Chapitre 11

L'ensemble de Mandelbrot et les ensembles de Julia

11.1 Préliminaires

11.1.1 Suites de nombres complexes

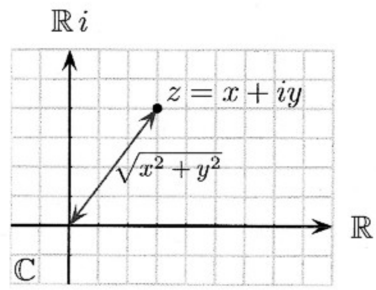
Une *suite de nombres complexes* est une liste ordonnée de nombres complexes, notée $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots)$.

11.1.2 Module et inégalité triangulaire

Soit $z = x+iy$ un nombre complexe. On définit le *module* de z par

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Il s'agit de la distance du nombre z à l'origine dans le plan complexe. Ainsi $|z|$ est un nombre réel positif ou nul, qui n'est nul que pour $z = 0$. Cette définition prolonge celle de la valeur absolue.

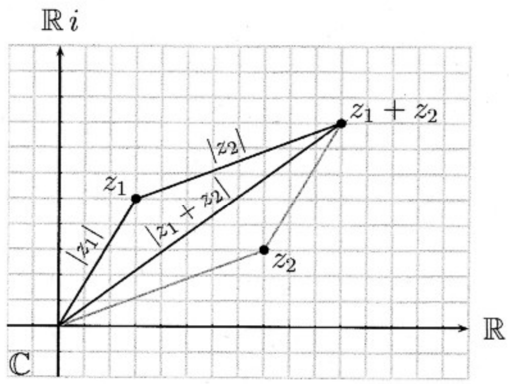


Inégalité triangulaire

La formule ci-dessous s'appelle l'*inégalité triangulaire.*

$$\boxed{|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \quad \text{pour tout} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}}$$

Cela signifie qu'il est toujours plus court d'aller directement à $z_1 + z_2$ que de passer d'abord par z_1 (ou z_2). Cela revient au même lorsque les points sont alignés !



11.1.3 Inégalité triangulaire renversée (ITR)

On a $|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_2|$ grâce à l'inégalité triangulaire. Ainsi

$$\boxed{|z_1 + z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|}$$

Il s'agit de l'*inégalité triangulaire renversée.*

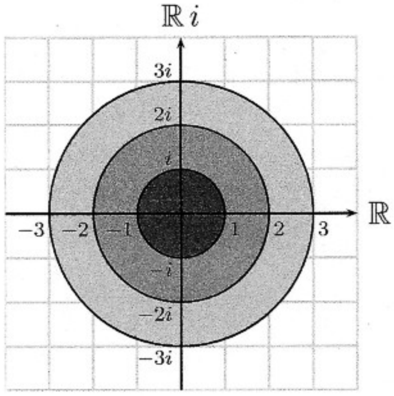
11.1.4 Boules centrées à l'origine

L'ensemble des nombres complexes dont la distance à l'origine est plus petite ou égale à un rayon donné r est noté $B_{\leqslant r}(0)$.

Notation ensembliste

$$B_{\leqslant r}(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}$$

Ci-contre, les boules $B_{\leqslant 1}(0)$, $B_{\leqslant 2}(0)$ et $B_{\leqslant 3}(0)$ sont représentées dans le plan complexe.



11.1.5 Suites bornées

Une suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* s'il existe un rayon r pour lequel tous les éléments de la suite sont dans $B_{\leqslant r}(0)$, c'est-à-dire $z_n \in B_{\leqslant r}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Autrement dit, une suite n'est pas bornée si et seulement si

$$|z_n| \longrightarrow +\infty \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$

C'est-à-dire, une suite est bornée si et seulement si elle ne s'éloigne pas irrémédiablement de l'origine (ou de tout autre point).

11.1.6 Notation pour les compositions de fonctions

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction complexe. On note $f^{(\circ n)}$ pour la fonction $f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f$ (avec n fois la fonction f).

Autrement dit

$$f^{(\circ n)}(z) = \underbrace{(f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n \text{ fois la fonction } f}(z) = \underbrace{f(f(\cdots f(z)))}_{n \text{ fois la fonction } f}$$

Par défaut, on pose $f^{(\circ 0)}(z) = z$ («si on n'applique aucune fois la fonction f à z, on obtient z, c'est-à-dire que l'on ne fait rien»).

11.2 L'ensemble de Mandelbrot

Pour chaque $c \in \mathbb{C}$, on se donne la fonction

$$f_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C};\ z \mapsto z^2 + c$$

Pour définir l'ensemble de Mandelbrot, on examine les suites de la forme

$$s_c = \left(f_c^{(\circ n)}(0)\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(0,\ f_c(0),\ f_c(f_c(0)),\ \ldots\ ,\ f_c^{(\circ n)}(0),\ \ldots\right)$$

Deux cas exclusifs se produisent.

1. La suite s_c est bornée.
2. La suite s_c n'est pas bornée.

L'ensemble de Mandelbrot, noté M, est l'ensemble des nombres complexes $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels les suites s_c sont bornées. En termes mathématiques

$$M = \{c \in \mathbb{C} : s_c \text{ est bornée}\}$$

11.2.1 Une première propriété de l'ensemble de Mandelbrot

On va montrer que l'ensemble de Mandelbrot est contenu dans la boule de rayon 2 centrée à l'origine. Mais pour établir ce résultat, on a besoin d'un lemme. Ce lemme servira par la suite à établir un critère permettant de dessiner l'ensemble de Mandelbrot sur un ordinateur.

Lemme

Soit $c \in \mathbb{C}$.
Supposons qu'il existe un terme, appelé z, de la suite s_c qui satisfait

$$H_1 : |z| \geqslant |c| \quad \text{et} \quad H_2 : |z| > 2$$

Alors, la suite s_c n'est pas bornée.

Preuve

Posons $\alpha = |z| - 1$. Par H_2, on a $\alpha > 1$.
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\boxed{\left|f_c^{(\circ n)}(z)\right| \geqslant \alpha^n |z| \geqslant |z| \geqslant |c|}$$

Ancrage : c'est évident pour $n = 0$, car on a

$$|z| \geqslant |z| \geqslant |z| \overset{H_1}{\geqslant} |c|$$

Pas de récurrence : on montre si c'est vrai pour n, alors c'est vrai pour $n + 1$.

$$\begin{aligned}
\left|f_c^{(\circ(n+1))}(z)\right| &= \left|f_c\left(f_c^{(\circ n)}(z)\right)\right| = \left|\left(f_c^{(\circ n)}(z)\right)^2 + c\right| \\
&\overset{\text{ITR}}{\geqslant} \left|\left(f_c^{(\circ n)}(z)\right)^2\right| - |c| \\
&\overset{HR}{\geqslant} \left|\left(f_c^{(\circ n)}(z)\right)^2\right| - \left|f_c^{(\circ n)}(z)\right| = \left|f_c^{(\circ n)}(z)\right|^2 - \left|f_c^{(\circ n)}(z)\right| \\
&= \left(\left|f_c^{(\circ n)}(z)\right| - 1\right)\left|f_c^{(\circ n)}(z)\right| \\
&\overset{HR}{\geqslant} (|z| - 1)\left|f_c^{(\circ n)}(z)\right| = \alpha \left|f_c^{(\circ n)}(z)\right| \\
&\overset{HR}{\geqslant} \alpha \cdot \alpha^n |z| = \alpha^{n+1}|z| \\
&\overset{\alpha>1}{\geqslant} |z| \overset{H_1}{\geqslant} |c|
\end{aligned}$$

Donc

$$|f_c^{(\circ n)}(z)| \geqslant \alpha^n |z| \longrightarrow +\infty \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty$$

Par conséquent, $|f_c^{\circ n}(z)| \longrightarrow +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
Cela montre que la suite $s_c = (0, f_c(0), \ldots, z, \ldots, f_c^{(\circ n)}(z), \ldots)$ n'est pas bornée.

$\square$

Propriété 1

L'ensemble de Mandelbrot est contenu dans la boule de rayon 2 centrée à l'origine.
En d'autres termes :

$$M \subset B_{\leqslant 2}(0)$$

Preuve

Par contraposée, on suppose que $c \notin B_{\leqslant 2}(0)$ et on montre que $c \notin M$. Autrement dit, on montre que chaque suite s_c, avec $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| > 2$, est non bornée.

Soit donc $c \in \mathbb{C}$ tel $|c| > 2$. On a

$$s_c = (0,\ c,\ f_c(c),\ \ldots)$$

Le deuxième terme, c, satisfait les hypothèses du lemme (H_1 : $|c| \geqslant |c|$ est banal et H_2 : $|c| > 2$ est l'hypothèse de départ de cette propriété).

Ainsi, par le lemme, la suite s_c n'est pas bornée ! □

11.2.2 En route vers les représentations graphiques

Afin de savoir si, pour chaque nombre complexe $c \in \mathbb{C}$, la suite s_c est bornée ou non, on va établir un critère permettant de savoir si une suite va être bornée ou non.

La première propriété nous dit qu'aucune suite s_c avec $|c| > 2$ ne sera bornée. Cela ne suffit pas pour trouver un bon critère, mais cela peut nous en donner une idée.

Critère pour que s_c ne soit pas bornée

Soit $c \in \mathbb{C}$. On calcule chaque terme de la suite s_c un à un. Si à un moment donné, on obtient un élément de la suite s_c qui est à distance plus grande que 2 de l'origine, alors la suite s_c ne sera pas bornée.

Preuve

Deux cas se présentent.

1. $|c| > 2$.

   Dans ce cas, le deuxième terme de la suite s_c est c qui satisfait $|c| > 2$. On applique le lemme pour $z = c$ afin de montrer que s_c n'est pas bornée.

2. $|c| \leqslant 2$.

   Notons z le premier élément de la suite s_c qui satisfait $|z| > 2$. Dans ce cas, on a

   $$|z| > 2 \geqslant |c|$$

   Ainsi, z satisfait les hypothèses du lemme et, par conséquent, la suite s_c n'est pas bornée.

□

Remarque évidente

La réciproque est vraie puisque si la suite s_c n'est pas bornée, alors il existera un élément de la suite qui est à distance plus grande que 2 de l'origine.

11.2.3 Algorithme en Python

Voici le programme `Python` qui permet de créer les images se trouvant dans la suite de ce document (à quelques détails près pour la palette de couleur). Il commence par l'importation des modules `Image` et `ImageDraw` qui nécessitent la libraire `PIL`.

```
import Image, ImageDraw

def mandelbrot(c,lim) :
    z = 0
    compteur = 0
    while ( abs(z) <= 2.0 and compteur < lim ) :
        z = z**2 + c
        compteur = compteur + 1
    return compteur

def dessineMandelbrot(largeur,hauteur,lim) :
    im = Image.new("RGB", (largeur, hauteur))
    draw = ImageDraw.Draw(im)

    deltaR  = complex((zB.real - zA.real)/largeur, 0)
    deltaRi = complex(0, (zB.imag - zA.imag)/hauteur)
    for y in range (0, hauteur):
        for x in range (0, largeur):
            nb = int(255 - 2.55*mandelbrot(zA + x*deltaR + y*deltaRi, lim))
            draw.point((x, hauteur-1-y), (nb,nb,nb))

    im.save("mandelbrot.png", "PNG")

###  Programme principal  ###
zA = complex(-2.0,-2.0)
zB = complex( 2.0, 2.0)
largeur = 500
hauteur = 500
lim     = 100
dessineMandelbrot(largeur,hauteur,lim)
```

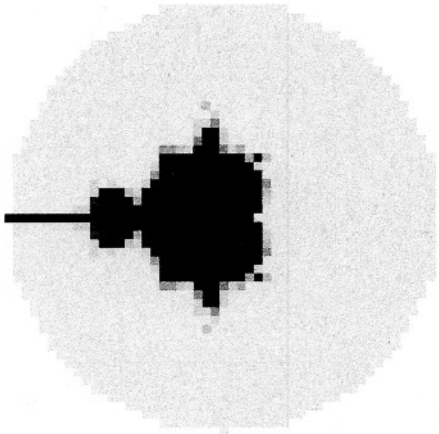
Dans le programme principal, on trouve la définition du *cadre* donné par le coin inférieur gauche `zA` et le coin supérieur droit `zB`. La résolution de l'image est donnée par `hauteur` et `largeur`.

La fonction `mandelbrot` calcule (à l'aide du `compteur`) le nombre de termes de la suite s_c qui sont à distance plus petite ou égale à 2 de l'origine. Bien sûr, si la suite est bornée, le critère indique que la suite reste dans la boule $B_{\leqslant 2}(0)$. Dans ce cas, le `compteur` ira à l'infini. Or, un ordinateur ne pouvant pas effectuer une infinité de calculs, il faut fixer une limite `lim` à partir de laquelle on ne calcule pas le terme suivant de la suite s_c.

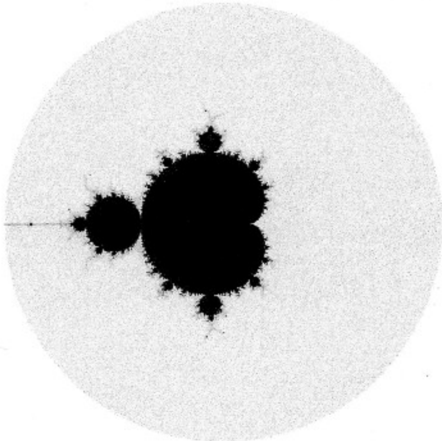
Puis la commande `dessineMandelbrot` va découper le *cadre* en morceaux. Dans chaque zone, un nombre complexe c sera choisi et le `compteur` sera calculé pour ce nombre. La zone correspondante sera ainsi coloriée selon la valeur du `compteur`. Plus vite la suite quitte la boule $B_{\leqslant 2}(0)$, plus la couleur sera claire. Un carré noir ne signifie pas que la suite correspondante au nombre c choisi dans ce carré sera bornée, cela signifie qu'avant la limite fixée (ici : `lim` $= 100$), la suite sera toujours dans la boule $B_{\leqslant 2}(0)$.

11.2.4 Représentations graphiques de l'ensemble de Mandelbrot

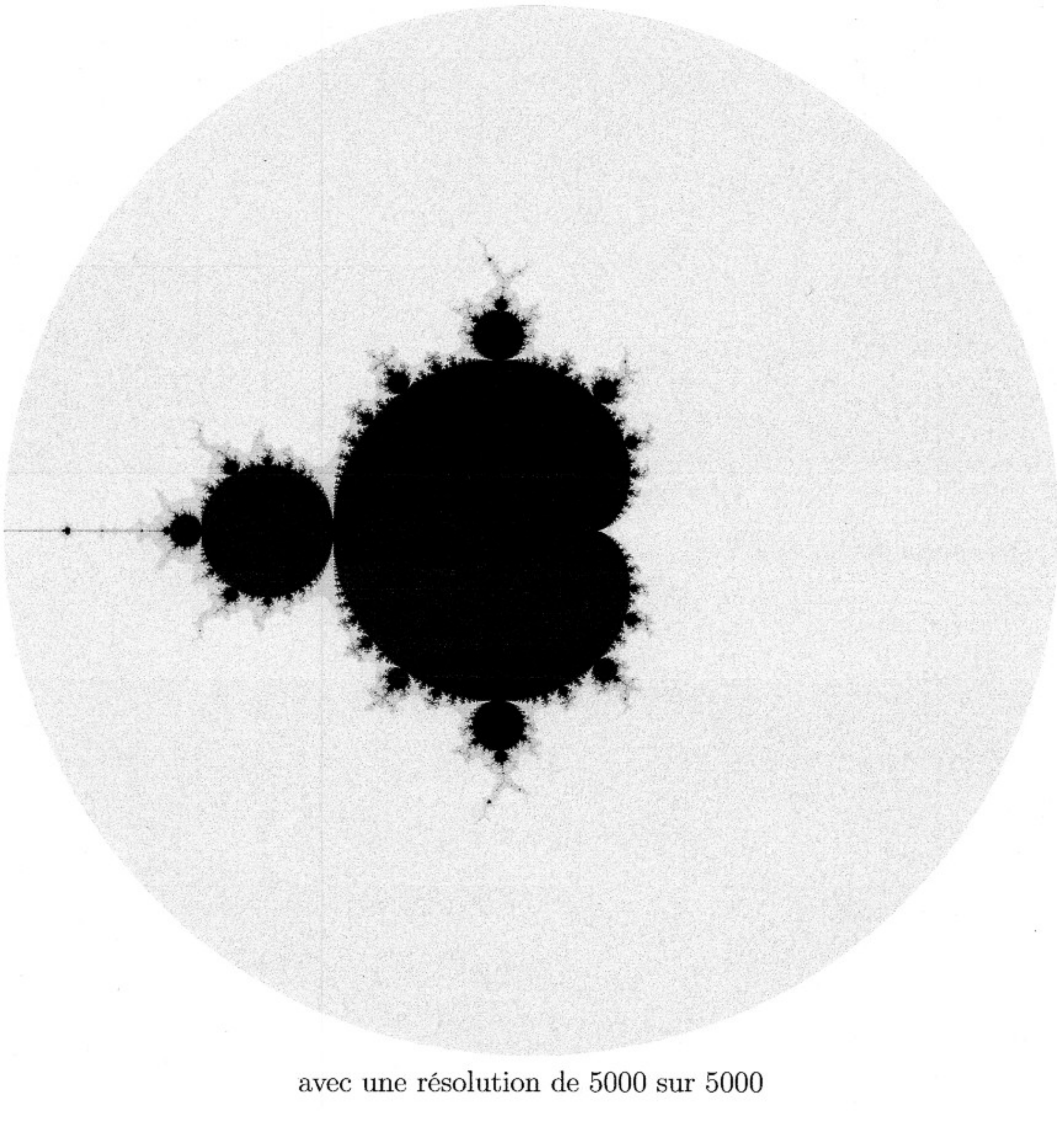
Voici plusieurs représentations effectuées à l'aide du programme précédent. En gris clair, on voit la boule $B_{\leqslant 2}(0)$.



avec une résolution de 50 sur 50



avec une résolution de 500 sur 500



avec une résolution de 5000 sur 5000

11.2.5 Une autre propriété de l'ensemble de Mandelbrot

Propriété 2 (sans preuve)

Les nombres réels contenus dans l'ensemble de Mandelbrot sont exactement les nombres de -2 à $1/4$. Autrement dit :

$$M \cap \mathbb{R} = \left[-2, \tfrac{1}{4}\right]$$

Cette propriété répond aux incertitudes soulevées dans le premier exercice.

Remarque

Les représentations graphiques sont des approximations de l'ensemble de Mandelbrot. Selon le choix du *cadre*, l'ensemble $\left[-2, \frac{1}{4}\right]$ pourrait ne pas apparaître pas comme il le devrait. C'est le cas, par exemple, si on prend $z_A = -2 - 1.9i$ et $z_B = 2 + 2i$ avec une résolution de 500.

11.3 Les ensembles de (Gaston) Julia

Ces ensembles sont construits d'une manière similaire à celui de Mandelbrot.

Pour chaque $c \in \mathbb{C}$, on se donne la fonction

$$f_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C};\ \ z \mapsto z^2 + c$$

Il y a un ensemble de Julia pour chaque nombre complexe $c \in \mathbb{C}$. Pour définir l'ensemble de Julia correspondant au nombre c, on examine, pour chaque $z \in \mathbb{C}$, les suites de la forme

$$s_c(z) = \left(f_c^{(\circ n)}(z)\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(z,\ f_c(z),\ f_c(f_c(z)),\ \ldots\ ,\ f_c^{(\circ n)}(z),\ \ldots\right)$$

Deux cas exclusifs se produisent.

1. La suite $s_c(z)$ est bornée.
2. La suite $s_c(z)$ n'est pas bornée.

L'ensemble de Julia associé au nombre complexe c, noté J_c, est l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels les suites $s_c(z)$ sont bornées. En termes mathématiques

$$J_c = \{z \in \mathbb{C} : s_c(z) \text{ est bornée}\}$$

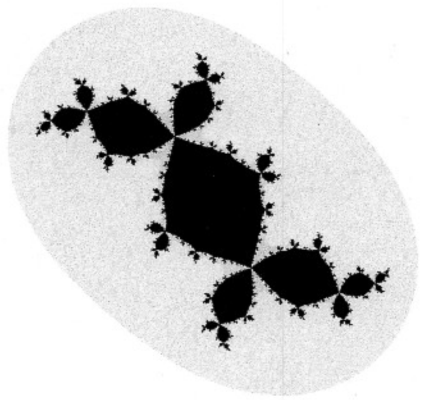
Pour représenter ces ensembles, on utilise le même critère que pour l'ensemble de Mandelbrot (il faut tout de même adapter les preuves, mais ceci est une autre histoire...).

Voici l'algorithme permettant de calculer le `compteur` pour les ensembles de Julia sous `Python`.

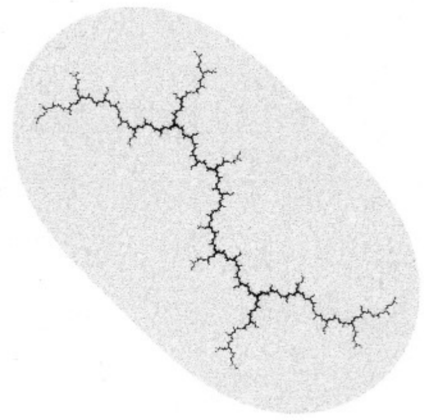
```
def julia(z0,c,lim) :
    z = z0
    compteur = 0
    while ( abs(z) <= 2.0 and compteur < lim ) :
        z = z**2 + c
        compteur = compteur + 1
    return compteur
```

La programmation de la fonction `dessineJulia` est laissée au lecteur. Il s'agit simplement de réadapter la fonction `dessineMandelbrot` donnée précédemment.

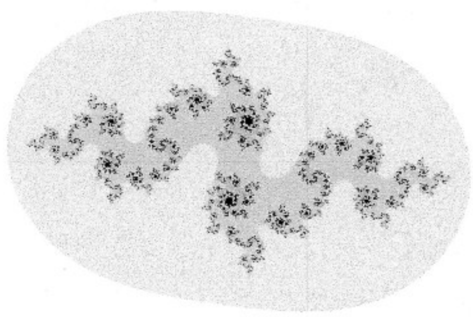
11.3.1 Représentations graphiques d'ensembles de Julia



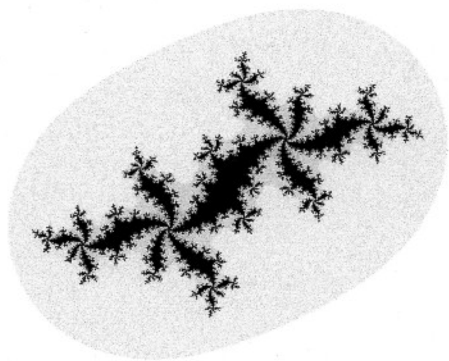
$c = -0.123 + 0.745i$



$c = i$



$c = -0.85 + 0.25i$



$c = -0.5 - 0.6i$

Le lecteur désirant visualiser ces ensembles (ou de manière quasi instantanée, ce qui est pratique pour faire des zooms successifs) peut se rendre sur le site suivant où se trouve une sympathique applet Java.

`http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/julia/explorer.html`

L'auteur y définit l'ensemble de Mandelbrot et les ensembles de Julia à l'aide de la fonction $f_c(z) = z^2 - c$, cela a pour effet de produire une symétrie sur notre ensemble de Mandelbrot, mais cela ne le change pas outre mesure.

Il y a aussi le chapitre 6 ($7'15''$) du merveilleux documentaire qui se trouve sur le site

`http://www.dimensions-math.org/Dim_reg_F.htm`