80 ne fait partie de la famille Dujardin.

(C) Tous les hommes qui ne font pas partie de la famille Dujardin mesurent plus de 1 mètre 80.

(D) Il existe un homme de la famille Dujardin qui mesure plus de 1 mètre 80.

Exercice 8

Considérer la fonction $f(x) = x^2 + 32$.

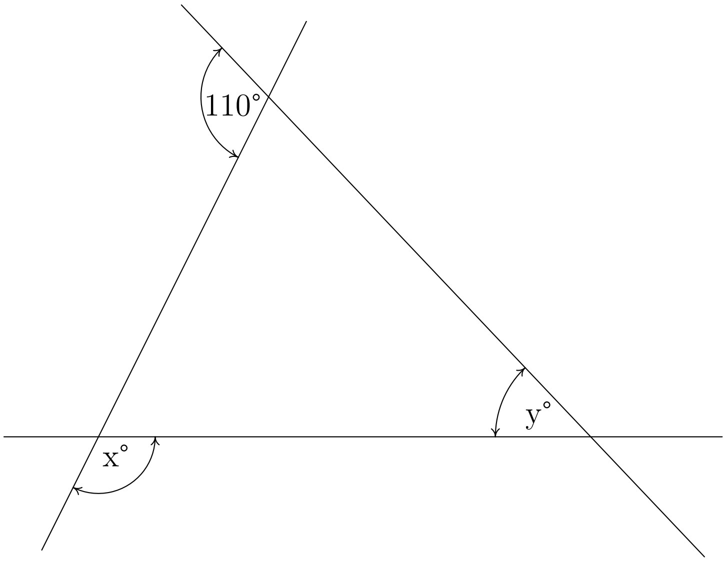
Si m est un nombre positif tel que $f(2 \times m) = 2 \times f(m)$, que vaut m ?

(A) Un tel m n'existe pas.

(B) 0

(C) -4

(D) 4



Exercice 9

Dans la figure ci-dessus, $x^\circ - y^\circ = \ ?$

(A) 250°

(B) 110°

(C) 180°

(D) 70°

Exercice 10

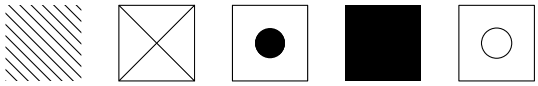
Si $k \times (3x+5) \times (x-2) = 0$ et $x > 2$, quelle est la valeur de k ?

(A) 0

(B) $-\frac{5}{3}$

(C) 2

(D) $\frac{3}{5}$



Exercice 11

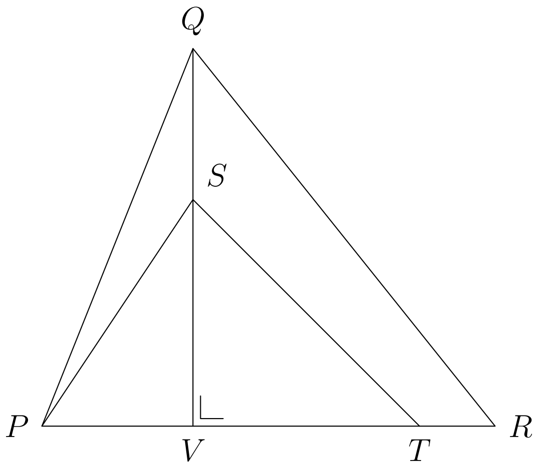
Si les cinq cartes ci-dessus sont placées sur une ligne et que la carte noire ne doit se trouver ni en première ni en dernière position, combien y a-t-il d'arrangements différents possibles ?

(A) 12

(B) 15

(C) 72

(D) 118



Exercice 12

Dans la figure ci-dessus, on a les proportions suivantes :

$$\frac{QS}{QV} = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{PT}{PR} = \frac{3}{4}.$$

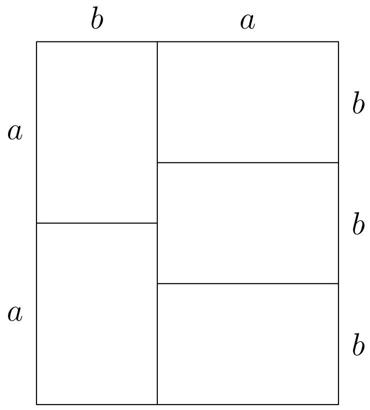
Que vaut le rapport $\dfrac{\text{aire}\,\triangle\, PST}{\text{aire}\,\triangle\, PQR}$?

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{3}$

(D) 2



Exercice 13

Le motif ci-dessus est composé de rectangles de longueur a et de largeur b.

Avec ce motif, on veut couvrir complètement une surface rectangulaire de longueur $20 \times a$ et de largeur $18 \times a$.

Combien de rectangles de dimension a sur b sont nécessaires ?

(A) 540

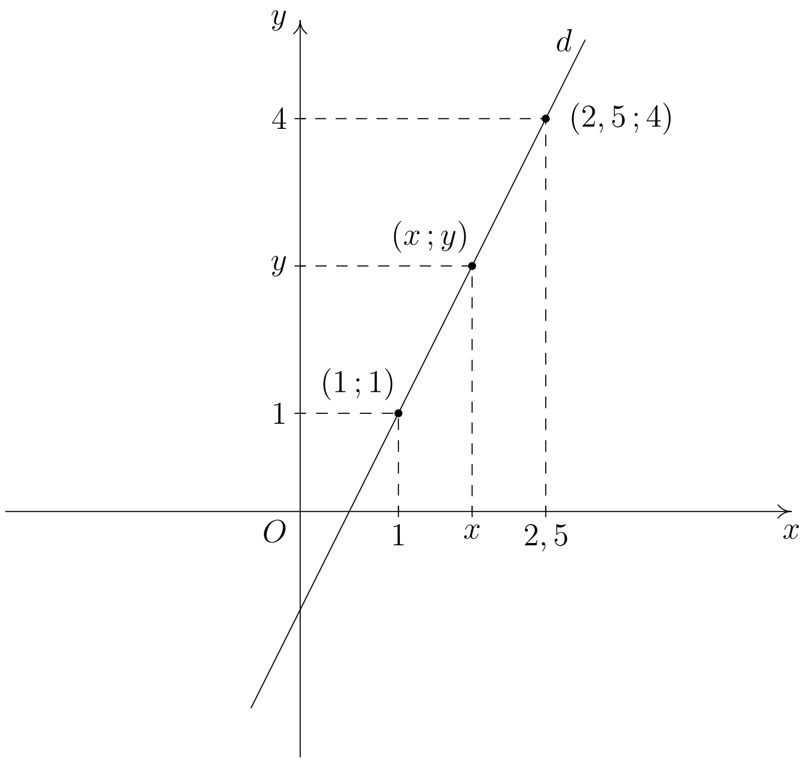
(B) 108

(C) 1080

(D) 900

Exercice 14

La droite d ci-dessous passe par les points $(1\,;1)$ et $(2,5\,;4)$ du plan Oxy.



Les points $(x\,;y)$ du plan qui se trouvent sur la droite d ont tous la même propriété : la coordonnée y est reliée à la cordonnée x par l'équation

$$y = a \times x + b,$$

où a et b sont des nombres réels fixés. Le nombre a s'appelle la *pente* de la droite.

Que vaut a ?

(A) -1

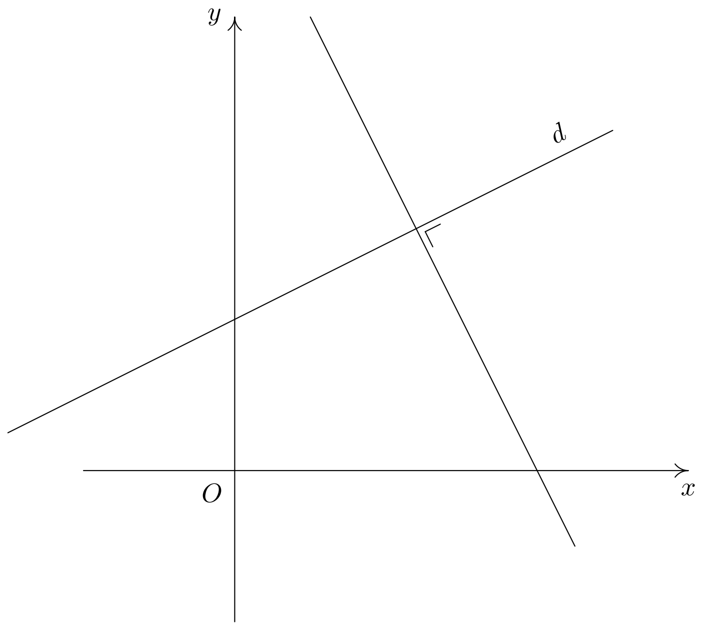
(B) 2

(C) $\dfrac{1}{2}$

(D) 3

Exercice 15

Considère une droite d dans le plan $0xy$ qui n'est ni verticale, ni horizontale et qui a une pente de valeur m.



Que vaut la pente de la droite perpendiculaire à cette droite ?

(A) $-\dfrac{1}{m}$

(B) $-m$

(C) $\dfrac{1}{m}$

(D) $m-1$

Formulaire

1 Algèbre

1. Les *nombres naturels* sont les nombres appartenant à l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
2. Les *nombres entiers* sont les nombres appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
3. Les *nombres réels* sont tous les nombres à virgules possibles. L'ensemble des nombres réels est noté par le symbole $\mathbb{R}$.
4. La multiplication de deux nombres x et y est notée $x \cdot y$.
5. Si x et y sont deux nombres réels, on écrit $x \leq y$ pour « x est plus petit ou égal à y », et $x \geq y$ pour « x est plus grand ou égal à y ».
6. Si x et y sont deux nombres réels, on écrit $x < y$ pour « x est strictement plus petit que y », et $x > y$ pour « x est strictement plus grand que y ».
7. Si p, q sont des nombres entiers, on écrit $\dfrac{p}{q}$ pour le nombre qui est le résultat de la division de p par q, c'est-à-dire $\dfrac{p}{q} = p : q$.

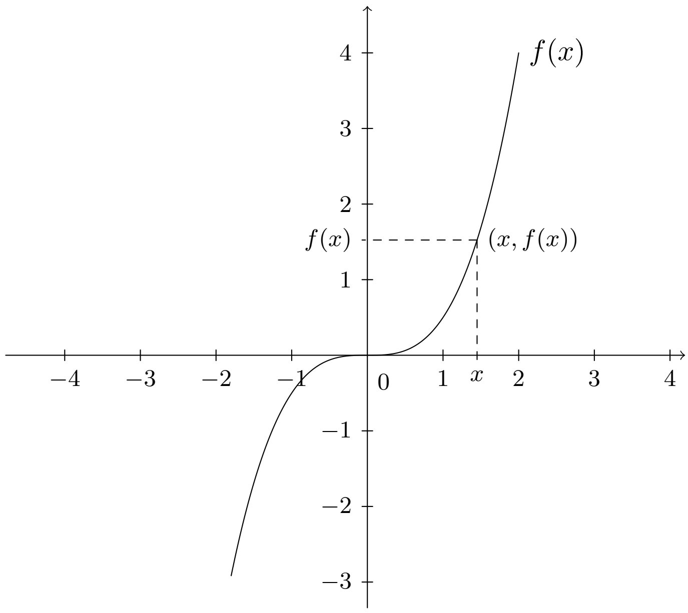
   Exemple : $\dfrac{2}{5} = 0.4$ et se dit « deux cinquièmes ».
8. Un *diviseur* d'un nombre naturel p est un nombre naturel q tel que $\dfrac{p}{q}$ est aussi un nombre naturel.

   Exemple : 3 est un diviseur de 6, car $\dfrac{6}{3} = 2$, qui est un nombre naturel.
9. Un *nombre premier* est un nombre naturel qui a exactement deux diviseurs. Ces diviseurs seront 1 et le nombre même.

   Exemples : 5 est un nombre premier car ses diviseurs sont exactement 1 et 5. Par contre, 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur, lui-même.
10. Si x est un nombre réel et k un nombre naturel non nul, alors $x^k = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{k \text{ fois}}$. Dans le cas où $k = 2$, nous appelons x^2 *le carré* de x.

    Exemple : $x^3 = x \cdot x \cdot x$.
11. Une *fonction* f (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est une correspondance qui à chaque nombre réel x fait correspondre un nombre réel $f(x)$.
12. Le *graphe d'une fonction* f (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) consiste en un système d'axes dans lequel on a mis en évidence tous les points (x, y) tels que $y = f(x)$.

    Exemple : voici une portion du graphe de la fonction f qui à tout nombre réel x fait correspondre le nombre $f(x) = \dfrac{x^3}{2}$



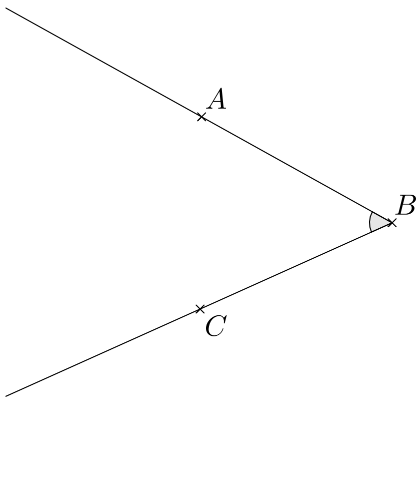
13. Un *pourcentage* est une façon d'exprimer un nombre comme une fraction de cent, généralement en utilisant le signe %.

    Exemple : 10% de 100 vaut 10 ($= 100 \cdot \dfrac{10}{100}$), ou encore 20% de 70 est 14 ($= 70 \cdot \dfrac{20}{100}$).

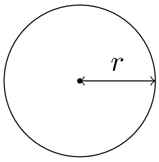
Remarque : Si rien n'est précisé, tous les nombres dans les exercices sont réels.

2 Géométrie

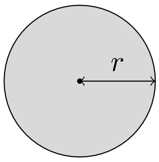
1. Si A et B sont deux points dans le plan, on note $\overline{AB}$ la longueur du segment de droite compris entre les points A et B.
2. La somme des angles d'un triangle vaut 180°.
3. Un triangle est *isocèle* s'il possède deux côtés de même longueur ou, de manière équivalente, deux angles égaux. Un triangle est *équilatéral* s'il possède trois côtés de même longueur ou, de manière équivalente, trois angles égaux.
4. Etant donnés trois points distincts A, B, C, on note $\widehat{ABC}$ l'angle de sommet B qu'ils forment.



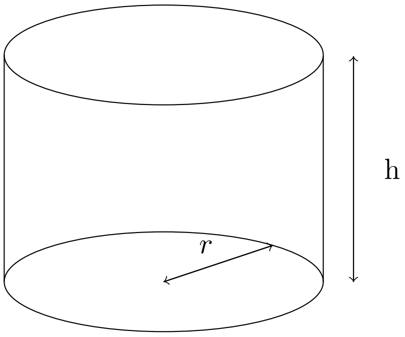
5. On appelle *circonférence* d'un cercle sa longueur. La circonférence d'un cercle de rayon r vaut $2 \cdot \pi \cdot r$, où $\pi \cong 3.1416$.



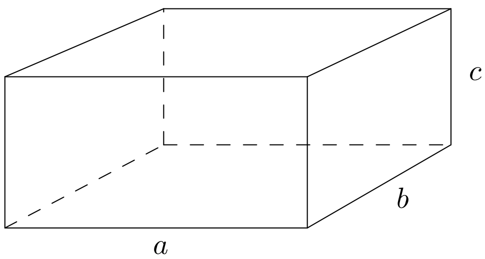
6. L'aire d'un disque de rayon r vaut $\pi \cdot r^2$.



7. Le volume V d'un cylindre de hauteur h et de base un disque de rayons r est le produit de l'aire de sa base par sa hauteur, soit $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.



8. Le volume V d'une boîte rectangulaire (parallélépipède rectangle) de côtés a, b, c vaut $V = a \cdot b \cdot c$.



Remarque : Les dessins du concours ne sont en général pas à l'échelle.