Chapitre 16

Démonstration de la règle de l'Hospital

Théorème de Cauchy

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On considère deux fonctions dérivables $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose de plus que $g(b) - g(a) \neq 0$ et que g ne s'annule pas sur $]a, b[$.
Alors, il existe (au moins) un nombre ξ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Remarque

Ce n'est pas une application directe du théorème des accroissements finis car même si on peut transformer le terme de gauche de la manière suivante,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}}$$

on ne peut pas en déduire le théorème de Cauchy puisqu'on aurait à priori pas le même ξ comme argument de f' et de g'.

Règle de l'Hospital (première partie)

On suppose qu'il existe un voisinage V de $a \in \mathbb{R}$ et deux fonctions f et g telles que

1. f et g sont dérivables sur $V \setminus \{a\}$.
2. g et g' ne s'annulent pas sur $V \setminus \{a\}$.
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

De plus, on suppose que la limite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe. Alors, on a : $\boxed{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$

Remarques

1. La preuve de cette règle nécessite la connaissance du théorème de Cauchy.
2. La règle de l'Hospital fonctionne aussi lorsqu'on remplace a par $+\infty$ ou $-\infty$. La preuve reste rigoureusement la même. Ce sont les voisinages qui changent.

Preuve du théorème de Cauchy

La preuve est très similaire, il suffit de contempler la fonction

$$F(x) = \big(g(b) - g(a)\big)\big(f(b) - f(x)\big) - \big(g(b) - g(x)\big)\big(f(b) - f(a)\big)$$

Pour mieux visualiser cette fonction, on peut aussi l'écrire comme un déterminant

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(b) - f(x) & f(b) - f(a) \\ g(b) - g(x) & g(b) - g(a) \end{vmatrix}$$

Cette fonction est dérivable sur $[a, b]$ et on a $F(b) = F(a) = 0$.
Par le théorème de Rolle (appliqué à la fonction F), il existe un nombre ξ entre a et b tel que

$$F'(\xi) = 0$$

Or, en dérivant F, on trouve

$$F'(x) = -(g(b) - g(a))f'(x) + g'(x)(f(b) - f(a))$$

Donc

$$0 = F'(\xi) = -(g(b) - g(a))f'(\xi) + g'(\xi)(f(b) - f(a))$$

Par conséquent

$$(g(b) - g(a))f'(\xi) = g'(\xi)(f(b) - f(a))$$

Et ainsi

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

□

Preuve de la première partie de la règle de l'Hospital

Le théorème de Cauchy dit que pour tout x et y dans $V \setminus \{a\}$ tels que[1] $g(x) - g(y) \neq 0$, il existe $\xi_{x,y}$ entre x et y tel que

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})}$$

Si on fait tendre y vers a, on obtient par l'hypothèse 3, que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to a} \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \lim_{y \to a} \frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})}$$

Si on fait ensuite tendre x vers a, on obtient

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x,y \to a} \frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} \overset{\bigstar}{=} \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

L'opération $\bigstar$ est extrêmement délicate, car bien que $\xi_{x,y}$ (qui se trouve entre x et y) se rapproche de a lorsque x et y tendent vers a, il se pourrait que $\lim_{x,y \to a} f'(\xi_{x,y})/g'(\xi_{x,y})$ existe alors que $\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x)$ n'existe pas (voir l'exemple qui suit). C'est pour cela que l'on a supposé que cette dernière existe, car dans ce cas on peut montrer (mais il faut utiliser des outils mathématiques bien plus fins) que l'on a bien l'égalité $\bigstar$. □

1. Cette condition ne pose pas de problème : d'abord on choisit x, puis y dans un sous-voisinage V_x de V tel que $|z| < |x|$ pour tout $z \in V_x$. C'est possible puisque $\lim_{x \to a} g(x) = 0$.

Avantage de cette version par rapport à la version light

On peut utiliser cette règle dans bien plus de cas, puisqu'ici les fonctions f et g peuvent très bien ne pas être définies en a, contrairement à la version light. La limite ci-dessous en est un exemple. On montre plus loin que $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$.

La règle de l'hospital nous montre que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln(x)}{\sin(x)} \overset{\text{Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x)+1}{\cos(x)} = -\infty$.

Un cas où la règle de l'Hospital n'est pas applicable

On se propose de calculer la limite : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$.

Le lecteur attentif aura tout de suite remarqué que cette limite est calculable facilement.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\left(\tfrac{1}{x}\right) = 0$$

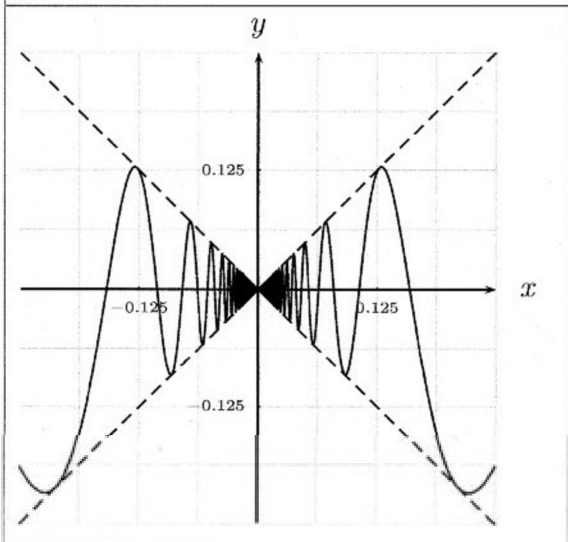
Par contre la règle de l'Hospital ne s'applique pas pour cette fonction car la limite suivante n'existe pas.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1}$$

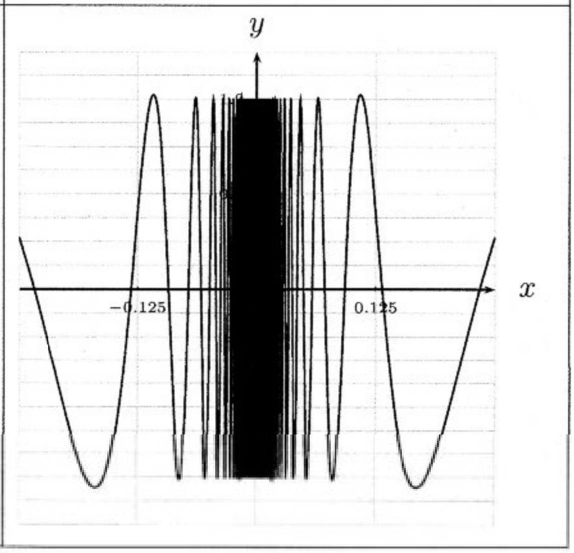
En effet, la fonction $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet aucune limite, puisqu'en se rapprochant de 0 elle va osciller verticalement entre -1 et 1 une infinité de fois...

Pour mieux se rendre compte de ce qu'il se passe dans cet exemple, voici les graphes des fonctions $\frac{f(x)}{g(x)}$ et $\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Graphe de $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$



Graphe de $2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$



En regardant le passage délicat de la preuve ★ suivant.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x,y\to a} \frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} \overset{\bigstar}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

On se rend compte que les $\xi_{x,y}$ sont tels que la limite $\lim_{x,y\to a} \frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})}$ soit nulle, comme celle de la fonction de gauche. Cette limite forme une sous-suite de la suite (généralisée) de droite qui admet, en termes techniques, une infinité de valeurs d'adhérence entre -1 et 1, mais qui ne converge pas.

Règle de l'Hospital (deuxième partie)

On suppose qu'il existe un voisinage V de a ($a \in \mathbb{R}$ ou $a \in \{-\infty, +\infty\}$) et deux fonctions f et g telles que

1. f et g sont dérivables sur $V \setminus \{a\}$.
2. f' et g' ne s'annulent pas sur $V \setminus \{a\}$.
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.

De plus, on suppose que :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe et appartient à } \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existe}$$

Alors, on a : $\boxed{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$

Preuve

On se ramène à la première partie de la règle de l'Hospital.

Précisons que puisque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$, on peut prendre un voisinage suffisamment petit pour que ni f, ni g ne s'annulent sur ce voisinage.

On peut donc écrire sans arrière pensée l'égalité suivante.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \quad \text{où} \quad \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ et } \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = 0$$

Ici, on se retrouve avec les hypothèses de la première partie de la règle de l'Hospital. On peut donc l'appliquer.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x \to a} \frac{-\frac{1}{g(x)^2} \cdot g'(x)}{-\frac{1}{f(x)^2} \cdot f'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)^2}{g(x)^2} \cdot \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

On a supposé que les limites existent, on peut donc écrire

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \right)^2 \cdot \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

On remarque une simplification, puisque le terme de gauche est non nul. On a ainsi

$$1 = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

Donc

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Règle de l'Hospital (troisième et dernière partie)

On suppose qu'il existe un voisinage V de a ($a \in \mathbb{R}$ ou $a \in \{-\infty, +\infty\}$) et deux fonctions f et g telles que

1. f et g sont dérivables sur $V \setminus \{a\}$.
2. f' et g' ne s'annulent pas sur $V \setminus \{a\}$.
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

De plus, on suppose que les limites suivantes existent.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Alors, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$

Preuve

Un des deux seuls cas n'ayant pas été démontré dans la deuxième partie est celui où

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ (donc existe)}$$

Dans ce cas, on va éviter le problème en ajoutant 1. On a

$$1 = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} + 1 = \lim_{x\to a} \frac{f(x) + g(x)}{g(x)}$$

On constate que

$$\lim_{x\to a} \frac{(f(x)+g(x))'}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)+g'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} + 1 \text{ existe}$$

Grâce à cette astuce, on est dans les hypothèses de la deuxième partie de la règle de l'Hospital (en prenant la fonction $f(x) + g(x)$ à la place de la fonction f). On a ainsi

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} + 1 = \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{(f(x)+g(x))'}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} + 1$$

Donc

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ (= 0)$$

Il faudrait encore regarder le cas où la limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$, mais cela ne pose pas de problème, car dans ce cas, on a $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ (en échangeant les rôles de f et de g) et on conclut grâce à ce qu'on vient de faire. $\square$