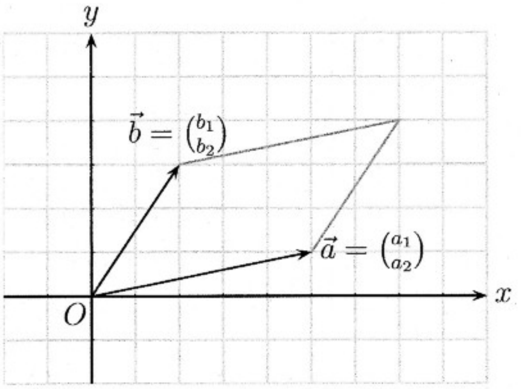
Chapitre 3

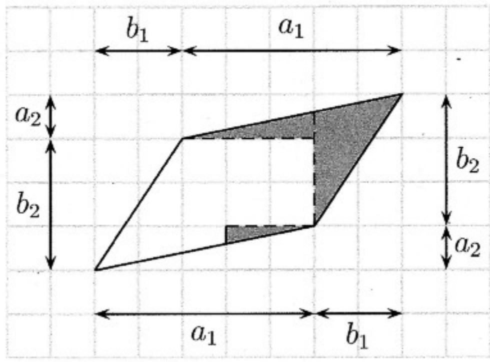
Déterminants

3.1 Les déterminants en dimension 2

3.1.1 Aire signée d'un parallélogramme

Ci-dessous, on voit que deux vecteurs engendrent un parallélogramme.



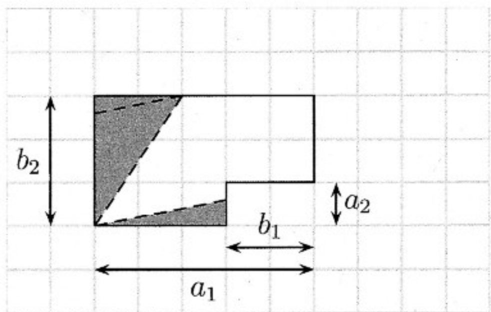


On va trouver l'aire de ce parallélogramme en déplaçant les morceaux ci-dessus le long des côtés du parallélogramme.

Dans cette situation ($a_1 \geqslant b_1$ et $b_2 \geqslant a_2$), on voit que l'aire du parallélogramme vaut

$$A = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Attention Si l'on avait, sur le dessin, échangé les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, ce nombre aurait été négatif. On parle donc d'aire signée !



Remarque sur la détection de vecteurs parallèles

On remarque que

$$\text{les vecteurs } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ sont parallèles} \iff a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

En effet, on vient de montrer que si $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, alors l'aire du parallélogramme est nulle et réciproquement. Cela est équivalent à dire que les vecteurs qui l'engendrent sont parallèles.

3.1.2 Systèmes de deux équations à deux inconnues

Il existe des problèmes mathématiques dans lesquels on doit résoudre des systèmes de deux équations à deux inconnues de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{array}\right.$$

On peut trouver des formules permettant de résoudre un tel système. Commençons par chercher x, pour cela on peut multiplier [1] la première ligne par b_2 et la deuxième par b_1. On obtient ainsi le système suivant.

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a_1b_2x & + & b_1b_2y & = & c_1b_2 \\ a_2b_1x & + & b_1b_2y & = & c_2b_1 \end{array}\right.$$

En soustrayant les deux équations, il vient l'équation $\boxed{(a_1b_2 - a_2b_1)\,x = (c_1b_2 - c_2b_1)}$.

On peut procéder d'une manière similaire [2] pour trouver y :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \cdot(-a_2) \\ \cdot(-a_1) \end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcrcl} -a_1a_2x & - & a_2b_1y & = & -a_2c_1 \\ -a_1a_2x & - & a_1b_2y & = & -a_1c_2 \end{array}\right.$$

En soustrayant, on obtient l'équation $\boxed{(a_1b_2 - a_2b_1)\,y = (a_1c_2 - a_2c_1)}$.

3.1.3 L'injectivité des homographies

Rappelons qu'une homographie est une fonction d'expression

$$f(x) = \frac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2} \qquad \text{avec} \qquad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

La condition $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ est exactement ce qu'il faut supposer pour que f soit injective et ainsi bijective (lorsqu'on prend le domaine image comme domaine d'arrivée).

En effet, on prend x_1 et x_2 dans le domaine de définition de f tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et on montre que $x_1 = x_2$.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{a_1x_1 + b_1}{a_2x_1 + b_2} = \dfrac{a_1x_2 + b_1}{a_2x_2 + b_2} & \Longrightarrow & (a_2x_2 + b_2)(a_1x_1 + b_1) = (a_2x_1 + b_2)(a_1x_2 + b_1) \\ & \Longrightarrow & a_1b_2x_1 + a_2b_1x_2 = a_2b_1x_1 + a_1b_2x_2 \\ & \Longrightarrow & (a_1b_2 - a_2b_1)x_1 = (a_1b_2 - a_2b_1)x_2 \\ & \overset{\text{ssi } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0}{\Longrightarrow} & x_1 = x_2 \end{array}$$

De plus lorsqu'on a $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, la fonction peut se simplifier.

En effet, une division euclidienne nous permet d'écrire la fonction f autrement :

$$\frac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2} = \frac{a_1}{a_2} - \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_2(a_2x + b_2)}$$

On voit bien que si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ alors la fonction est une constante qui n'est donc pas injective.

1. cela fonctionne même si $b_1 = 0$ ou $b_2 = 0$, car on n'établit que l'implication «$\Rightarrow$».
2. afin de retrouver le même coefficient devant y que celui trouvé devant x, on va multiplier la première équation par $-a_2$ et la deuxième par $-a_1$!

3.1.4 Ce qu'il y a de commun à ces trois problèmes

Dans les trois problèmes ci-dessus, on est face à des expressions de la forme suivante.

$$\boxed{a_1b_2 - a_2b_1}$$

C'est une raison suffisante pour définir une notion qui fait intervenir cette expression :

LE DÉTERMINANT !

Il est plus élégant de le définir dans le contexte de la géométrie, d'où l'apparition de vecteurs...

Définition

Soit $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ et $\vec{b} = \binom{b_1}{b_2}$ deux vecteurs du plan.

Le *déterminant* de ces deux vecteurs, noté $\det(\vec{a}, \vec{b})$, est défini comme suit.

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Attention Ici, les barres verticales ne sont pas des valeurs absolues, mais une notation pour indiquer qu'il s'agit d'un déterminant.

3.1.5 Retour aux systèmes de deux équations à deux inconnues

Grâce aux vecteurs, on peut écrire un système d'équations de manière plus compacte.

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a}x + \vec{b}y = \vec{c}$$

$$\text{avec } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

On peut aussi écrire les équations obtenues à la page précédente différemment en utilisant le déterminant.

$$\left\{\begin{array}{rcl} (a_1b_2 - a_2b_1)\ x & = & (c_1b_2 - c_2b_1) \\ (a_1b_2 - a_2b_1)\ y & = & (a_1c_2 - a_2c_1) \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \det(\vec{a}, \vec{b})\ x & = & \det(\vec{c}, \vec{b}) \\ \det(\vec{a}, \vec{b})\ y & = & \det(\vec{a}, \vec{c}) \end{array}\right.$$

En résumé On vient de montrer à la page précédente que

$$\vec{a}x + \vec{b}y = \vec{c} \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \det(\vec{a}, \vec{b})\ x & = & \det(\vec{c}, \vec{b}) \\ \det(\vec{a}, \vec{b})\ y & = & \det(\vec{a}, \vec{c}) \end{array}\right.$$

Cela signifie que si $(x; y)$ est un couple de nombres qui satisfait le système d'équations de gauche, alors il satisfait aussi le système de droite.

ATTENTION : la réciproque ("$\Leftarrow$") n'est pas vraie (voir les exercices ou le théorème de Cramer).

On peut tout de même affirmer que si $\det(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0$, alors le système de droite nous livre l'unique solution du système de gauche.

3.1.6 Les propriétés [3] du déterminant

Le déterminant $\det(\vec{a}, \vec{b})$ vérifie les propriétés suivantes.

1. **Propriétés de linéarité.**
   (a) $\det(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}) = \det(\vec{a}_1, \vec{b}) + \det(\vec{a}_2, \vec{b})$
   (b) $\det(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda \det(\vec{a}, \vec{b})$
   Ces deux propriétés mises ensemble donnent
   $$\det(\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2, \vec{b}) = \lambda_1 \det(\vec{a}_1, \vec{b}) + \lambda_2 \det(\vec{a}_2, \vec{b})$$
   On a aussi
   $$\det(\vec{a}, \lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2) = \lambda_1 \det(\vec{a}, \vec{b}_1) + \lambda_2 \det(\vec{a}, \vec{b}_2)$$
2. **Changement de signe par permutation.**
   $$\det(\vec{a}, \vec{b}) = -\det(\vec{b}, \vec{a})$$

Preuve

On sait maintenant (voir première page) que l'aire signée du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ et $\vec{b} = \binom{b_1}{b_2}$ est égale à $\det(\vec{a}, \vec{b})$.

Il est donc manifeste [4] que si on multiplie la longueur d'un côté du parallélogramme par un nombre λ, alors on multiplie son aire signée par le même nombre. C'est exactement ce que dit la propriété 1(b). La propriété 2 a déjà été constatée à la page 11.

Pour la propriété 1(a), on la vérifie par calcul. Pour cela, posons $\vec{a}_1 = \binom{a_1}{a_2}$ et $\vec{a}_2 = \binom{\alpha_1}{\alpha_2}$.

$$\begin{aligned}
\det(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}) &= \begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1 & b_1 \\ a_2 + \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1 + \alpha_1)b_2 - (a_2 + \alpha_2)b_1 \\
&= a_1b_2 - a_2b_1 + \alpha_1b_2 - \alpha_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix} \\
&= \det(\vec{a}_1, \vec{b}) + \det(\vec{a}_2, \vec{b})
\end{aligned}$$

□

Conséquence

Le déterminant s'annule si deux vecteurs sont les mêmes. C'est-à-dire que :

$$\det(\vec{a}, \vec{a}) = 0$$

En effet, c'est évident si on pense que le déterminant mesure l'aire signée du parallélogramme engendré par $\vec{a}$ et $\vec{a}$.

On peut aussi démontrer cette conséquence en utilisant le fait que le déterminant change de signe par permutation :

$$\det(\vec{a}, \vec{a}) = -\det(\vec{a}, \vec{a}) \iff 2\det(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \iff \det(\vec{a}, \vec{a}) = 0$$

3. Si vous vous demandez à quoi peuvent bien servir ces propriétés, alors qu'il est si simple de calculer un déterminant en dimension 2, c'est parce que ces propriétés sont utiles pour généraliser le déterminant en plus grande dimension (voir pages suivantes).

4. Si vous n'êtes pas convaincu, vérifiez les propriétés 1(b) et 2 par calcul direct (c'est-à-dire de la même façon que la propriété 1(a) est vérifiée dans le texte ci-dessus).

3.2 Les déterminants en dimension 3

On peut aussi parler de déterminant en dimension 3. Pour cela, reprenons notre point de vue géométrique. En dimension 3, les vecteurs ont 3 composantes et le déterminant aura 3 variables.

Notons $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, on définit le déterminant $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ par

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Il faut maintenant trouver une formule qui nous permet d'avoir des propriétés analogues à celles des déterminants en dimension 2. La formule est la suivante[5].

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= (a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2) - (a_2b_1c_3 - a_2b_3c_1) + (a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1) \\
&= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1
\end{aligned}$$

3.2.1 Propriétés du déterminant

On retrouve (la preuve est laissée au lecteur) des propriétés analogues à celles des déterminants en dimension 2.

1. **Propriétés de linéarité en chaque variable.**

$$\begin{aligned}
\det(\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) &= \lambda_1 \det(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + \lambda_2 \det(\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) \\
\det(\vec{a}, \lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2, \vec{c}) &= \lambda_1 \det(\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{c}) + \lambda_2 \det(\vec{a}, \vec{b}_2, \vec{c}) \\
\det(\vec{a}, \vec{b}, \lambda_1\vec{c}_1 + \lambda_2\vec{c}_2) &= \lambda_1 \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1) + \lambda_2 \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_2)
\end{aligned}$$

2. **Changement de signe par permutation et sa conséquence.**

$$\begin{aligned}
\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= -\det(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) \\
\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= -\det(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) \\
\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= -\det(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})
\end{aligned}$$

Conséquence : si on retrouve deux fois le même vecteur dans le déterminant, alors ce dernier est nul. Par exemple :

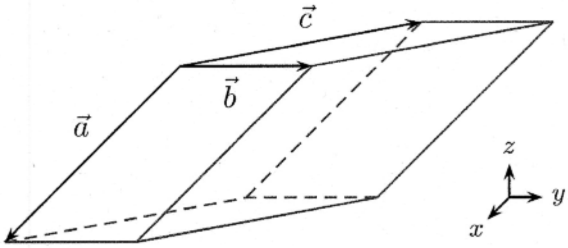
$$\det(\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}) = 0 \quad \text{ou} \quad \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}) = 0 \quad \text{ou} \quad \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}) = 0$$

---

5. Cette façon de faire à été développée par les mathématiciens Laplace et Lagrange vers 1770 et par Sarrus (1798-1861) !

3.2.2 Aire signée et volume signé

On a vu que le déterminant en dimension 2 est un outil pour calculer l'aire signée d'un parallélogramme. Il se trouve que le déterminant en dimension 3 permet de calculer le volume signé d'un parallélépipède (le volume sera la valeur absolue du volume signé) !



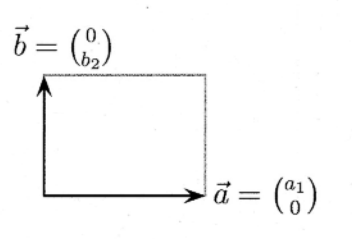
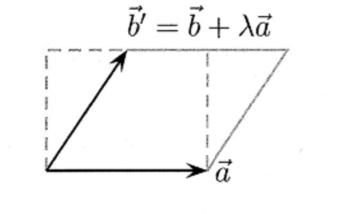
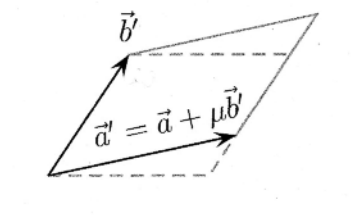
Le volume signé de ce parallélépipède est égal à $\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ et on peut le démontrer grâce aux propriétés du déterminant !

Afin de se rendre compte du fonctionnement de cette preuve, on va démontrer que l'aire signée du parallélogramme engendré par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ vaut $\det(\vec{a},\vec{b})$. Pour le parallélépipède, les arguments seront les mêmes, mais puisque, sur une feuille de papier, on ne voit pas très bien en 3 dimensions, il est préférable de réfléchir en 2 dimensions.

Preuve du fait que l'aire signée d'un parallélogramme est donnée par le déterminant en dimension 2

On procède par bande dessinée :

Tout parallélogramme peut se construire selon le mode d'emploi suivant.

Etape 1	Etape 2	Etape 3
		
On commence par dessiner un rectangle engendré par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.	Puis on ajoute au vecteur $\vec{b}$ un multiple du vecteur $\vec{a}$ pour obtenir un vecteur $\vec{b}'$.	Enfin, on ajoute au vecteur $\vec{a}$ un multiple du vecteur $\vec{b}'$.

On doit montrer que $\det(\vec{a}',\vec{b}')=A$ où A est l'aire signée du parallélogramme. Or, au cours de la transformation ci-dessus, on voit que A ne change jamais (la base et la hauteur du parallélogramme restent les mêmes), donc A est aussi l'aire signée du rectangle !

A l'étape 1, on voit que $\det(\vec{a},\vec{b})=\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2=A$.

On conclut en montrant que $\det(\vec{a}',\vec{b}')=A$ grâce aux propriétés du déterminant.

$$\begin{aligned}
\det(\vec{a}',\vec{b}') &= \det(\vec{a}+\mu\vec{b}',\vec{b}') = \det(\vec{a},\vec{b}')+\mu\underbrace{\det(\vec{b}',\vec{b}')}_{=0} = \det(\vec{a},\vec{b}') \\
&= \det(\vec{a},\vec{b}+\lambda\vec{a}) \\
&= \det(\vec{a},\vec{b})+\lambda\underbrace{\det(\vec{a},\vec{a})}_{=0} = \det(\vec{a},\vec{b})=A
\end{aligned}$$

□

3.2.3 Systèmes de trois équations à trois inconnues

Il existe des problèmes mathématiques dans lesquels on doit résoudre des systèmes de trois équations à trois inconnues (x, y et z) de la forme suivante.

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 \end{array} \right.$$

En posant $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$, on obtient l'équation vectorielle suivante.

$$(S) : \vec{a}x + \vec{b}y + \vec{c}z = \vec{d}$$

On isole les variables x, y et z en utilisant le fait que si, dans un déterminant, un vecteur apparaît plusieurs fois, alors le déterminant est nul. Cela nous permet de démontrer le résultat suivant.

Résultat

$$(S) : \vec{a}x + \vec{b}y + \vec{c}z = \vec{d} \quad \Longrightarrow \quad (T) : \left\{ \begin{array}{l} \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\ x = \det(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}) \\ \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\ y = \det(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}) \\ \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\ z = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) \end{array} \right.$$

Autrement dit, si un triplet $(x; y; z)$ satisfait le système (S), alors il satisfait aussi le système (T). La réciproque ("$\Leftarrow$") est fausse, mais on a tout de même le théorème suivant.

Théorème de Cramer [6]

1. Si $(x; y; z)$ est l'UNIQUE solution du système (T), alors $(x; y; z)$ est aussi l'UNIQUE solution de (S). C'est le cas lorsque $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$.
2. (T) n'a pas de solutions si et seulement si (S) n'a pas de solutions.
3. Tout triplet $(x; y; z)$ est solution du système (T) si et seulement si (S) a une infinité de solutions. Malheureusement, dans ce cas, le système (T) ne nous permet pas de décrire les solutions de (S).

Preuve du résultat

En appliquant la fonction $\det(., \vec{b}, \vec{c})$ de chaque côté de l'équation vectorielle (S), on démontre que :

$$\vec{a}x + \vec{b}y + \vec{c}z = \vec{d} \ \Rightarrow \ x \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})$$

En effet, c'est évident pour le terme de droite. Quant au terme de gauche, il découle des propriétés du déterminant :

$$\det(\vec{a}x + \vec{b}y + \vec{c}z, \vec{b}, \vec{c}) = x \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + y \det(\vec{b}, \vec{b}, \vec{c}) + z \det(\vec{c}, \vec{b}, \vec{c}) = x \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

En appliquant la fonction $\det(\vec{a}, ., \vec{c})$ à l'équation vectorielle (S), on obtient

$$\vec{a}x + \vec{b}y + \vec{c}z = \vec{d} \ \Rightarrow \ y \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c})$$

Et en appliquant la fonction $\det(\vec{a}, \vec{b}, .)$ à l'équation vectorielle (S), on obtient

$$\vec{a}x + \vec{b}y + \vec{c}z = \vec{d} \ \Rightarrow \ z \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$$

$\square$

6. Pour la preuve se référer au cours d'algèbre linéaire de troisième année.

3.3 Les déterminants en dimension 4 et plus

On peut aussi parler de déterminant en dimension plus grande que 3. On va juste se contenter de la dimension 4 qui fonctionne de manière analogue à la dimension 3. Pour les dimensions plus grandes que 4 cela fonctionnera toujours de manière analogue.

Reprenons notre point de vue géométrique. En dimension 4, les vecteurs ont 4 composantes et le déterminant aura 4 variables.

Notons $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$, on définit le déterminant $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ par :

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

La technique de développement selon la première colonne vue précédemment va, une fois encore, permettre de récupérer les propriétés des déterminants.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

3.3.1 Propriétés du déterminant

On retrouve (la preuve est laissée au lecteur) des propriétés analogues à celles des déterminants en dimensions 2 et 3.

1. **Propriétés de linéarité en chaque variable.**

$$\det(\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = \lambda_1 \det(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) + \lambda_2 \det(\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$$

$$\dots$$

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \lambda_1 \vec{d}_1 + \lambda_2 \vec{d}_2) = \lambda_1 \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}_1) + \lambda_2 \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}_2)$$

2. **Changement de signe par permutation et sa conséquence.**
Lorsqu'on permute deux vecteurs dans un déterminant, on en change le signe. Par exemples :

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = -\det(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) \quad \text{ou} \quad \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = -\det(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) \quad \text{etc.}$$

Conséquence : si on retrouve deux fois le même vecteur dans le déterminant, alors ce dernier est nul. Par exemple :

$$\det(\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \quad \text{ou} \quad \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = 0 \quad \text{ou} \quad \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = 0 \quad \text{etc.}$$

Même s'ils servent encore à calculer le volume signé de parallélépipèdes vivant en dimension 4 ou à résoudre des systèmes de 4 équations à 4 inconnues. Les déterminants en grandes dimensions sont surtout utilisés en algèbre linéaire (une introduction en algèbre linéaire sera donnée en troisième année).