Chapitre 12

Dénombrement : permutations, arrangements et combinaisons

12.1. Les permutations

Notations

1. Le produit des n premiers nombres entiers positifs est appelé n *factoriel* et se note :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

   Convention On a $0! = 1$.

2. Un ensemble de n objets $a_1, \ldots, a_n$ où l'ordre ne compte pas est noté $\{a_1, \ldots, a_n\}$.
3. Un ensemble de n objets $a_1, \ldots, a_n$ où l'ordre compte est noté $(a_1; \ldots; a_n)$ et appelé *suite*.

12.1.1. Permutations d'objets distincts

Soit $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble de n objets distincts. Une *permutation* consiste à donner un ordre à ces n objets. Autrement dit une permutation est une suite.

Exemple. Voici toutes les permutations des objets de l'ensemble $\{a, b, c\}$.

$$(a; b; c) \qquad (a; c; b) \qquad (b; a; c) \qquad (b; c; a) \qquad (c; a; b) \qquad (c; b; a)$$

Théorème Le nombre de permutations de n objets, noté P_n est donné par : $\boxed{P_n = n!}$

Preuve

Il y a n choix pour placer le premier objet, il y aura ensuite $n-1$ choix pour le deuxième, $n-2$ choix pour le troisième objet et ainsi de suite... Dans le tableau suivant, on indique le nombre d'objets que l'on peut mettre dans la position indiquée dans le coin supérieur.

1	2	3	4	5	6	7	8	...	n-2	n-1	n
n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	$n-4$	$n-5$	$n-6$	$n-7$	$\cdots$	3	2	1

On a ainsi $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ possibilités. Il s'agit bien de multiplications car chaque choix influence le choix suivant. $\square$

12.1.2. Permutations avec objets identiques

On considère maintenant des objets qui ne sont pas forcément tous distincts. Ainsi, on parle de type d'objets et le nombre d'objets de chaque type est appelé *multiplicité*.

Par exemple. Parmi l'ensemble de types d'objets $\{a, b\}$, la multiplicité de a est 3 et celle de b est 2. On a donc 5 objets. Les permutations de ces 5 objets sont

$$\begin{array}{llll}
(a; a; a; b; b) & & & \\
(a; a; b; b; a) & (a; a; b; a; b) & & \\
(a; b; b; a; a) & (a; b; a; b; a) & (a; b; a; a; b) & \\
(b; b; a; a; a) & (b; a; b; a; a) & (b; a; a; b; a) & (b; a; a; a; b)
\end{array}$$

Cela fait en tout 10 possibilités. Si les 5 objets avaient été distincts, on aurait eu $5! = 120$ possibilités.

On explique cette différence de la façon suivante : en notant $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ et $a^{(3)}$ les trois objets de type a, on voit que les permutations

$$\begin{array}{lll}
(a^{(1)}; a^{(2)}; a^{(3)}; b; b) & (a^{(1)}; a^{(3)}; a^{(2)}; b; b) & (a^{(2)}; a^{(1)}; a^{(3)}; b; b) \\
(a^{(2)}; a^{(3)}; a^{(1)}; b; b) & (a^{(3)}; a^{(1)}; a^{(2)}; b; b) & (a^{(3)}; a^{(2)}; a^{(1)}; b; b)
\end{array}$$

sont les mêmes, puisqu'on ne distingue pas les objets du type de a. Ainsi, on compte 6 fois trop de suites lorsque les a apparaissent au même endroit. Cela correspond aux permutations des 3 objets de type a, puisque $6 = 3!$. Il en va de même pour les suites où les deux b apparaissent au même endroit : on en compte $2!$ fois trop.

Ainsi, le nombre de permutations cherché vaut $5!$ (pour les 5 objets considérés distincts) divisé par $3!$ (pour les 3 objets de type a) et par $2!$ (pour les 2 objets de type b). On a

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10 \text{ permutations.}$$

Cas général. Disons que l'ensemble de type d'objets est $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ et appelons n_k la multiplicité de a_k (pour $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$). Il y a donc $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ objets. Le nombre de permutations de ces objets, noté $P_{(n_1,\ldots,n_m)}$, est donné par la formule

$$\boxed{P_{(n_1,\ldots,n_m)} = \frac{(n_1 + n_2 + \cdots + n_m)!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_m!}}$$

Exemples

1. Sur une corde, on suspend 2 chandails, 4 chemises, 1 tablier et 5 caleçons. De combien de manières peut-on suspendre cette lessive s'il est impossible de distinguer les habits du même type ?

   Réponse : Il y a $\dfrac{12!}{2!\ 4!\ 1!\ 5!} = 83'160$ manières.

2. À l'aide des lettres E, M, M, A, R, G, A, N, A, combien de mots (ou suites de lettres) peut-on former ?

   Réponse : Il y a $\dfrac{9!}{3!\ 2!} = 30'240$ mots.

12.2. Les arrangements

12.2.1. Arrangements sans répétitions

Soit $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble de n objets (distincts) et k un nombre entre 1 et n. Un *arrangement des n objets pris k à k sans répétitions* est un choix ordonné de k objets distincts parmi les n objets.

Exemple. Voici tous les arrangement 2 à 2 sans répétitions de l'ensemble $\{a, b, c\}$.

$$(a; b) \qquad (a; c) \qquad (b; a) \qquad (b; c) \qquad (c; a) \qquad (c; b)$$

On choisit un objet dans l'ensemble d'objets, puis un deuxième qui doit être différent. L'ordre de sélection est important !

Théorème

Le nombre d'arrangements de n objets pris k à k sans répétitions, noté A_k^n ou P_k^n, est donné par la formule suivante :

$$\boxed{A_k^n = P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Preuve en utilisant la formule des permutations

On veut choisir k objets parmi n et tenir compte de l'ordre de choix. On imagine qu'on colle des étiquettes sur les n objets (exactement une étiquette par objet). Il y a k étiquettes qui indiquent que l'objet à été choisi et sera placé à la i-ème position (de la première position à la k-ième), et $n-k$ étiquettes qui indiquent que l'objet ne sera pas choisi. À chaque permutation distincte de ces n étiquettes, on a un arrangement différent.

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{c_1}\boxed{c_2}\boxed{\cdots}\boxed{c_{k-1}}\boxed{c_k}}_{\text{les } k \text{ objets choisis}}\ \underbrace{\boxed{r}\boxed{r}\boxed{\cdots}\boxed{r}\boxed{r}}_{\text{les } n-k \text{ objets non choisis}}}^{n \text{ étiquettes}}$$

Donc, le nombre d'arrangements sans répétitions est donné par : $A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$. $\square$

Exemples

1. Un comité se compose de 7 membres. De combien de manières peut-on nommer le bureau comprenant le président, le vice-président, le secrétaire et le trésorier si les fonctions peuvent être cumulées ?

   Réponse : Il y a $A_4^7 = \dfrac{7!}{(7-4)!} = 840$ manières.

2. On considère les chiffres 0, 4, 2, 3, 1 et 7.
   (a) Combien de nombres peut-on créer si on utilise tous les chiffres disponibles une seule fois ?
   (b) Combien de nombres à 4 chiffres peut-on créer si on utilise une seule fois les chiffres ci-dessus ?

   Réponses : (a) $A_6^6 = \dfrac{6!}{(6-0)!} = \dfrac{6!}{1} = 6! = 720$. (b) $A_4^6 = \dfrac{6!}{(6-4)!} = \dfrac{6!}{2!} = 360$.

12.2.2. Arrangements avec répétitions

Soit $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble de n objets (distincts) et k un nombre naturel.
Un *arrangement des n objets pris k à k avec répétitions* est un choix ordonné de k objets parmi les n objets. Il est possible de choisir plusieurs fois le même objet.

Exemple.

Voici tous les arrangements 2 à 2 avec répétitions de l'ensemble d'objets $\{a, b, c\}$.

$$(a;a) \quad (a;b) \quad (a;c) \quad (b;a) \quad (b;b) \quad (b;c) \quad (c;a) \quad (c;b) \quad (c;c)$$

On choisit deux objets, pas forcément distincts, dans l'ensemble d'objets. L'ordre de sélection est important !

Théorème

Le nombre d'arrangements de n objets pris k à k avec répétitions, noté $\overline{A}_k^n$ ou $\overline{P}_k^n$, est donné par la formule suivante :

$$\boxed{\overline{A}_k^n = \overline{P}_k^n = n^k}$$

Preuve

Il y a n choix pour placer le premier objet, mais comme on peut reprendre le premier objet, il y aura ensuite n choix pour le deuxième, n choix pour le troisième objet et ainsi de suite... Dans le tableau suivant, on indique le nombre d'objets que l'on peut mettre dans la position indiquée dans le coin supérieur.

1	2	3	4	$\cdots$	k-2	k-1	k
n	n	n	n	$\cdots$	n	n	n

Le nombre de possibilités est ainsi $\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k \text{ termes}} = n^k$. □

Exemples

1. Au sport-toto, on doit pronostiquer le résultat de 13 matches (gagné, perdu ou nul). Combien de pronostics différents existe-t-il ?

   Réponse : Il y a $\overline{A}_{13}^3 = 3^{13} = 1'594'323$ différents pronostics.

2. On considère les chiffres 0, 4, 2, 3, 1 et 7.
   (a) Combien de nombres à 5 chiffres peut-on créer si on utilise les chiffres ci-dessus autant de fois que l'on veut ?
   (b) Combien de nombres à 8 chiffres peut-on créer si on utilise les chiffres ci-dessus autant de fois que l'on veut ?

   Réponses : (a) $\overline{A}_5^6 = 6^5 = 7'776$. (b) $\overline{A}_8^6 = 1'679'616$.

12.3. Les combinaisons

12.3.1. Combinaisons sans répétitions

Soit $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble de n objets (distincts) et k un nombre entre 1 et n. Une *combinaison de n objets pris k à k sans répétitions* est un choix non ordonné de k objets distincts parmi les n objets.

Exemple. Voici toutes les combinaisons 2 à 2 sans répétitions de l'ensemble $\{a, b, c\}$.

$$\{a,b\} \qquad \{a,c\} \qquad \{b,c\}$$

On choisit un objet dans l'ensemble d'objets, puis un deuxième qui doit être différent. L'ordre de sélection n'est pas important !

Théorème

Le nombre de combinaisons de n objets pris k à k sans répétitions, noté C_k^n, est donné par la formule suivante :

$$\boxed{C_k^n = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$$

Preuve en utilisant la formule des permutations

On veut choisir k objets parmi n sans tenir compte de l'ordre de choix. On imagine qu'on colle des étiquettes sur les n objets (exactement une étiquette par objet). Il y a k étiquettes qui indiquent que l'objet à été choisi (sans tenir compte de l'ordre), et $n-k$ étiquettes qui indiquent que l'objet ne sera pas choisi. À chaque permutation distincte de ces n étiquettes, on a une combinaison différente.

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{c\,|\,c\,|\cdots|\,c\,|\,c}}_{\text{les } k \text{ objets choisis}}\ \underbrace{\boxed{r\,|\,r\,|\cdots|\,r\,|\,r}}_{\text{les } n-k \text{ objets non choisis}}}^{n \text{ étiquettes}}$$

Donc, le nombre de combinaisons sans répétitions est donné par : $C_k^n = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$. □

Définition.

On note aussi le nombre de combinaisons de n objets pris k à k sans répétitions à l'aide du *coefficient binomial* :

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemples

1. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de sous-ensembles de k éléments que l'on peut former dans un ensemble à n éléments.

2. À la loterie suisse à numéro, on doit choisir 6 numéros parmi 45. Combien y a-t-il de choix possibles ?

   Réponse : Il y a $C_6^{45} = \binom{45}{6} = \frac{45!}{6!\cdot(45-9)!} = 8'145'060$ choix.
   Et un seul de ces choix permet de gagner le gros lot !

12.3.2. Combinaisons avec répétitions

Soit $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble de n objets (distincts) et k un nombre naturel.
Une *combinaison des n objets pris k à k avec répétitions* est un choix non ordonné de k objets parmi les n objets. Il est possible de choisir plusieurs fois le même objet.

Exemple. Voici toutes les combinaisons 2 à 2 avec répétitions de l'ensemble $\{a, b, c\}$.

$$\{a,a\} \qquad \{a,b\} \qquad \{a,c\} \qquad \{b,b\} \qquad \{b,c\} \qquad \{c,c\}$$

On choisit deux objets, pas forcément distincts, dans l'ensemble d'objets. L'ordre de sélection n'est pas important !

Théorème

Le nombre de combinaisons de n objets pris k à k avec répétitions, noté $\overline{C}_k^n$, est donné par la formule suivante :

$$\boxed{\overline{C}_k^n = \binom{n+k-1}{k}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\overline{C}_k^n = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}}$$

Preuve

Pour décrire une telle combinaison, on peut choisir plusieurs fois le même objet, mais l'ordre de sélection ne doit pas être important. On va placer des étiquettes E sur les objets choisis (le nombre d'étiquettes collées sur un objet correspond au nombre de fois qu'il est choisi), comme le montre le schéma ci-dessous :

étiquettes	E |	|	EE |	E |	|	$\cdots$ |	EE |	|	|	E
objets	1	2	3	4	5	$\cdots$	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n

Avec cette façon de voir, le nombre de combinaisons avec répétitions est égal au nombre de permutations des étiquettes E et des barres verticales | qui séparent les différents objets dans le schéma ci-dessus.

Il y a k étiquettes et $n-1$ barres verticales | à permuter. Le nombre de combinaisons avec répétition est ainsi donné par le nombre de permutations de $k+n-1$ objets (les k étiquettes et les $n-1$ barres verticales). Donc :

$$\overline{C}_k^n = \frac{(k+n-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n+k-1\ -\ k)!} = \binom{n+k-1}{k} \qquad \square$$

Exemples

1. On lance deux dés à 6 faces à partir d'un goblet à dés. Combien y a-t-il de possibilités ?

   Réponse : Il y a $\overline{C}_2^6 = \binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = \dfrac{7!}{2!\ (7-2)!} = 21$ possibilités.

2. On lance dix dés à 6 faces à partir d'un goblet à dés. Combien y a-t-il de possibilités ?

   Réponse : Il y en a $\overline{C}_{10}^6 = \binom{6+10-1}{10} = \binom{15}{10} = \dfrac{15!}{10!\ (15-10)!} = 3'003.$

12.4. Tableau récapitulatif

Voici un tableau récapitulatif des différentes formules vues précédemment.

L'ordre est important	
Nombre de **permutations** de n objets distincts (file indienne).	$P_n = n!$
Nombre de **permutations** de m types d'objets dont les multiplicités sont $n_1, \ldots, n_m$ (anagrammes).	$P_{(n_1,\ldots,n_m)} = \dfrac{(n_1 + \cdots + n_m)!}{n_1! \cdots n_m!}$
Nombre d'**arrangements** de n objets pris k à k **sans répétitions** (tiercé).	$A_k^n = P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
Nombre d'**arrangements** de n objets pris k à k **avec répétitions** (sport-toto).	$\overline{A}_k^n = \overline{P}_k^n = n^k$
L'ordre n'est pas important	
Nombre de **combinaisons** de n objets pris k à k **sans répétitions** (loterie à numéro).	$C_k^n = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
Nombre de **combinaisons** de n objets pris k à k **avec répétitions** (yahtzee, 421).	$\overline{C}_k^n = \dbinom{n+k-1}{k} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

12.5. Triangle de Pascal des coefficients binomiaux

Formule du binôme de Newton

Voici la formule du binôme de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Preuve

On a

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n \text{ termes}}$$

On trouve le coefficient de $x^k y^{n-k}$ en développant le polynôme. Or, pour trouver ce coefficient, il faut en développant choisir k fois le x et $n-k$ fois le y. Un tel choix est effectué en choisissant le numéro de la parenthèse où l'on choisit de développer le x. Pour de tels choix l'ordre n'a pas d'importance. Le nombre de tels choix est exactement le coefficient de $x^k y^{n-k}$ (car si on choisit exactement k fois le x, on est obligé de choisir $n-k$ fois le y). Ce coefficient est donc $C_k^n = \binom{n}{k}$. $\square$

Relation entre les coefficients binomiaux

On a la formule suivante :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \qquad \text{pour tout } \ 0 \leqslant k \leqslant n$$

Preuve

On sait que $\binom{n+1}{k+1}$ est le choix de $k+1$ objets parmi $n+1$ objets (sans ordre et sans répétitions). Mettons un objet de côté parmi les $n+1$ objets et décrivons le choix précédent de deux façons suivantes.

1. On choisit d'abord l'objet mis de côté.

   Il reste donc k objets à choisir parmi les n restants. Il y a $\binom{n}{k}$ tels choix.

2. On ne choisit pas l'objet mis de côté.

   On dont donc choisir $k+1$ objets à choisir parmi les n restants. Il y a $\binom{n}{k+1}$ tels choix.

On a donc la formule annoncée :

$$\binom{n+1}{k+1} \quad = \quad \underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{\text{si on choisit} \\ \text{l'objet mis} \\ \text{de côté}}} \quad + \quad \underbrace{\binom{n}{k+1}}_{\substack{\text{si on ne choisit} \\ \text{pas l'objet mis} \\ \text{de côté}}} \qquad \text{pour tout } \ 0 \leqslant k \leqslant n$$

$\square$

Le triangle de Pascal

La formule du binôme de Newton permet de calculer relativement aisément toute puissance du polynôme $x+y$. Pour cela, on construit le triangle de Pascal à l'aide de la relation entre les coefficients binomiaux.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

À chaque ligne correspond un polynôme de la forme $(x+y)^n$, la première ligne correspond à $n=0$, la deuxième ligne correspond à $n=1$, la troisième à $n=2$, etc...

Sur chaque ligne, on trouve les coefficients du polynôme $(x+y)^n$ correspondant. Par exemple, de la troisième ligne ($n=2$) à la cinquième ligne ($n=4$), on voit que :

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$