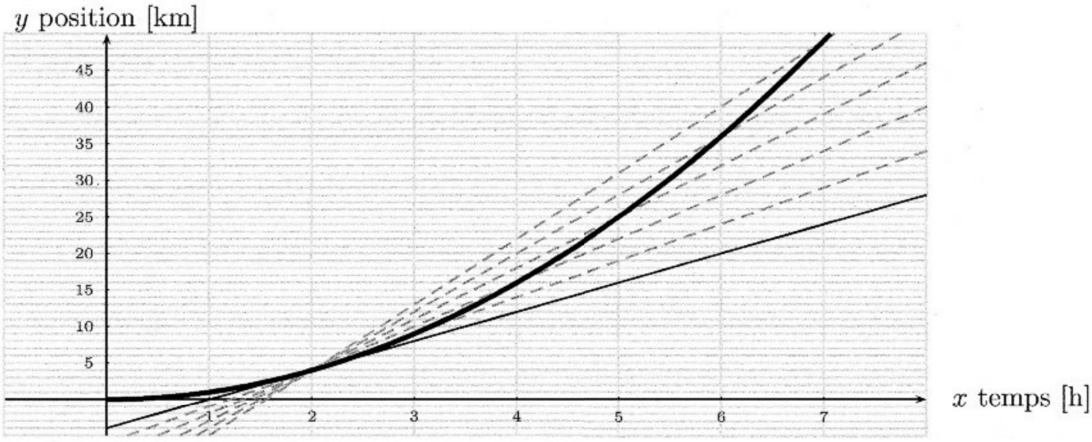
Chapitre 14

Dérivation

14.1 La dérivée en un point d'une fonction

De la vitesse instantanée en physique...

Lorsqu'on désire calculer la vitesse instantanée d'un objet, on calcule la vitesse moyenne de cet objet entre deux instants de plus en plus proche.



Sur le dessin ci-dessus, la position de l'objet est donnée par la fonction $f(x) = x^2$.

La vitesse moyenne entre 2 heures et 7 heures est indiquée par la pente de la sécante passant par les deux points $(2; 4)$ et $(7; 49)$. Cette pente vaut $\frac{45}{5} = 9$, ce qui donne une vitesse moyenne de 9 km/h.

Rappelons que la vitesse moyenne (ou pente de la sécante) est calculée ainsi

$$\frac{\text{variation de la position [km]}}{\text{variation du temps [h]}} = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}} = \frac{49-4}{7-2} = 9$$

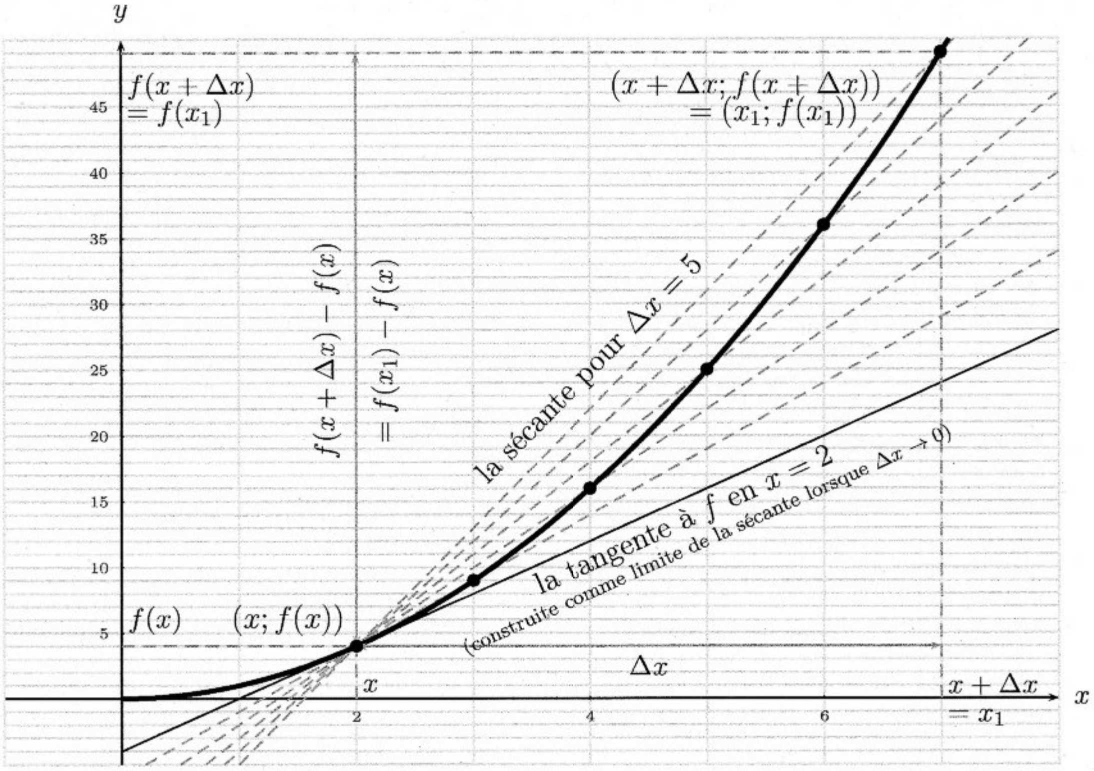
Mais si on est intéressé par la vitesse instantanée en $x = 2$ heures, il faut glisser le deuxième point vers le premier point (correspondant à 2 heures).

> De 2 à 6 heures, la vitesse moyenne est de $\frac{32}{4} = 8$ km/h ; de 2 à 5 heures, elle est de $\frac{21}{3} = 7$ km/h ; de 2 à 4 heures, elle est de $\frac{12}{2} = 6$ km/h ; de 2 à 3 heures, elle est de $\frac{5}{1} = 5$ km/h (voir droites en traitillés).

Plus on prend le deuxième temps proche de 2 heure, plus la vitesse moyenne va se rapprocher de la vitesse instantanée qui, on le devine, vaut 4 km/h.

...à la dérivée en mathématique

Dans le contexte mathématique, les expressions «vitesse moyenne» et «vitesse instantanée» sont remplacées par «pente de la sécante» et «pente de la tangente».



Idée principale : la tangente à f en x est construite comme la limite de la sécante qui passe par les points $(x; f(x))$ et $(x+\Delta x; f(x+\Delta x)) = (x_1; f(x_1))$ lorsque Δx tend vers 0 (ou x_1 tend vers x). Ainsi le deuxième point glisse vers le point $(x; f(x))$ qui est fixe.

$$\begin{array}{c}\text{pente de}\\ \text{cette sécante}\end{array} = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

En prenant la limite lorsque Δx tend vers 0 (ou x_1 tend vers x), on trouve la *pente de la tangente à f en x*. Cette pente est appelée la *dérivée de f au point x* et est notée $f'(x)$.

$$\boxed{f'(x) \text{ est la pente de la tangente au graphe de la fonction } f \text{ en } x}$$

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \qquad \boxed{f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}}$$

Appliquons cette formule pour calculer la pente de la tangente en $x = 2$.

D'abord, on cherche $f'(x)$ et ensuite on remplace x par 2. Rappelons qu'ici $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Big(2x + \Delta x\Big) = 2x$$

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{x_1^2 - x^2}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{(x_1 - x)(x_1 + x)}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} \Big(x_1 + x\Big) = 2x$$

En général, avec la formule en Δx, il faut distribuer ; avec celle en x_1, il faut factoriser.

Ainsi, la vitesse instantanée en $x = 2$ heures vaut $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ km/h.

14.2 La dérivée d'une fonction

Soit $f : D \to A$ une fonction. On dit que f est *dérivable* si la dérivée de f en chaque point $x \in D$ existe. Dans ce cas, on peut parler de la *(fonction) dérivée de* f. C'est la fonction définie par $f' : D \to \mathbb{R}; x \mapsto f'(x)$ où

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \qquad \left(= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x \;-\; x} \right)$$

Remarquons que si cette limite existe, alors

$$\lim_{\Delta x \to 0} \big(f(x + \Delta x) - f(x)\big) = 0$$

En effet, puisque le dénominateur, Δx tend vers 0 (lorsque Δx tend vers 0), il faut que la limite du numérateur existe et soit nulle pour que la limite existe (car sinon, la limite est de la forme $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}$).

La condition ci-dessus est équivalente à la condition suivante.

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$$

C'est la continuité de f au point x.

On vient donc de montrer que

$$f \text{ est dérivable en } x \implies f \text{ est continue en } x$$

Donc

$$\boxed{f : D \to \mathbb{R} \text{ est dérivable} \implies f : D \to \mathbb{R} \text{ est continue}}$$

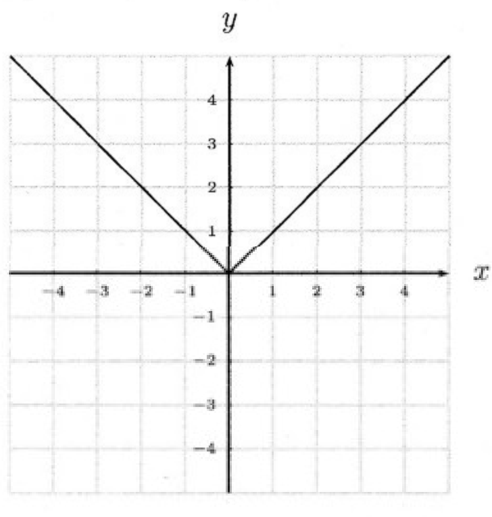
La réciproque n'est pas vraie, car toute fonction continue n'est pas forcément dérivable. En d'autres termes :

$$\boxed{f : D \to \mathbb{R} \text{ est dérivable} \not\Leftarrow f : D \to \mathbb{R} \text{ est continue}}$$

En effet, la valeur absolue est continue en tout point, mais elle n'est pas dérivable en 0 !

En regardant ce qui se passe en 0 depuis la gauche, on trouve

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \overset{<}{\to} 0} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \overset{<}{\to} 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} &= -1 \end{aligned}$$



Tandis que depuis la droite, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \overset{>}{\to} 0} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \overset{>}{\to} 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi, la limite $f'(0)$ n'existe pas (elle ne peut pas être égale à -1 et à 1 en même temps !).

En fait, toutes les fonctions avec des pointes (lieu où la pente instantanée passe d'un extrême à un autre) ne sont pas dérivables (en ces points).

14.2.1 Premiers exemples

La dérivée de la fonction $f(x) = x^2$ vient d'être vue. Cherchons la dérivée d'autres fonctions.

1. La dérivée de la fonction $f(x) = x$ est $f'(x) = 1$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$
$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{x_1 - x}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} 1 = 1$$

2. La dérivée de la fonction constante $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, est nulle : $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$
$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{c - c}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} 0 = 0$$

Deux résultats démontrés en exercice

Si $f(x) = x^3$ et $g(x) = \frac{1}{x}$, alors

$$f'(x) = 3x^2 \quad \text{et} \quad g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

14.3 Équation de la tangente au graphe d'une fonction

Soit D et A des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On considère une fonction réelle $f : D \to A$ qui est dérivable sur un intervalle contenant $x_0 \in D$.

L'équation de la *tangente au graphe de f en x_0* est donné par l'équation cartésienne

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)} = \underbrace{f'(x_0)}_{=m}\, x + \underbrace{\big(f(x_0) - f'(x_0)x_0\big)}_{=h}$$

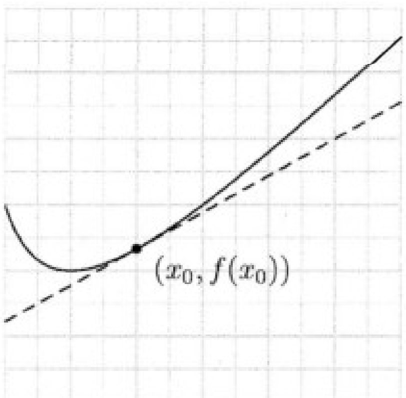
Preuve

1. La tangente est une droite passant par $\big(x_0; f(x_0)\big)$.

   Ainsi, son expression est $y = f(x_0) + m(x - x_0)$ (voir la page 132).

2. La pente de la tangente en $x = x_0$ est, par définition, la dérivée $f'(x_0)$.

   Ainsi, dans l'expression $y = f(x_0) + m(x - x_0)$, m représente la pente (car c'est le coefficient de x). Ainsi $m = f'(x_0)$.



Par conséquent, l'équation de la tangente est bien
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \square$$

14.4 Règles de dérivations

14.4.1 Règle de la somme et de la soustraction

Soit f et g deux fonctions dérivables dont les domaines de définition et d'arrivée sont les mêmes. Il est naturel de définir les fonctions $f+g$ et $f-g$ comme suit

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad \text{et} \quad (f-g)(x) = f(x)-g(x)$$

Cherchons à exprimer la dérivée de $(f+g)$ ou de $(f-g)$ en fonction de la dérivée de f et de celle de g. Pour cela, on utilise la définition de la dérivée.

$$\begin{aligned}
(f\pm g)'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(f\pm g)(x+\Delta x)-(f\pm g)(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)\pm g(x+\Delta x)-\big(f(x)\pm g(x)\big)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)\pm \big(g(x+\Delta x)-g(x)\big)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \pm \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right) \\
&= \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}_{=f'(x)} \pm \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}_{=g'(x)} \\
&= f'(x)\pm g'(x) \;=\; (f'\pm g')(x)
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{(f\pm g)' = f'\pm g'} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{(f\pm g)'(x) = f'(x)\pm g'(x)}$$

14.4.2 Règle de la multiplication par un nombre

Soit f une fonction dérivable et λ un nombre réel. Il est naturel de définir la fonction λf comme suit

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Cherchons à exprimer la dérivée de (λf) en fonction de la dérivée de f. Pour cela, on utilise la définition de la dérivée.

$$\begin{aligned}
(\lambda f)'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\lambda f)(x+\Delta x)-(\lambda f)(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\lambda f(x+\Delta x)-\lambda f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\lambda\big(f(x+\Delta x)-f(x)\big)}{\Delta x} = \lambda \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}_{=f'(x)} \\
&= \lambda f'(x) \;=\; (\lambda f')(x)
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{(\lambda f)' = \lambda f'} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)}$$

14.4.3 Règle du produit

Soit f et g deux fonctions dérivables dont les domaines de définition et d'arrivée sont les mêmes. Il est naturel de définir la fonction fg comme suit

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

Cherchons à exprimer la dérivée de (fg) en fonction de la dérivée de f et de celle de g. Pour cela, on utilise la définition de la dérivée.

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(fg)(x+\Delta x) - (fg)(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) \overbrace{-f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x)}^{=0} - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(f(x+\Delta x) - f(x)\big)g(x+\Delta x) + f(x)\big(g(x+\Delta x) - g(x)\big)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x+\Delta x) \;+\; f(x) \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x)}_{=g(x) \text{ (car } g \text{ est continue)}} \;+\; f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}_{=f'(x)} \cdot g(x) \;+\; f(x) \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}_{=g'(x)} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{(fg)' = f'g + fg'} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

14.4.4 Règle de la composition ou de la dérivation en cascade

Soit f et g deux fonctions dérivables telles que le domaine d'arrivée de g soit le domaine de définition de f afin que l'on puisse parler de la fonction composée $f \circ g$ qui est définie comme suit.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

La règle est la suivante :

$$\boxed{(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\Big(f(g(x))\Big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Dans ce contexte, la dérivée $g'(x)$ est appelé *dérivée interne*, car dans $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, g est à l'intérieur de f.

Par exemple, pour calculer la dérivée de $\frac{1}{x^2}$, on remarque que la fonction f correspond à la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ (car la dernière opération que l'on fait pour calculer $\frac{1}{x^2}$ c'est une inversion (touche $\boxed{x^{-1}}$ sur la calculatrice)) et que la fonction g correspond à $g(x) = x^2$, de sorte que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \frac{1}{x^2}$$

Ainsi

$$(f \circ g)'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = \underbrace{-\frac{1}{(x^2)^2}}_{=f'(g(x))} \cdot \underbrace{2x}_{=g'(x)} = -\frac{2}{x^3}$$

Preuve de la formule annoncée

Montrons cette formule de dérivation en chaîne à l'aide de la définition de la dérivée.

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(x) &= \lim_{x_1 \to x} \frac{(f \circ g)(x_1) - (f \circ g)(x)}{x_1 - x} \\
&= \lim_{x_1 \to x} \frac{f(g(x_1)) - f(g(x))}{x_1 - x}
\end{aligned}$$

Ici, pour se décoincer, on a besoin d'une astuce : afin de faire apparaître la dérivée de g, on va amplifier la fraction ci-dessus par $g(x_1) - g(x)$ (à condition que lorsque x_1 est proche de x (mais pas égal à x), $g(x_1) - g(x)$ ne s'annule pas ; dans le cas contraire, le lecteur est prié de se référer à la remarque de la page suivante).

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(x) &= \lim_{x_1 \to x} \left(\frac{f(g(x_1)) - f(g(x))}{x_1 - x} \cdot \frac{g(x_1) - g(x)}{g(x_1) - g(x)} \right) \\
&= \lim_{x_1 \to x} \left(\frac{f(g(x_1)) - f(g(x))}{g(x_1) - g(x)} \cdot \frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x} \right) \\
&= \lim_{x_1 \to x} \frac{f(g(x_1)) - f(g(x))}{g(x_1) - g(x)} \cdot \lim_{x_1 \to x} \frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x} \\
&= \lim_{x_1 \to x} \frac{f(g(x_1)) - f(g(x))}{g(x_1) - g(x)} \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

Posons maintenant $y_1 = g(x_1)$, comme g est continue alors $\lim\limits_{x_1 \to x} g(x_1) = g(x)$, et donc ainsi $y_1 \to g(x)$ lorsque $x_1 \to x$.

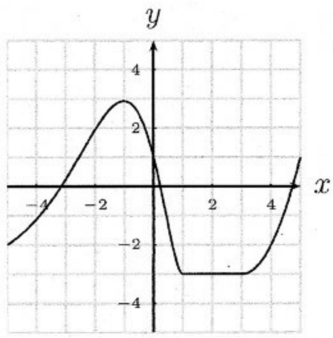
$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(x) &= \lim_{x_1 \to x} \frac{f(g(x_1)) - f(g(x))}{g(x_1) - g(x)} \cdot g'(x) \\
&= \lim_{y_1 \to g(x)} \frac{f(y_1) - f(g(x))}{y_1 - g(x)} \cdot g'(x) \\
&= f(g(x)) \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

Ce qui est bien le résultat annoncé. $\square$

Remarque

Dans la preuve, on a amplifié une fraction par un terme qui peut s'annuler, ce qui est interdit !

Or, la seule condition pour que $g(x_1) - g(x)$ s'annule lorsque x_1 est proche de x, sans être égal à x, est que g soit *localement constante*. Autrement dit, un bout du graphe de g est plat. Par exemple, sur le graphe ci-contre, $g(x)$ est localement constante autour de $x = 2$. Dans ce cas, l'amplification de la preuve est illégale. Il faut donc faire autrement.



Si g est constante autour de x, alors $f \circ g$ l'est aussi ! Donc la pente de la tangente en x est nulle pour le graphe de g ET pour le graphe de $f \circ g$. Par conséquent, $g'(x) = 0$ et $(f \circ g)'(x) = 0$, donc la formule

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

est encore valable (elle sera de la forme $0 = 0$).

14.4.5 Règle du quotient

Soit f et g deux fonctions dérivables dont les domaines de définition et d'arrivée sont les mêmes. Afin de pouvoir diviser la fonction f par la fonction g, on suppose que la fonction g ne s'annule pas sur son domaine de définition. Il est naturel de définir la fonction $\frac{f}{g}$ comme suit

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Cherchons à exprimer la dérivée de $\frac{f}{g}$ en fonction de la dérivée de f et de celle de g en utilisant la règle de la multiplication, la dérivation en cascade et le fait que la dérivée de la fonction $\frac{1}{x}$ est $-\frac{1}{x^2}$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' \overset{\text{règle mult.}}{=} f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\
&\overset{\text{cascade}}{=} f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-\frac{1}{g(x)^2}\right) \cdot g'(x) = \frac{f'(x)g(x)}{g(x)^2} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}}$$

14.4.6 Règle de la puissance

On a déjà vu que la dérivée de 1 est 0, que celle de x vaut 1, que celle de x^2 vaut $2x$ et que celle de x^3 vaut $3x^2$.

En fait, il existe une formule qui généralise tout cela. Cette formule dit que la dérivée de $f(x) = x^r$ avec $r \in \mathbb{R}$ vaut

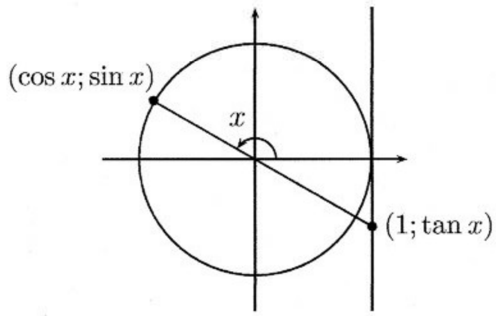
$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1}}$$

On va démontrer cette formule dans un exercice.

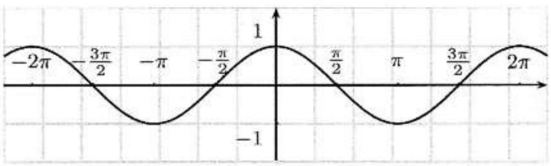
14.5 Dérivées des fonctions transcendantes usuelles

14.5.1 Dérivée de la fonction sinus

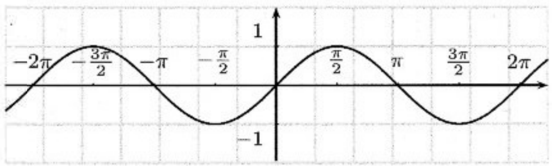
A chaque nombre réel $x \in \mathbb{R}$, on peut faire correspondre un point P_x sur le cercle de rayon 1 centré en l'origine : on imagine que l'on enroule un fil de longueur $|x|$ autour du cercle, l'origine du fil est fixée en $(1;0)$, le signe de x décide du sens d'enroulement et l'extrémité du fil définit le point P_x. Ce point admet deux coordonnées : le *cosinus* de x (en abscisse) et le *sinus* de x (en ordonnée).



$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$



$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$



Résultat intermédiaire

Pour établir la dérivée de la fonction sinus, on aura besoin de la limite de $\frac{\sin(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0. On peut voir évoluer cette limite avec le tableau suivant.

x	0.3	0.2	0.1	0.01	0.001
$\frac{\sin(x)}{x}$	$\cong 0.98507$	$\cong 0.99335$	$\cong 0.99833$	$\cong 0.99998$	$\cong 0.99999$

Ce tableau nous donne l'impression que cette limite vaut 1. Mais cela ne constitue en rien une preuve. Néanmoins, on a le résultat suivant.

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

Preuve du résultat intermédiaire

Tout d'abord, on montre que f est paire, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x} = f(x)$$

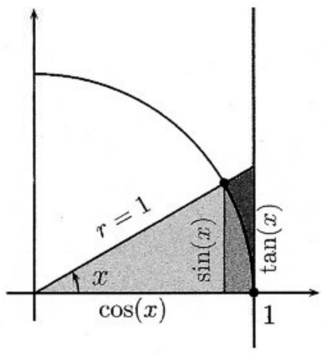
alors

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sin(x)}{x}$$

Cela signifie qu'au lieu de faire tendre x vers 0 de n'importe quelle façon, on peut se contenter de faire tendre x vers 0 depuis la droite, c'est-à-dire avec $x > 0$.

Ensuite, on examine la situation sur le cercle trigonométrique : pour x proche de 0 (à vrai dire x entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ radians), on a la situation décrite dans le dessin ci-dessous.

En comparant les aires des triangles et du secteur de cercle, on a



$$\begin{array}{ccccc} \text{Aire du} & & \text{Aire du} & & \text{Aire du} \\ \text{petit triangle} & \leqslant & \text{secteur} & \leqslant & \text{grand triangle} \\ \dfrac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{2} & \leqslant & \underbrace{\pi \cdot r^2 \cdot \dfrac{x}{2\pi}}_{= \frac{x}{2}} & \leqslant & \dfrac{1 \cdot \tan(x)}{2} \end{array}$$

En multipliant chaque terme par 2, il vient

$$\sin(x) \cdot \cos(x) \leqslant x \leqslant \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

On divise par $\sin(x)$ qui est positif (donc les signes ne s'inversent pas !) pour obtenir

$$\cos(x) \leqslant \frac{x}{\sin(x)} \leqslant \frac{1}{\cos(x)}$$

En passant à l'inverse (on fait $\frac{1}{(.)}$ de chaque côté des inégalités), les signes s'inversent (si $2 \leqslant 3$, alors $\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{3}$). On obtient donc

$$\frac{1}{\cos(x)} \geqslant \frac{\sin(x)}{x} \geqslant \cos(x)$$

En prenant la limite lorsque x tend vers 0 (avec $x > 0$), on obtient

$$\underbrace{\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\cos(x)}}_{=1} \geqslant \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sin(x)}{x} \geqslant \underbrace{\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \cos(x)}_{=1}$$

Ainsi, on a coincé la limite cherchée. Cela montre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

□

Théorème

La dérivée de la fonction sinus est

$$\boxed{\sin' = \cos} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\sin'(x) = \cos(x)}$$

Preuve du théorème

La formule trigonométrique

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\sin'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\big(\sin(x)\cdot\cos(\Delta x) + \cos(x)\cdot\sin(\Delta x)\big) - \sin(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \left(\sin(x)\,\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} \;+\; \cos(x)\,\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right) \\
&= \sin(x)\cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\cos(\Delta x) - 1)}{\Delta x} \;+\; \cos(x)\cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \sin(x)\cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos^2(\Delta x) - 1}{\Delta x(\cos(\Delta x)+1)} \;+\; \cos(x)\cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \sin(x)\cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-\sin^2(\Delta x)}{\Delta x(\cos(\Delta x)+1)} \;+\; \cos(x)\cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \sin(x)\cdot \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} \frac{-\sin(\Delta x)}{\cos(\Delta x)+1}}_{=\frac{0}{2}=0} \;+\; \cos(x)\cdot \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}}_{=1} \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

$\square$

14.5.2 La dérivée des logarithmes

Rappelons deux propriétés des logarithmes.

$$\boxed{\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)} \qquad \boxed{n\log_a(x) = \log_a(x^n)}$$

Ces propriétés vont nous permettre d'établir, à l'aide de la définition, la dérivée de la fonction $\log_a(x)$ avec $x > 0$.

En effet,

$$\begin{aligned}
\log_a'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \log_a\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right)
\end{aligned}$$

On a maintenant besoin de deux astuces pour pouvoir avancer. La première consiste à s'arranger pour avoir $\frac{x}{\Delta x}$ au lieu de $\frac{1}{\Delta x}$ comme exposant de la manière suivante.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \log_a\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \log_a\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)$$

et la deuxième consiste à réaliser que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{x} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{ou encore} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{\Delta x} = \lim_{n \to +\infty} n$$

Ainsi, en remplaçant $\frac{\Delta x}{x}$ par $\frac{1}{n}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\log_a'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \log_a\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x} \log_a\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right) \\
&= \frac{1}{x} \lim_{n \to +\infty} \log_a\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right) \overset{\bigstar}{=} \frac{1}{x} \log_a\left(\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)
\end{aligned}$$

L'étape $\bigstar$ est justifiée grâce à la continuité de la fonction $\log_a(x)$.
On a donc montré que

$$\log_a'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a\left(\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)$$

Mais on se rappelle que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e \qquad \text{où } e \text{ est le nombre d'Euler (voir page 169)}$$

Ainsi, on a

$$\log_a'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a(e)$$

Il existe une relation entre tous les logarithmes, cette relation est donnée par la formule de changement de base :

$$\log_a(x) = \frac{\log_e(x)}{\log_e(a)}$$

En posant $x = e$, on obtient

$$\log_a(e) = \frac{\log_e(e)}{\log_e(a)} = \frac{1}{\log_e(a)}$$

Ainsi, on a réussi à trouver la dérivée de la fonction $\log_a(x)$.

$$\boxed{\log_a'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log_e(a)}}$$

14.5.3 Le logarithme népérien et sa dérivée

Lorsque la base du logarithme est égal au nombre d'Euler e, on parle de *logaritme népérien* ou de *logarithme naturel* et on note

$$\boxed{\log_e(x) = \ln(x)}$$

La dérivée de $\ln(x)$ (cas où $a = e$)

La dérivée de la fonction $\ln(x)$ est

$$\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

14.5.4 La dérivée des fonctions exponentielles

Puisque la fonction e^x est la fonction réciproque de la fonction $\ln(x)$, on peut montrer grâce à la formule (vue en exercice)

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

que la dérivée de e^x est

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Quant aux autres dérivées, on se ramène à l'exponentielle e^x

$$a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x\ln(a)}$$

Puis on utilise la dérivée en cascade.

$$(a^x)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = e^{x\ln(a)} \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x$$

Finalement, on a trouvé

$$\boxed{(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x}$$

14.6 Table de dérivées

Voici une table qui résume les dérivées que nous avons établies et de certaines qui seront établies en exercices.

$f(x)$	$f'(x)$
$\dots$	$\dots$
x^n	nx^{n-1}
$\dots$	$\dots$
x^2	$2x$
x	1
1	0
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$
$\dots$	$\dots$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\dots$	$\dots$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\log_a\|x\|$	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x}$
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin^{-1}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1}(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$
$\sinh^{-1}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\cosh^{-1}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\tanh^{-1}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$