ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Cours Euler

Concours 2009

3 juin 2009

Partie 1

Durée : 45 minutes

Nombres d'exercices : 20

Instructions : Commence par écrire ton prénom et nom à la place indiquée sur le fascicule *et* sur la feuille de réponse. Puis lis les instructions.

1. Matériel autorisé : un stylo et un crayon, un effaceur et une gomme.
   Ne sont pas autorisés : calculatrice, règle, rapporteur, compas, feuilles de papier.
2. Toutes les réponses doivent être notées au crayon ou à l'encre sur la feuille de réponse en suivant les indications données.
3. Tu peux utiliser toute place libre dans ce fascicule comme brouillon. Si tu manques de place, tu peux encore utiliser les deux dernières pages du fascicule qui sont blanches.
4. Tu dois rendre la feuille de réponse à la fin de la première partie. Garde le formulaire pour la deuxième.
5. Nous te dirons quand tu peux ouvrir le fascicule et commencer les exercices.

Prénom : .... Nom : ....

Exercice 1

Apolline, Florent et Charlotte choisissent chacun un nombre dans l'ensemble $\{14, 17, 21\}$. Ces trois enfants disent toujours **des mensonges**, et chacun affirme :

Apolline :	7 n'est pas un diviseur de mon nombre.
Florent :	Mon nombre est pair.
Charlotte :	Mon nombre est premier.

Sachant que tous les nombres choisis sont différents, laquelle des affirmations suivantes est sûrement vraie ?

(A) Florent a choisis un nombre premier.

(B) 3 est un diviseur du nombre choisi par Charlotte.

(C) Apolline n'a pas choisi 21.

(D) Apolline a choisit un nombre premier.

Exercice 2

Soit x un nombre naturel. Lorsqu'il existe un nombre naturel q tel que $q^2 = x$, on appelle q la racine carrée de x, et on note $q = \sqrt{x}$. Une seule parmi les affirmations suivantes est **fausse**, laquelle ?

(A) $\sqrt{16} = 4$

(B) Il n'y a pas de nombre naturel q tel que $q^2 = 2$.

(C) Pour tout nombre naturel x, nous avons $\sqrt{x^2} = x$.

(D) Pour tout nombre naturel x et y, nous avons $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x + y}$.

Exercice 3

Parmi les élèves d'un collège il y a quelqu'un qui joue au football et qui est végétarien, mais aucun joueur de foot n'est en sixième année. Laquelle des affirmations suivantes est forcément vraie ?

(A) Il y a un végétarien en sixième année.

(B) Il n'y a pas de végétariens en sixième année.

(C) Il y a un végétarien qui n'est pas en sixième.

(D) Tous les végétariens sont en sixième.

Exercice 4

Si $n + 5 \leq 10$ et $n + 8 \geq 10$, lequel des nombre suivants ne peut **pas** être égal à n ?

(A) 3

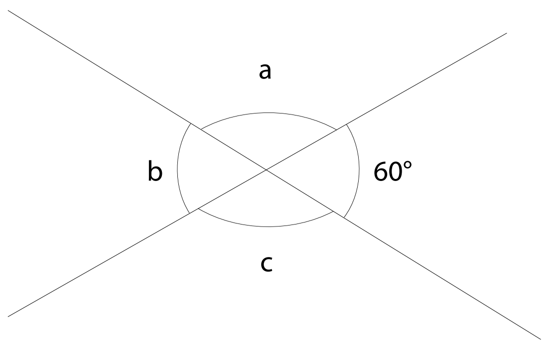
(B) 4

(C) 5

(D) 6

Exercice 5

Considérons la situation suivante,



et les affirmations :

$$\begin{array}{ll} (I) & a \neq c \\ (II) & a = 2 \times b \\ (III) & a + 60 = b + c. \end{array}$$

Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

(A) (I) et (II) sont fausses.

(B) (I),(II) et (III) sont vraies.

(C) Seulement (III) est vraie.

(D) (II) et (III) sont vraies.

Exercice 6

Si 2 est un diviseur de $n + 5$, alors :

(A) 5 doit être un diviseur de n ;

(B) n est pair ;

(C) n est impair ;

(D) n est égal à zéro.

Exercice 7

On choisit trois nombres **différents**, un dans chacun des ensembles suivants :

$$\{9, 4, 5\}$$
$$\{7, 5, 9\}$$
$$\{6, 9, 7\}$$

Quelle est la plus grande somme possible de ces trois valeurs ?

(A) 27

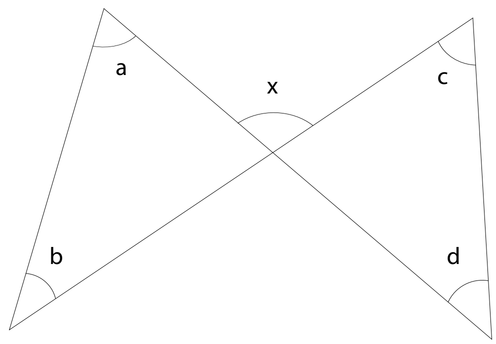
(B) 22

(C) 21

(D) 18

Exercice 8

Dans le dessin suivant



Quelle est la somme des angles a, b, c et d en fonction de x ?

(A) $180 - x$

(B) $2x$

(C) x

(D) $180 - 2x$

Exercice 9

Soit S l'ensemble des nombres naturels n qui s'écrivent $n = 4 \times a + 7$, où a est un nombre naturel tel que $0 \leq a \leq 4$. Lequel des nombres suivants est dans S ?

(A) 13

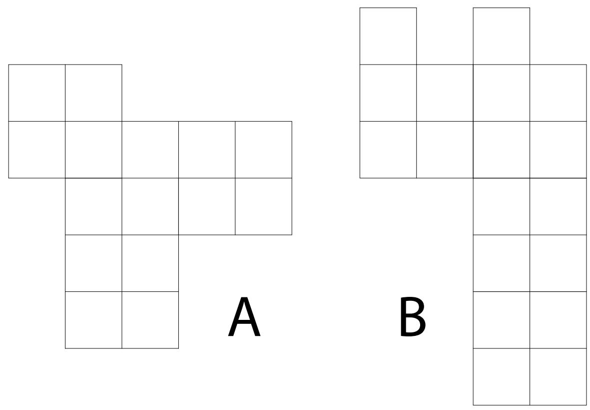
(B) 27

(C) 21

(D) 19

Exercice 10

Dans la figure suivante tous les petits carrés ont la même aire.



Si la figure A a une aire de x cm^2, quel est l'aire de la figure B ?

(A) $6 \times x \div 5$

(B) $5 \times x \div 6$

(C) $15 \times 18 \div x$

(D) $18 \times x \div 5$

Exercice 11

Si n est un nombre naturel, lequel des nombres naturels suivants est forcément pair et le double d'un nombre naturel impair ?

(A) $2 \times n$

(B) $4 \times n$

(C) $4 \times n + 2$

(D) $2 \times n + 2$

Exercice 12

La suite de Fibonacci est une suite de nombres naturels $F_0, F_1, F_2, F_3, \ldots$ définie comme suit. Les deux premiers termes sont $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. Chacun des termes suivants est la somme des deux termes qui le précède. Par exemple :

$$\begin{aligned} F_2 &= F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1 \\ F_3 &= F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2 \\ F_4 &= F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Donc la suite commence par $0, 1, 1, 2, 3, \ldots$. Quel est le terme F_7 de la suite de Fibonacci ?

(A) 6

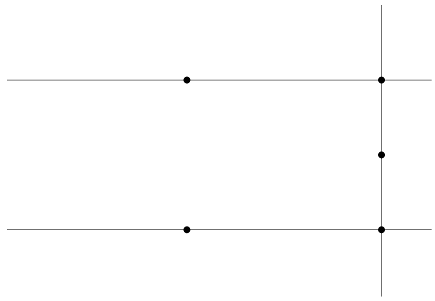
(B) 13

(C) 15

(D) 16

Exercice 13

Considérer la situation suivante :



Combien de droites différentes passent par au moins deux de ces cinq points ?

(A) 6

(B) 7

(C) 8

(D) 9

Exercice 14

Nous avons cinq films en DVD dont trois sont dirigés par Quentin Tarantino et deux par Oliver Stone. Combien de façons y a-t-il de les arranger sur une étagère sachant que les films avec le même directeur doivent être côte-à-côte ?

(A) 12

(B) 24

(C) 42

(D) 68

Exercice 15

Dans une classe le nombre de garçons est le double du nombre de filles. Si tous les élèves de la classe forment une queue avec une fille à la première place, laquelle des affirmations suivantes est sûrement vraie ?

(A) Au moins deux filles sont l'une derrière l'autre.

(B) Il ne peut pas y avoir deux filles l'une derrière l'autre.

(C) Au moins deux garçons sont l'un derrière l'autre.

(D) Il ne peut pas y avoir deux garçons l'un derrière l'autre.

Exercice 16

Si $a \times k = a$ pour tout nombre naturel a, alors :

(A) $k = a$

(B) $k = 1$

(C) $k = 0$

(D) $k = a^2$

Exercice 17

Etant donnés quatre nombres naturels a, b, c et d nous définissons une opération ${}^{d}_{a}\biguplus^{c}_{b}$ par

$$ {}^{d}_{a}\biguplus^{c}_{b} = 3^{a\times d} + 2 \times c \times b. $$

Combien vaut ${}^{1}_{2}\biguplus^{4}_{3}$?

(A) 33

(B) 108

(C) 24

(D) 76

Exercice 18

Si $x = 2 \times k \times (k + 5) - 1$ alors $x + 2 =?$:

(A) $2 \times k^2 + 10$

(B) $2 \times k^2 + 10 \times k - 1$

(C) $k^2 + 10 \times k + 1$

(D) $2 \times k^2 + 10 \times k + 1$

Exercice 19

Si l'aire d'un carré vaut 16 cm^2, quelle est la plus petite distance entre le centre du carré et un point sur le bord du carré ?

(A) 1 cm

(B) 2 cm

(C) 4 cm

(D) 8 cm

Exercice 20

Laquelle des égalités suivantes est vraie pour tout x ?

(A) $x^n \times x^m = x^{n \times m}$

(B) $x^n + x^m = x^{n+m}$

(C) $x^n + x^m = x^{n \times m}$

(D) $x^n \times x^m = x^{n+m}$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Cours Euler

Concours 2009

3 juin 2009

Partie 2

Durée : 45 minutes

Nombres d'exercices : 20

Instructions : Commence par écrire ton prénom et nom à la place indiquée sur le fascicule et sur la feuille de réponse. Puis lis les instructions.

1. Matériel autorisé : un stylo et un crayon, un effaceur et une gomme.
   Ne sont pas autorisés : calculatrice, règle, rapporteur, compas, feuilles de papier.
2. Toutes les réponses doivent être notées au crayon ou à l'encre sur la feuille de réponse en suivant les indications données.
3. Tu peux utiliser toute place libre dans ce fascicule comme brouillon. Si tu manques de place, tu peux encore utiliser la dernière page du fascicule qui est blanche.
4. Tu dois rendre la feuille de réponse à la fin du test.
5. Nous te dirons quand tu peux ouvrir le fascicule et commencer les exercices.

Prénom : .... Nom : ....

Exercice 1

Si l'aire d'un carré est quatre fois l'aire d'un autre carré, alors :

(A) Un côté du grand carré est huit fois plus long qu'un côté du petit carré.

(B) Un côté du grand carré est quatre fois plus long qu'un côté du petit carré.

(C) Un côté du grand carré est deux fois plus long qu'un côté du petit carré.

(D) Une diagonale du grand carré est quatre fois plus longue qu'une diagonale du petit carré.

Exercice 2

Si tous les défenseurs de l'équipe Suisse de football ont moins de 31 ans, laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

(A) Tous les hommes de moins de 31 ans sont défenseurs de l'équipe de Suisse.

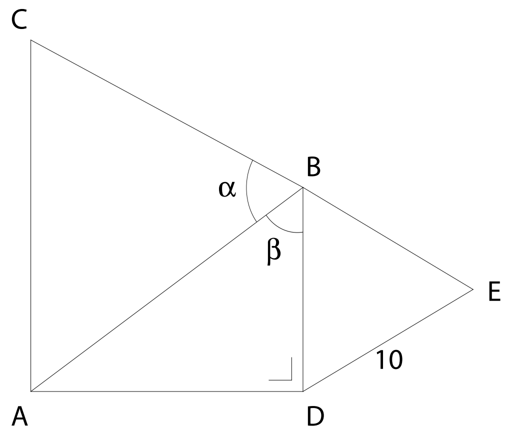
(B) Il y a un joueur de l'équipe de Suisse qui a moins de 35 ans.

(C) Aucun homme de moins de 32 ans ne fait partie de l'équipe de Suisse.

(D) Tous les hommes qui ne jouent pas dans l'équipe de Suisse ont plus de 31 ans.

Exercice 3

Considérons la situation suivante



où les triangles ABC et BDE sont équilatéraux, et ABD est rectangle. Sachant que l'angle α est égal à l'angle β et que le segment DE a longueur 10 cm, combien vaut le périmètre du triangle ABC ?

(A) 30 cm

(B) 45 cm

(C) 60 cm

(D) 90 cm

Exercice 4

Combien de nombres naturels avec 9 comme troisième chiffre y a-t-il entre 200 et 700 ?

(A) 45

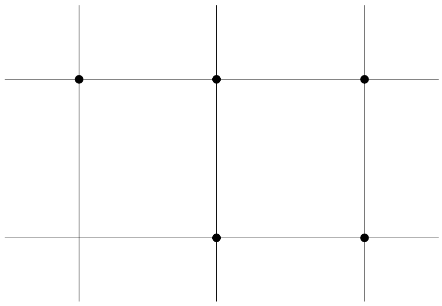
(B) 50

(C) 54

(D) 60

Exercice 5

Combien de triangles distincts ayant comme sommets les points marqués sur la grille suivante y a-t-il ?



(A) 7

(B) 8

(C) 9

(D) 10

Exercice 6

Dans une école il y a k classes de n élèves chacune. Un total de p crayons est distribué parmi tous les élèves, de telle manière que chacun reçoit le même nombre de crayons. Combien de crayons il y aura-t-il par élève ?

(A) $\frac{p}{k\times n}$

(B) $\frac{k\times n}{p}$

(C) $\frac{k\times p}{n}$

(D) $\frac{n\times p}{k}$

Exercice 7

Considérer l'équation $(x+1) \times (x-1) = 0$. Laquelle des affirmations suivantes est **fausse** ?

(A) $x = 1$ satisfait l'équation.

(B) $x = -1$ satisfait l'équation.

(C) $x = 0$ ne satisfait pas l'équation.

(D) $x = 1$ est la seule solution possible de l'équation.

Exercice 8

On rappelle que la réunion de deux ensembles X et Y est l'ensemble qui contient les éléments qui se trouvent soit dans X soit dans Y. Etant donné un objet $\star$, on note $\{\star\}$ l'ensemble qui contient l'objet $\star$. Lequel parmi les ensembles suivants est la réunion de $\{\star\}$ et de $\{\star, \{\star\}\}$?

(A) $\{\{\star\}\}$

(B) $\{\star, \{\star\}\}$

(C) $\{\star\}$

(D) $\{\{\star\}, \{\star\}\}$

Exercice 9

On rappelle que la somme de deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ est définie par

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d}.$$

Quel est le résultat de $\frac{3}{2} + \frac{4}{3}$?

(A) $\frac{17}{6}$

(B) $\frac{7}{5}$

(C) $\frac{12}{5}$

(D) $\frac{18}{6}$

Exercice 10

Pendant la nuit et dans l'obscurité la plus totale, je vais à la cuisine pour manger des chocolats. Je sais qu'il y a l chocolats au lait, n chocolats noirs et b chocolats blancs. Je vais arrêter de manger des chocolats exactement lorsque j'en aurai mangé deux différents. Combien de chocolats mangerais-je au maximum ?

(A) $1+$ le plus petit nombre entre l, n, b

(B) $1+$ le plus grand nombre entre l, n, b

(C) $l + n + b$

(D) $n + 1$

Exercice 11

Pour tout nombre naturel n différent de zéro on définit

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n,$$

le produit des n premiers naturels différents de zéro. Combien vaut $\frac{12!}{10!}$?

(A) 132

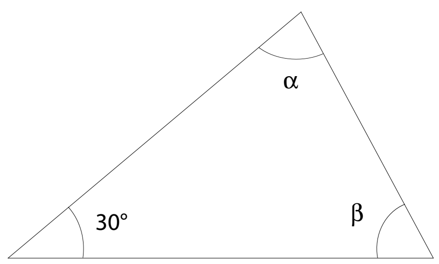
(B) 247

(C) 396

(D) 5128

Exercice 12

Considérons le triangle



Laquelle parmi les réponses suivantes est sûrement **fausse** ?

(A) $\alpha = 60$ et $\beta = 90$

(B) $\alpha = 40$ et $\beta = 110$

(C) $\alpha = 30$ et $\beta = 130$

(D) $\alpha = 25$ et $\beta = 125$

Exercice 13

Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

(A) Tout nombre impair est premier.

(B) Tout nombre premier est impair.

(C) 1 est premier.

(D) Il existe un nombre premier pair.

Exercice 14

Soit x le nombre d'hommes dans une salle de cinéma et y le nombre de femmes dans la même salle. Laquelle parmi les équations suivantes exprime la phrase « Le double du nombre d'hommes dans la salle, divisé par le nombre de femmes, est plus petit ou égal à la somme de 2 et du tiers du produit du nombre d'hommes et du nombre de femmes » :

(A) $\frac{2\times x}{y} \leq 2 + \frac{1}{3} \times x \times y$

(B) $2 \times \frac{y}{x} \geq 2 + \frac{1}{3} \times x \times y$

(C) $2 \times \frac{x}{y} \leq \frac{1}{3} \times (2 + x \times y)$

(D) $2 \times \frac{x}{y} \leq \frac{2+1}{3} \times x \times y$

Exercice 15

Combien y a-t-il de nombres naturels entre 0 et 100 qui **ne sont pas** le carré d'un nombre naturel ?

(A) 0

(B) 28

(C) 57

(D) 90

Exercice 16

Si $\frac{x}{7} = k$, avec k nombre naturel, laquelle des valeurs suivantes est possible pour x ?

(A) $x = 32,5$

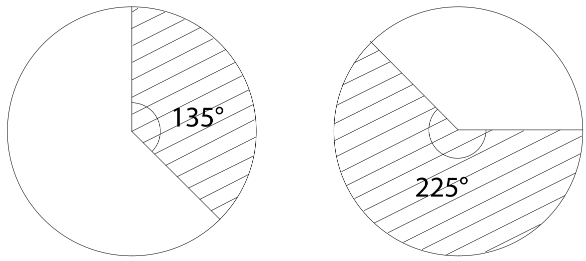
(B) $x = 28$

(C) $x = 41$

(D) $x = 15$

Exercice 17

Dans la figure suivante



l'aire de la partie marquée du cercle de gauche vaut 270 cm^2. Combien vaut l'aire de la partie marquée du cercle de droite ? (Les deux cercles ont le même diamètre).

(A) 162 cm^2

(B) 390 cm^2

(C) 450 cm^2

(D) 540 cm^2

Exercice 18

Si $2^{x+1} \times 2^{x-1} + 2^{2x} = 2^5$ alors :

(A) $x = 1$

(B) $x = 2$

(C) $x = 3$

(D) $x = 4$

Exercice 19

On veut deux nombres impairs qui se suivent (comme par exemple $1, 3$ ou $43, 45$) et qui vérifient :

« Le produit de ces deux nombres vaut 1023 ».

Si n est le plus petit de ces deux nombres, laquelle des équations suivantes représente la propriété voulue ?

(A) $n^2 + 2 \times n + 1 = 1023$

(B) $n^2 + 2 \times n = 1023$

(C) $n^2 = 1023$

(D) $n = 1023$

Exercice 20

Mathieu a noté le numéro de téléphone d'un ami sur un bout de papier, mais il a accidentellement renversé une boisson dessus. Parmi les dix chiffres du numéro, les sept premiers sont heureusement encore lisibles, le huitième est partiellement effacé mais on arrive à comprendre que cela doit être soit un deux, soit un trois. Les autres chiffres sont complètement effacés...
Si Mathieu essaie tous les nombres de téléphone possibles, combien de fois devra-t-il téléphoner au maximum pour réussir à joindre son ami ?

(A) 50

(B) 100

(C) 200

(D) 400

Formulaire

1 Algèbre

1. Les *nombres naturels* sont les nombres appartenant à l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
2. Les *nombres entiers* sont les nombres appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
3. Les *nombres réels* sont tous les nombres à virgules possibles. L'ensemble des nombres réels est noté par le symbole $\mathbb{R}$.
4. La multiplication de deux nombres x et y est notée $x \cdot y$.
5. Si x et y sont deux nombres réels, on écrit $x \leq y$ pour « x est plus petit ou égal à y », et $x \geq y$ pour « x est plus grand ou égal à y ».
6. Si x et y sont deux nombres réels, on écrit $x < y$ pour « x est strictement plus petit que y », et $x > y$ pour « x est strictement plus grand que y ».
7. Si p, q sont des nombres entiers, on écrit $\frac{p}{q}$ pour le nombre qui est le résultat de la division de p par q, c'est-à-dire $\frac{p}{q} = p : q$.

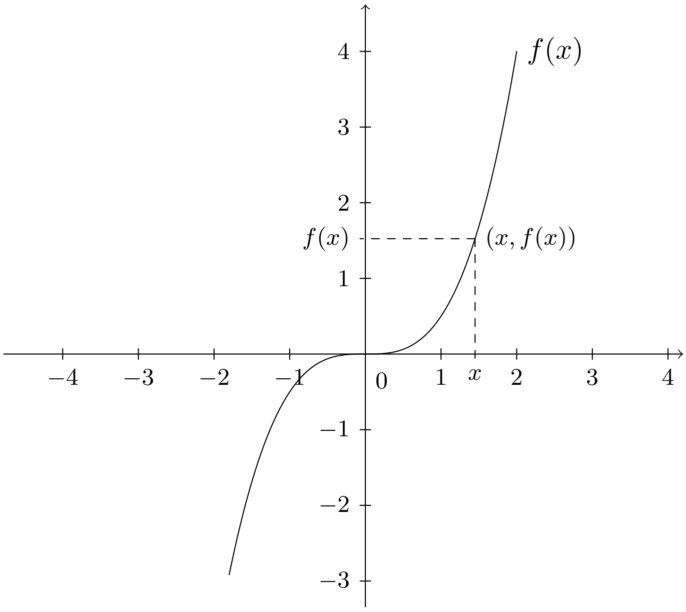
   Exemple : $\frac{2}{5} = 0.4$ et se dit « deux cinquièmes ».
8. Un *diviseur* d'un nombre naturel p est un nombre naturel q tel que $\frac{p}{q}$ est aussi un nombre naturel.

   Exemple : 3 est un diviseur de 6, car $\frac{6}{3} = 2$, qui est un nombre naturel.
9. Un *nombre premier* est un nombre naturel qui a exactement deux diviseurs. Ces diviseurs seront 1 et le nombre même.

   Exemples : 5 est un nombre premier car ses diviseurs sont exactement 1 et 5. Par contre, 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur, lui-même.
10. Si x est un nombre réel et k un nombre naturel non nul, alors $x^k = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{k \text{ fois}}$. Dans le cas où $k = 2$, nous appelons x^2 *le carré* de x.

    Exemple : $x^3 = x \cdot x \cdot x$.
11. Une *fonction* f (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est une correspondance qui à chaque nombre réel x fait correspondre un nombre réel $f(x)$.
12. Le *graphe d'une fonction* f (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) consiste en un système d'axes dans lequel on a mis en évidence tous les points (x, y) tels que $y = f(x)$.

    Exemple : voici une portion du graphe de la fonction f qui à tout nombre réel x fait correspondre le nombre $f(x) = \dfrac{x^3}{2}$



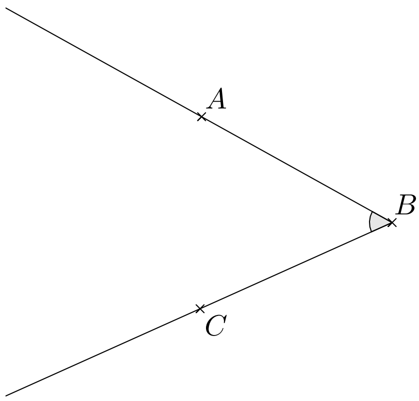
13. Un *pourcentage* est une façon d'exprimer un nombre comme une fraction de cent, généralement en utilisant le signe %.

    Exemple : 10% de 100 vaut 10 ($= 100 \cdot \dfrac{10}{100}$), ou encore 20% de 70 est 14 ($= 70 \cdot \dfrac{20}{100}$).

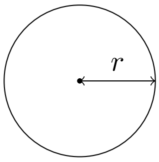
Remarque : Si rien n'est précisé, tous les nombres dans les exercices sont réels.

2 Géométrie

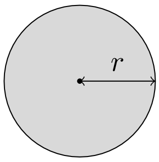
1. Si A et B sont deux points dans le plan, on note $\overline{AB}$ la longueur du segment de droite compris entre les points A et B.
2. La somme des angles d'un triangle vaut 180° .
3. Un triangle est *isocèle* s'il possède deux côtés de même longueur ou, de manière équivalente, deux angles égaux. Un triangle est *équilatéral* s'il possède trois côtés de même longueur ou, de manière équivalente, trois angles égaux.
4. Etant donnés trois points distincts A, B, C, on note $\widehat{ABC}$ l'angle de sommet B qu'ils forment.



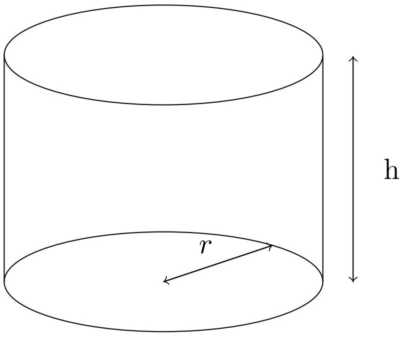
5. On appelle *circonférence* d'un cercle sa longueur. La circonférence d'un cercle de rayon r vaut $2 \cdot \pi \cdot r$, où $\pi \cong 3.1416$.



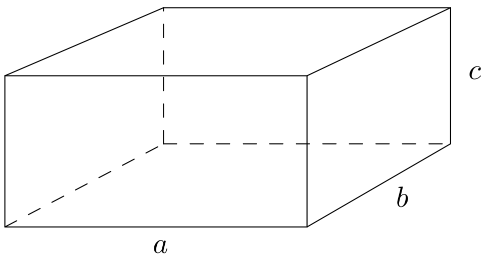
6. L'aire d'un disque de rayon r vaut $\pi \cdot r^2$.



7. Le volume V d'un cylindre de hauteur h et de base un disque de rayons r est le produit de l'aire de sa base par sa hauteur, soit $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.



8. Le volume V d'une boîte rectangulaire (parallélépipède rectangle) de côtés a, b, c vaut $V = a \cdot b \cdot c$.



Remarque : Les dessins du concours ne sont en général pas à l'échelle.