Chapitre 2

Ensembles, nombres et calcul algébrique

2.1. Ensembles et sous-ensembles

Définition

Un *ensemble* est une collection d'*éléments*. N'importe quel objet (mathématique ou non) peut être considéré comme un élément d'un ensemble (y compris un ensemble !). Lorsqu'on énumère les éléments d'un ensemble, on note ses éléments entre accolades. Par exemple, l'ensemble E des nombres de 0 à 10, y compris, se note de la manière suivante :

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Les mathématiciens utilisent le symbole $\in$ pour dire qu'un élément *appartient à* un ensemble. Lorsqu'un élément n'appartient pas à un ensemble, on utilise le symbole $\notin$. Par exemple,

$$0 \in E, \qquad 5 \in E, \qquad \text{mais} \quad 15 \notin E$$

Néanmoins, lorsque les objets ne sont pas décrits de façon explicite, mais dépendent d'une condition, on utilise une notation légèrement plus sophistiquée. Par exemple, on traduit la phrase

$$\text{«}\underbrace{F\text{ est}}_{F=}\text{ l'}\underbrace{\text{ensemble}}_{\{...\}}\text{ des }\underbrace{\text{éléments de }E}_{\substack{n \in E \\ \text{on donne un nom général} \\ \text{aux éléments de l'ensemble}}}\ \underbrace{\text{tels que}}_{:}\ \underbrace{\text{leur carré est plus grand ou égal à 35}}_{\substack{n^2 \geqslant 35 \\ \text{on écrit la condition à l'aide d'une formule} \\ \text{grâce au fait qu'on a donné un nom aux éléments}}}\text{»}$$

par

$$F = \{n \in E : n^2 \geqslant 35\}$$

On constate, en calculant les carrés des éléments de E, que $F = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

Définition

Si A et B sont des ensembles, on dit que A est un *sous-ensemble de* B lorsque chaque élément de A appartient à l'ensemble B.

En reprenant l'exemple ci-dessus, on voit que l'ensemble F est un sous-ensemble de l'ensemble E.

$$F = \{n \in E : n^2 \geqslant 35\} = \{6, 7, 8, 9, 10\} \quad \text{est un sous-ensemble de } E$$

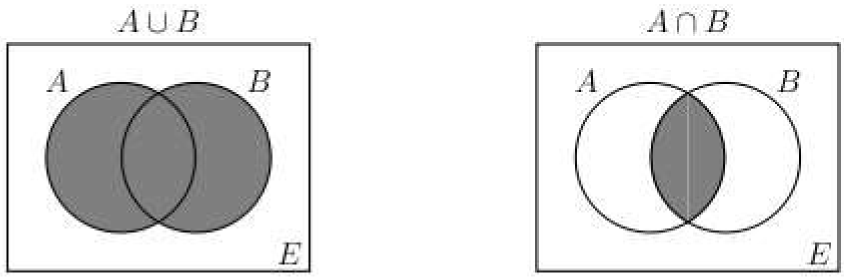
2.2. Opérations sur les ensembles

Définition

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

On définit les sous-ensembles *réunion* $A \cup B$ et *intersection* $A \cap B$ comme suit.

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{e \in E : e \in A \text{ ou } e \in B\} \\ A \cap B &= \{e \in E : e \in A \text{ et } e \in B\} \end{aligned}$$

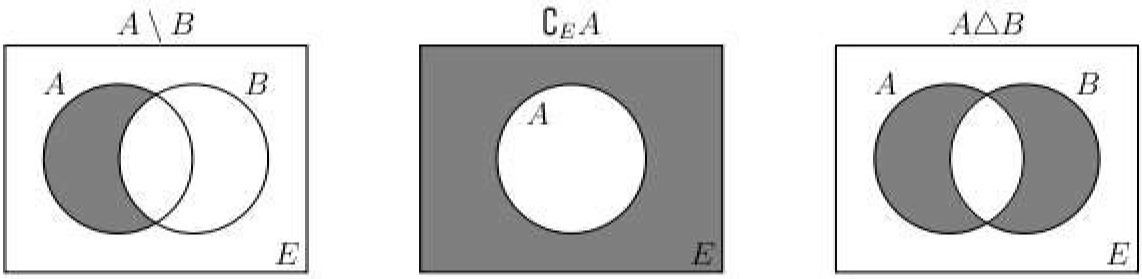


Définition

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

On définit les sous-ensembles *différence* $A \setminus B$, *complémentaire de* A *dans* E, noté $\complement_E A$, et *différence symétrique* $A \triangle B$ comme suit.

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{e \in E : e \in A \text{ et } e \notin B\} \\ \complement_E A &= \{e \in E : e \notin A\} \\ A \triangle B &= \{e \in E : e \in A \text{ ou (exclusif) } e \in B\} \end{aligned}$$



Définition

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

1. Si l'ensemble A ne contient aucun élément, on dit que A est vide et on utilise la notation $A = \emptyset$ où $\emptyset$ est *l'ensemble vide*.
2. On dit que A et B sont *disjoints* si $A \cap B = \emptyset$.

Convention

L'ensemble vide est contenu dans tous les ensembles.

Cela signifie que la proposition $\emptyset \subset A$ est considérée comme vraie quelque soit l'ensemble A.

2.3. Les ensembles de nombres

Les mathématiciens ont classé les nombres dans des ensembles, appelés *ensembles de nombres*.

Tout d'abord, on a les *nombres naturels*. C'est eux que l'on utilise la plupart du temps pour compter (des objets, de l'argent, etc.).

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

Historiquement, le zéro n'est pas venu tout de suite. Il a été inventé en Orient et importé par Fibonacci au début du XIII$^{\text{e}}$ siècle.

Ensuite, les nombres négatifs sont apparus et, mis ensemble avec les nombres naturels, ont formé l'ensemble des *nombres entiers*. Moins utilisés que les nombres naturels dans la vie de tous les jours, on les trouve notamment dans l'expression de la température (en degré Celsius). Leur présence permet à la soustraction d'exister quelque soit les nombres que l'on soustrait : en effet, sans eux, $2 - 3$ n'existerait pas.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Construits à partir des nombres entiers, les *nombres rationnels* ou *fractions*, sont très importants. On les utilise tous les jours lorsqu'on parle de centimètres, de décilitres, de centièmes de seconde, de moitié, de tiers, etc. Grâce à eux on peut diviser n'importe quel nombre par un nombre non nul.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

En termes mathématiques a est le *numérateur* (vient du mot numéro ou nombre, car il compte) et b est le *dénominateur* (vient du mot dénommer, car il correspond à un nom comme demi, tiers, dixième, etc.).

Finalement, il y a des nombres qui ne sont pas des fractions. Ce sont les *nombres irrationnels*. Découverts par les Grecs (qui ont eu de la peine à en accepter l'existence), ils apparaissent par exemple lorsqu'on étudie la longueur des côtés d'un triangle, le périmètre d'un cercle ou encore en calculant des intérêts bancaires. Réunis avec les nombres rationnels, ils forment l'ensemble des *nombres réels*.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \left\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi, e, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ldots\right\}$$

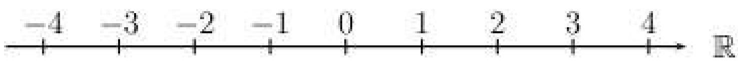
Contrairement aux ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable, c'est-à-dire que l'on ne peut pas énumérer les nombres réels.

On a les inclusions d'ensembles suivantes :

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

2.3.1. La droite réelle

On représente les nombres réels par une droite, appelée la *droite réelle*.



2.3.2. Ecriture décimale

L'*écriture décimale* permet de représenter TOUS les nombres réels d'une façon agréable, mais qui n'est en général PAS EXACTE, ni unique (car $0.\overline{9} = 1$). Cette écriture permet de placer avec une précision relative n'importe quel nombre réel sur la droite réelle. Voici quelques nombres écrits sous forme décimale :

$$2 = 2.0 \qquad \frac{2}{5} = 0.4 \qquad \frac{1}{8} = 0.125 \qquad \frac{2}{3} = 0.\overline{6} \qquad \frac{5}{13} = 0.\overline{384615} \qquad \sqrt{2} = 1.414213\ldots$$

Les nombres rationnels peuvent s'écrire sous forme de nombres décimaux limités (comme $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{8}$) ou périodiques (comme $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{13}$), contrairement aux nombres irrationnels dont le développement décimal est TOUJOURS infini et non-périodique (comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ou aussi $\pi = 3.14159265\ldots$).

2.3.3. Notation scientifique

La *notation scientifique* demande que l'on note les nombres non nuls comme ceci : $\pm\, x \cdot 10^n$ avec $1 \leqslant x < 10$ ($x \in \mathbb{R}$) et $n \in \mathbb{Z}$. En d'autres termes, on écrit le premier chiffre non nul du nombre suivi d'une virgule et des chiffres suivants, ensuite on calibre le nombre n afin d'avoir le nombre désiré (placement de la virgule). Le nombre de chiffres écrits est appelé *le nombre de chiffres significatifs*. Il est en général fixé à l'avance soit par l'enseignant, soit par le contexte. Afin de raccourcir l'écriture la plupart des calculatrices écrivent :

$$\pm\, x\, \mathtt{E}\, n \quad \text{au lieu de} \quad \pm\, x \cdot 10^n$$

Exemples :

nombre exact	nombre décimal arrondi	notation scientifique	nb de chiffres significatifs
2	2	$2 \cdot 10^0$	1
$\frac{1}{2}$	0.50	$5.0 \cdot 10^{-1}$	2
$-\frac{2}{3}$	-0.66667	$-6.6667 \cdot 10^{-1}$	5
$\frac{40}{3}$	13.33	$1.333 \cdot 10^1$	4
$\sqrt{13}$	3.6056	$3.6056 \cdot 10^0$	5
2^{20}	$1'048'576$	$1.048576 \cdot 10^6$	7
$(-2)^{49}$	$-5629499534\cdots ?$	$-5.629499534 \cdot 10^{14}$	10
3^{100}	$5153775207\cdots ?$	$5.1537752 \cdot 10^{47}$	8
$\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$	$0.0000000\cdots ?$	$1.940325 \cdot 10^{-48}$	7

Comme on le voit la notation scientifique permet de se donner un ordre de grandeur du nombre en question. Plutôt superflue dans les premiers exemples, elle est ESSENTIELLE dans les derniers exemples !

2.4. Calcul arithmétique et algébrique

Le calcul arithmétique consiste à prendre des nombres et exécuter sur ces derniers des opérations. Arrivé au lycée, chaque élève est capable d'additionner, de soustraire, de multiplier et de diviser des nombres entiers.

Le calcul algébrique consiste à manipuler des expressions littérales (c'est-à-dire avec des nombres et des lettres qui représentent des nombres). Le calcul algébrique est pratique et économe : il permet d'éviter le tâtonnement lors de la résolution de problèmes divers et d'appliquer des déductions logiques inspirée du calcul arithmétique afin de résoudre ces problèmes. De plus, si des données sont variables, le calcul algébrique permet d'exprimer les éventuelles solutions en fonction de ces données.

La règle d'or est la suivante :

> La présence de lettres dans un calcul ne change rien à la façon de calculer. Une lettre ne fait que représenter un nombre quelconque !

On peut décrire les différentes règles de calcul par des expressions algébriques. Par exemple, l'addition satisfait la règle de calcul suivante :

$$a + b = b + a$$

Cela signifie que si a et b sont deux nombres réels quelconques (qui pourraient même être égaux), alors le calcul de $a + b$ donne la même réponse que le calcul de $b + a$.

2.4.1. Règles concernant les fractions

L'amplification, la simplification et l'irréductibilité d'une fraction

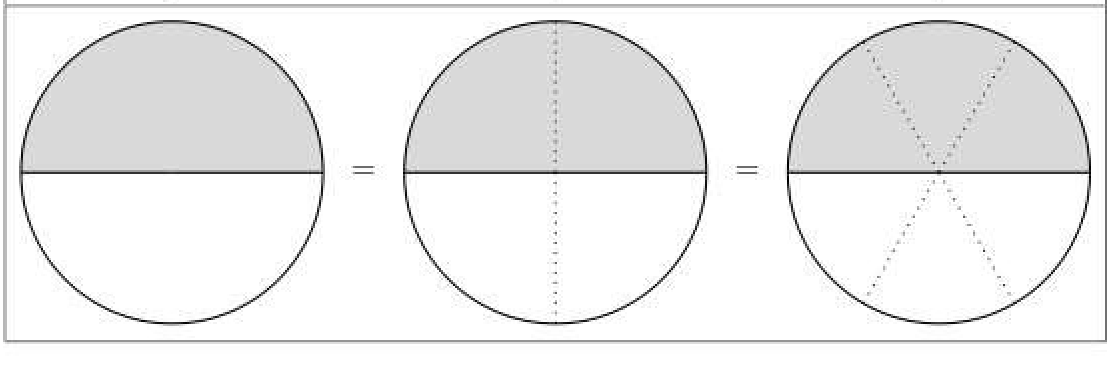
On a la règle suivante :

$$\frac{a}{m} = \frac{a \cdot n}{m \cdot n}$$

En lisant de gauche à droite, on *amplifie* la fraction. En lisant de droite à gauche, on *simplifie* la fraction. On dit qu'une fraction est *irréductible* si on ne peut pas la simplifier.

Voici 3 fractions qui représentent le nombre 0.5. Seule celle de gauche est irréductible.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$



Remarque fondamentale. Un même nombre peut être représenté par plusieurs fractions, mais par une seule fraction irréductible.

L'addition et la soustraction de fractions

Lorsqu'on désire additionner ou soustraire deux fractions, il faut respecter le principe suivant :

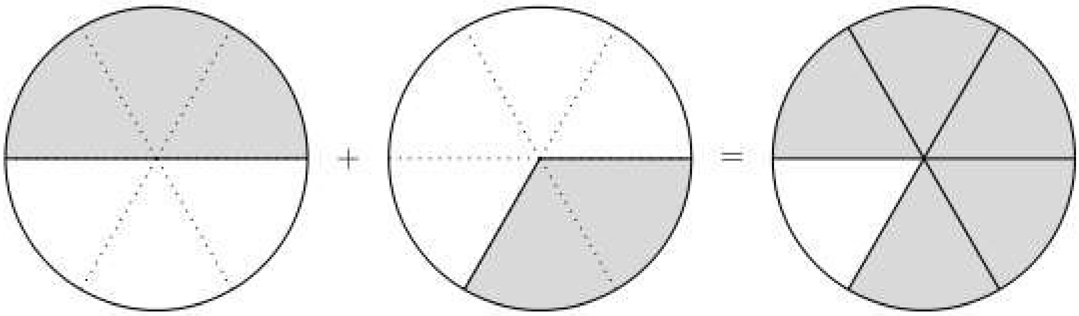
> Avant d'additionner ou de soustraire deux fractions, on doit s'assurer qu'elles soient au même dénominateur ! Si ce n'est pas le cas, alors on les mets au même dénominateur en les amplifiant.

On a ensuite les règles suivantes :

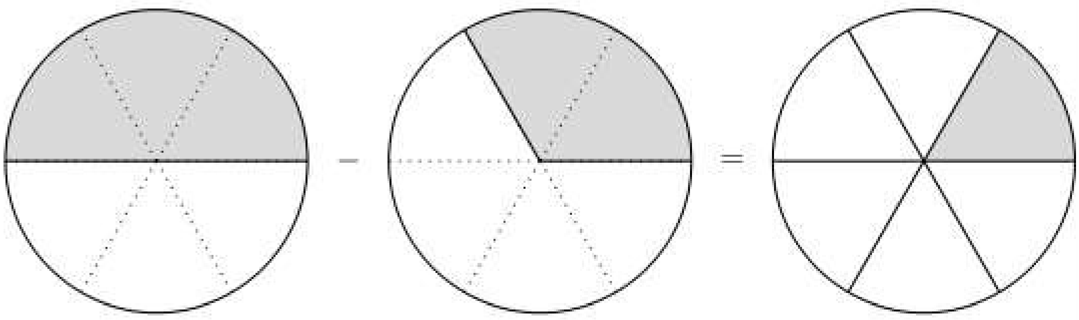
$$\boxed{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}} \qquad \boxed{\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}}$$

Ces règles s'illustrent parfaitement sur l'exemple suivant :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \overset{\text{amplification}}{=} \frac{3}{6}+\frac{2}{6} \overset{\text{addition}}{=} \frac{5}{6}$$



$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3} \overset{\text{amplification}}{=} \frac{3}{6}-\frac{2}{6} \overset{\text{soustraction}}{=} \frac{1}{6}$$



Le point du vue du calcul algébrique

Même si les calculs peuvent paraître plus abstraits, le principe reste exactement le même, comme on le voit sur les deux exemples suivants :

a) $$\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x-2} \overset{\text{ampl.}}{=} \frac{3(x-2)}{(x+1)(x-2)}-\frac{2(x+1)}{(x-2)(x+1)} \overset{\text{soustr.}}{=} \frac{3(x-2)-2(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$\overset{\text{simpl.}}{=} \frac{3x-6-(2x+2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x-8}{(x+1)(x-2)}$$

b) $$\frac{3}{2(x+1)}+\frac{2}{(x+1)^2} \overset{\text{ampl.}}{=} \frac{3(x+1)}{2(x+1)^2}+\frac{4}{2(x+1)^2} \overset{\text{add.}}{=} \frac{3(x+1)+4}{2(x+1)^2} = \frac{3x+7}{2(x+1)^2}$$

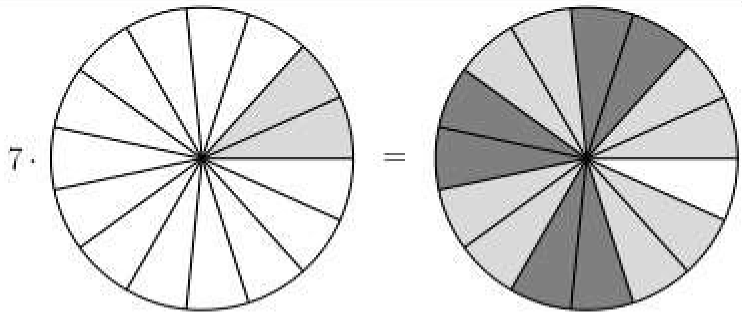
La multiplication de fractions

On va établir deux règles qui nous permettrons de déduire la règle de la multiplication de deux fractions.

Règle 1	Cas particulier	Moralité du cas particulier
$a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$	$a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$	multiplier a par $\frac{1}{b}$ revient à diviser a par b

Pour mieux comprendre la règle 1, on peut contempler la situation ci-dessous.

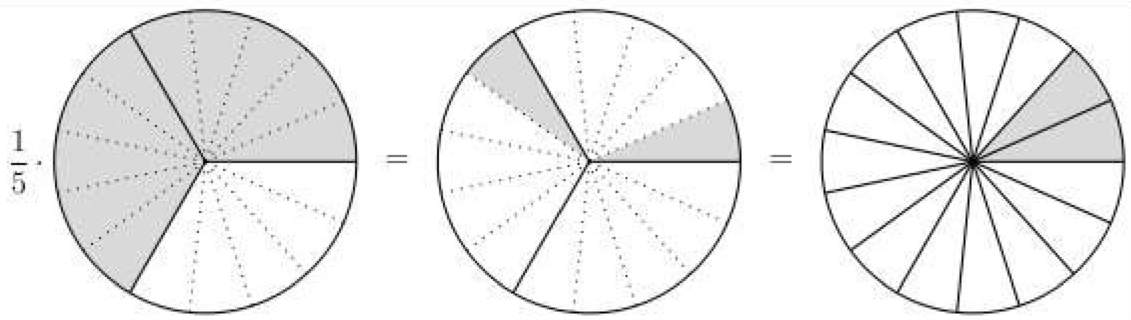
$$7 \cdot \frac{2}{15} = \frac{7 \cdot 2}{15} = \frac{14}{15}$$



De la moralité ci-dessus, on en déduit la **règle 2** : $\boxed{\frac{1}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{b \cdot d}}$ car multiplier $\frac{c}{d}$ par $\frac{1}{b}$ revient à diviser $\frac{c}{d}$ par b

Pour mieux comprendre la règle 2, on peut contempler la situation ci-dessous.

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$$



On peut maintenant en déduire la **règle de la multiplication** :

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$$

En effet, on utilise les règles 1 et 2 pour y arriver :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \overset{\text{R1}}{=} \left(a \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{c}{d} = a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \overset{\text{R2}}{=} a \cdot \frac{c}{b \cdot d} \overset{\text{R1}}{=} \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Remarque. Les règles 1 et 2 se retrouvent comme cas particuliers de la règle de la multiplication. Ainsi, parmi les trois règles ci-dessus, seule la règle de la multiplication mérite d'être apprise.

La division par une fraction

Commençons par montrer que l'inverse d'une fraction est encore une fraction. On appellera cette formule, la **règle d'inversion** :

$$\boxed{\frac{1}{\frac{d}{c}} = \frac{c}{d}}$$

En effet, grâce à la règle de la multiplication, on a :

$$\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c} = \frac{c \cdot d}{d \cdot c} = 1$$

Or, en divisant le membre de gauche et le membre de droite de l'égalité ci-dessus par $\frac{d}{c}$, on trouve l'égalité suivante :

$$\frac{c}{d} = \frac{1}{\frac{d}{c}}$$

On peut maintenant démontrer la **règle de la division** :

$$\boxed{\frac{a}{\frac{d}{c}} = a \cdot \frac{c}{d}}$$

En effet, on utilise la règle 1 de la page précédente et la règle d'inversion (RI) :

$$\frac{a}{\frac{d}{c}} \overset{\text{R1}}{=} a \cdot \frac{1}{\frac{d}{c}} \overset{\text{RI}}{=} a \cdot \frac{c}{d}$$

Exemple de calculs

$a)$ $\displaystyle \frac{2}{\frac{5}{11}} = 2 \cdot \frac{11}{5} = \frac{22}{5}$ $\qquad$ $b)$ $\displaystyle \frac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{11}} = \frac{3}{7} \cdot \frac{11}{5} = \frac{33}{35}$

$c)$ $$\frac{\frac{x+1}{x+3}}{\frac{x-2}{x+5}} = \frac{x+1}{x+3} \cdot \frac{x+5}{x-2} = \frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)(x-2)}$$

$d)$ $$\frac{\frac{x+1}{x+3}}{\overbrace{1 - \frac{x-2}{x+5}}^{\text{On ne peut appliquer la règle de la division que si on a une fraction au dénominateur, il faut donc écrire la soustraction du dénominateur comme une fraction. Par conséquent, on commence par faire cette soustraction en amplifiant les fractions.}}} = \frac{\frac{x+1}{x+3}}{\frac{x+5}{x+5} - \frac{x-2}{x+5}} = \frac{\frac{x+1}{x+3}}{\frac{x+5-(x-2)}{x+5}} = \frac{\frac{x+1}{x+3}}{\frac{7}{x+5}}$$

$$= \frac{x+1}{x+3} \cdot \frac{x+5}{7} = \frac{(x+1)(x+5)}{7(x+3)}$$

2.4.2. Puissances, bases et exposants

Afin de se rendre la vie plus agréable, les mathématiciens ont inventé une notation qui permet de simplifier l'écriture.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{a \text{ apparait } n \text{ fois}} = a^n$$

Quand on lit a^n, on dit «a élevé à la *puissance* n» ou plus rapidement «a puissance n». Le symbole n est appelé la *puissance* (ou *l'exposant*) et le symbole a est appelé la *base*. On en déduit immédiatement les règles suivantes :

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{a \text{ apparaît } m \text{ fois}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{a \text{ apparaît } n \text{ fois}}}_{a \text{ apparaît } m+n \text{ fois}} = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{a^m \text{ apparaît } n \text{ fois}} = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{a \text{ apparaît } m \text{ fois}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{a \text{ apparaît } m \text{ fois}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{a \text{ apparaît } m \text{ fois}}}_{a \text{ apparaît } m \cdot n \text{ fois}} = a^{m \cdot n}$$

On a donc établi les formules suivantes :

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}} \boxed{(a^m)^n = a^{mn}} \quad \text{pour tout } m,\, n \geqslant 1 \text{ et } a \in \mathbb{R}$$

2.4.3. Les identités remarquables

Les *identités remarquables* sont des formules qu'il est bon de reconnaître en toute circonstance. Les voici :

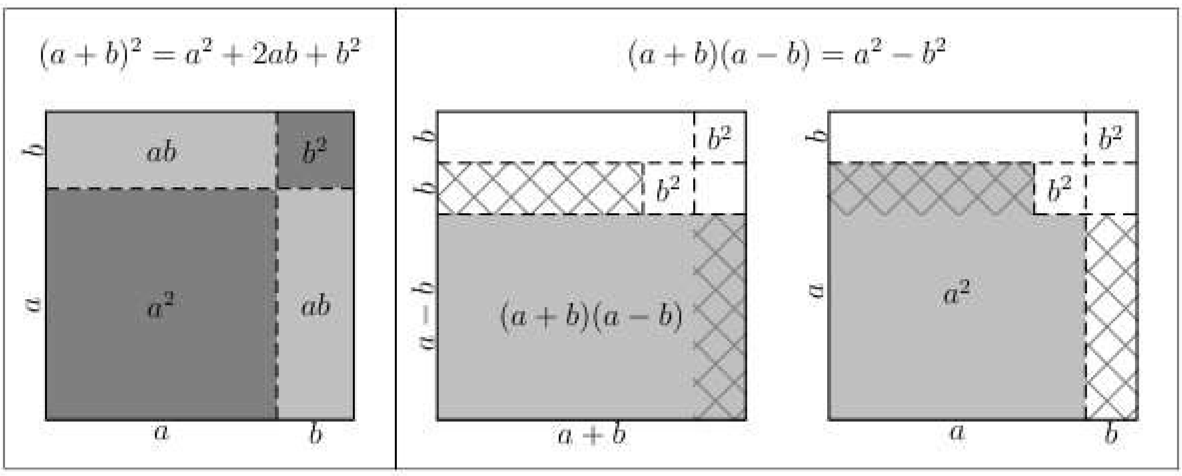
$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2} \qquad \boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$$

Ces identités se lisent dans les DEUX sens (comme toute égalité). Il est facile de les retrouver en développant le terme de droite. Par contre, il est important de bien les connaître afin de pouvoir les reconnaître lorsque seul le terme de gauche est présent.

L'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ montre que l'on doit faire extrêmement attention lorsqu'on élève une somme au carré. D'où le slogan :

LORSQU'ON ÉLÈVE UNE SOMME AU CARRÉ, DES DOUBLES PRODUITS APPARAISSENT

Vision géométrique



2.4.4. Les racines n-ième

Il peut arriver qu'on ait besoin de trouver un nombre x qui élevé à la puissance n donne un nombre a. Autrement dit, on cherche le ou les nombres x (s'ils existent) qui satisfont la condition

$$x^n = a$$

Ce ou ces nombres, lorsqu'ils existent, sont appelés *racines n-ième de a*.

On est ainsi face à deux soucis mathématiques : l'existence et l'unicité de ces nombres x. On distingue ainsi plusieurs cas :

1. Si a est nul.

   Alors[1] seul 0 satisfait la condition $x^n = 0$. Ainsi 0 est la seule racine n-ième de 0. On note $x = \sqrt[n]{0} = 0$.

2. Si n est impair (et si a est non nul).

   Alors[1] il existe un seul nombre x réel qui satisfait la condition $x^n = a$. Comme il est unique, on parle de la racine n-ième de a que l'on note $x = \sqrt[n]{a}$.

3. Si n est pair et que a est positif.

   Alors[1] il existe deux nombres qui satisfont la condition $x^n = a$: un de ces nombres est positif, l'autre est négatif. On définit LA racine n-ième de a comme étant la solution POSITIVE que l'on note $\sqrt[n]{a}$, l'autre solution est ainsi notée $-\sqrt[n]{a}$.

4. Si n est pair et que a est négatif.

   Alors[1] aucun nombre ne satisfait la condition $x^n = a$. Dans ce cas $\sqrt[n]{a}$ n'existe pas.

Exemples

1. $\sqrt{0} = 0$ (car $0^2 = 0$).
2. $\sqrt[3]{8} = 2$ (car 2 est solution de $x^3 = 8$ puisque $2^3 = 8$).
   $\sqrt[3]{-8} = -2$ (car -2 est solution de $x^3 = -8$ puisque $(-2)^3 = -8$).
3. $\sqrt{4} = 2$ (car 2 et -2 sont les deux solutions de $x^2 = 4$ et 2 est la solution positive).
4. $\sqrt{-1}$ n'est pas un nombre réel (en effet, on a montré en page 6 qu'il n'existe pas de nombre réel x qui satisfait $x^2 = -1$).

2.4.5. Extension de la notion d'exposants

Pour l'instant, on ne sait calculer a^n que lorsque $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On va étendre ce calcul pour toutes les puissances réelles ($n \in \mathbb{R}$), en conservant les deux formules suivantes :

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(a^m)^n = a^{mn}$	pour tout $m,\, n \geqslant 1$ et $a \in \mathbb{R}$

On va donc définir a^q pour $q \in \mathbb{Q}$ à l'aide des règles ci-contre.

$a^0 = 1$	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$a^{n-m} = \dfrac{a^n}{a^m}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a}^{\,m} = \sqrt[n]{a^m}$

[1]Ces affirmations sont évidentes pour le lecteur qui sait résoudre graphiquement une équation et esquisser les graphes des fonctions x^n (il en sera d'autant plus à l'aise s'il utilise des arguments sur la parité des fonction x^n).

Extension à la puissance nulle

On veut définir a^0 en conservant la formule $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. En posant $m = 0$ dans cette formule, elle devient $a^0 \cdot a^n = a^n$. L'implication ci-dessous nous montre que $a^0 = 1$.

$$a^0 \cdot a^n = a^n \overset{:a^n}{\Longrightarrow} a^0 = 1$$

Extension aux puissances négatives

Maintenant que a^0 est défini, on peut définir a^{-n} (pour $n \in \mathbb{N}$) en conservant la formule $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. En posant $m = -n$ dans cette formule, elle devient $a^{-n} \cdot a^n = a^0 = 1$. L'implication ci-dessous nous montre que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

$$a^{-n} \cdot a^n = 1 \overset{:a^n}{\Longrightarrow} a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Extension aux puissances rationnelles (première partie)

Commençons par définir $a^{\frac{1}{n}}$ en conservant la formule $(a^m)^n = a^{mn}$. En posant $m = \frac{1}{n}$ dans cette formule, elle devient $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$. Ainsi, $x = a^{\frac{1}{n}}$ satisfait la condition $x^n = a$. On va donc définir $a^{\frac{1}{n}}$ comme étant la racine n-ième de a. Rappelons que cette racine n-ième n'existe pas lorsque $a < 0$ et que n est pair.

Extension aux puissances rationnelles (deuxième partie)

Si $\frac{m}{n}$ est une fraction irréductible, on définit $a^{\frac{m}{n}}$ en conservant la formule $(a^m)^n = a^{mn}$. En utilisant cette formule de gauche à droite, on obtient :

$$a^{\frac{m}{n}} \;=\; a^{\frac{1}{n}\cdot m} \;\overset{\text{formule}}{=}\; (a^{\frac{1}{n}})^m \;\overset{\text{1ère partie}}{=}\; \sqrt[n]{a}^{\,m}$$

Remarquons que l'on a $\sqrt[n]{a}^{\,m} = \sqrt[n]{a^m}$. En effet on peut aussi calculer ainsi :

$$a^{\frac{m}{n}} \;=\; a^{m\cdot\frac{1}{n}} \;\overset{\text{formule}}{=}\; (a^m)^{\frac{1}{n}} \;\overset{\text{1ère partie}}{=}\; \sqrt[n]{a^m}$$

Dans le cas d'une fraction irréductible, les deux écritures $\sqrt[n]{a}^{\,m}$ ou $\sqrt[n]{a^m}$ existent (ou n'existent pas) simultanément. Dans le cas d'une fraction réductible, il se peut que $\sqrt[n]{a^m}$ existe, sans que $\sqrt[n]{a}^{\,m}$ n'existe (seulement lorsque $a < 0$ et que m et n sont pairs).

*Extension aux puissances irrationnelles

Ce passage est extrêmement délicat car on n'a pas défini les nombres réels de manière formelle[2]. On va donc se contenter d'expliquer comment trouver une bonne approximation de a^x avec $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pour cela, on prend une fraction q qui est proche du nombre x et on calcule a^q. Ce n'est pas facile, mais on peut montrer que plus la fraction q est proche de x, plus a^q est proche de a^x.

Par exemple, pour calculer $3^{\sqrt{2}}$, on peut estimer $\sqrt{2}$ par la fraction $\frac{22'619'537}{15'994'428}$ (cette approximation permet de *tromper* les calculatrices les plus avancées) et on calcule $3^{\frac{22619537}{15994428}}$. Cela revient à calculer la racine 15994428-ième de $3^{22619537}$. On trouve ainsi l'approximation à quatre chiffres significatifs suivante : $3^{\sqrt{2}} \cong 4.729$.

[2] On peut définir les nombres réels comme espace quotient où la relation d'équivalence utilise les suites de Cauchy.

2.4.6. Les logarithmes

Il peut arriver qu'on ait besoin de trouver une puissance x à laquelle on élève une base a pour trouver un nombre b. Autrement dit, on cherche le ou les nombres x (s'ils existent) qui satisfont la condition

$$a^x = b$$

On peut montrer que si on évite les cas particuliers inintéressants $a = 0$ ou $a = \pm 1$, alors, s'il existe, le nombre x qui satisfait la condition $a^x = b$ est unique. On peut ainsi lui donner un nom : il s'agit du *logarithme en base a de b* que l'on note $x = \log_a(b)$.

On a ainsi l'équivalence : $\boxed{a^x = b \iff x = \log_a(b)}$ (pour autant que $\log_a(b)$ existe)

D'où le *slogan du logarithme* :

$\boxed{\log_a(b) \text{ est la puissance à laquelle on élève la base } a \text{ pour obtenir le nombre } b}$

Sur la calculatrice, on trouve la touche $\boxed{\texttt{LOG}}$, qui correspond au logarithme en base 10. Heureusement, on a la formule de changement de base suivante qui est très utile pour calculer des logarithmes dans d'autres bases :

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(a)}}$$

Exemples

a) $\log_2(8) = 3$ (car $2^3 = 8$).

b) $\log_3(1) = 0$ (car $3^0 = 1$).

c) $\log_4(\frac{1}{4}) = -1$ (car $4^{-1} = \frac{1}{4}$).

d) $\log_5(\frac{1}{25}) = -2$ (car $5^{-2} = \frac{1}{25}$).

e) On peut estimer que $\log_2(20)$ se situe entre 4 et 5 (car $2^4 = 16$ et $2^5 = 32$), mais si on veut une valeur plus précise, on peut utiliser le changement de base ci-dessus et la calculatrice. On trouve (à 5 chiffres significatifs) :

$$\log_2(20) = \frac{\log_{10}(20)}{\log_{10}(2)} \cong 4.3219$$

f) $\log_{-2}(-8) = 3$ (car $(-2)^3 = -8$), pourtant $\log_{-2}(8)$ et $\log_2(-8)$ n'existent pas.

2.4.7. Analogies entre les diverses opérations

Voici un résumé des formules importantes. Même si ces formules paraissent analogues, elle sont néanmoins différentes. Il est important de NE PAS CONFONDRE CES FORMULES ! Les formules concernant les logarithmes seront établies dans le cours de deuxième année (elles ne sont donc pas à savoir par cœur en première année).

Multiplication	Puissance	Logarithme
$\underbrace{a + a + \ldots + a}_{a \text{ apparaît } n \text{ fois}} = a \cdot n$	$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{a \text{ apparaît } n \text{ fois}} = a^n$	$a^x = b \iff x = \log_a(b)$
$a \cdot n + a \cdot m = a \cdot (m + n)$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\log_a(m) + \log_a(n) = \log_a(m \cdot n)$
$a \cdot n - a \cdot m = a \cdot (m - n)$	$a^m / a^n = a^{m-n}$	$\log_a(m) - \log_a(n) = \log_a(m/n)$
$(a \cdot m) \cdot n = a \cdot (m \cdot n)$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\log_a(m^n) = n \cdot \log_a(m)$

2.4.8. La règle des signes

Lorsqu'on a une multiplication ou une division entre deux nombres, la *règle des signes* s'appplique.

nombre	multiplication ou division	nombre	nombre	phrase mnémotechnique
+		+	+	les amis de mes amis sont mes amis
+		−	−	les amis de mes ennemis sont mes ennemis
−		+	−	les ennemis de mes amis sont mes ennemis
−		−	+	les ennemis de mes ennemis sont mes amis

En Allemand, les négations suivent une règle semblable.

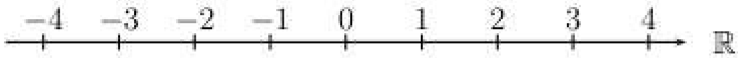
2.4.9. Valeur absolue et distance

La *valeur absolue*, notée $|a|$, est définie comme suit.

$$\boxed{|a| = \sqrt{a^2}} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}}$$

Rappel : si a est négatif, alors $-a$ est positif.

La valeur absolue d'un nombre permet de mesurer la *distance* sur la droite réelle de ce nombre par rapport à l'origine, qui est le nombre 0.



Par exemple, les valeurs absolues de -3 et de 3 sont les mêmes, car ces nombres sont à distance 3 de 0. Autrement dit : $|-3| = |3| = 3$.

Elle permet aussi de calculer la distance entre deux nombres x et y, qui est $|x - y|$. Par exemple, la distance sur l'axe réel entre -2 et 3 vaut

$$|(-2) - 3| = 5$$

2.4.10. Un peu de vocabulaire : simplifier, développer, factoriser

Définitions

Il y a tout de même quelques termes techniques qu'il faut connaître comme :

Simplifier S'arranger pour que l'expression littérale soit la plus simple possible. Par exemple, on simplifie l'expression $x + x + x$ pour obtenir $3x$.

Développer S'arranger pour que l'expression littérale n'ait plus de parenthèses. Par exemple, on développe l'expression $(x+y)^2$ pour obtenir $x^2+2xy+y^2$.

Factoriser C'est l'opération inverse de développer. On s'arrange pour avoir le plus de multiplications en ajoutant des parenthèses. Par exemple, dans l'expression $xy+x$, on peut mettre x en évidence pour obtenir $x(y+1)$.