Chapitre 4

Équations différentielles

4.1 Primitives

Définition

Soit f et F des fonctions réelles de même domaine de définition D. On dit que F est une primitive de f lorsque

$$F' = f \quad \text{ou} \quad F'(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in D$$

Théorème sur les primitives

Soit F_1 et F_2 deux primitives d'une même fonction f définie sur un intervalle.
Alors, il existe un nombre $C \in \mathbb{R}$, appelé *constante*, tel que

$$F_1(x) = F_2(x) + C$$

Preuve

Comme F_1 et F_2 sont des primitives de f, on a $F_1'(x) = f(x)$ et $F_2'(x) = f(x)$. Par conséquent, on a

$$(F_1 - F_2)'(x) = (F_1' - F_2')(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Cela signifie que la fonction $(F_1 - F_2)$ est une fonction constante (puisque sa dérivée est nulle et qu'elle est définie sur un intervalle).

Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $C = (F_1 - F_2)(x) = F_1(x) - F_2(x)$. $\square$

L'ancêtre des équations différentielles

Soit I un intervalle sur lequel une fonction f est définie. La recherche d'une primitive permet de résoudre des équations de la forme suivante.

$$y'(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in I$$

L'inconnue de cette équation est une fonction y définie sur I. Résoudre une telle équation consiste à trouver toutes les fonctions y qui la satisfont.

4.2 Équations différentielles

Définition

Une *équation différentielle* est une équation qui contient une fonction inconnue $y(x)$ et une ou plusieurs de ses dérivées. L'*ordre d'une équation différentielle* est l'ordre de la plus haute dérivée de $y(x)$ qui apparaît.

4.3 Équations différentielles du premier ordre

Voici la forme générale d'une équation différentielle d'ordre 1.

$$\underbrace{f(x,y,y')}_{\substack{\text{combinaison mathématique} \\ \text{de } x,\ y(x) \text{ et } y'(x)}} = 0$$

Dans la pratique, on est le plus souvent confronté à des équations différentielle d'ordre 1 de la forme suivante.

$$y' = f(x,y)$$

Même si l'on note y, il faut penser que y est une fonction de x.

Problèmes de Cauchy

Dans l'exercice précédent, on a trouvé une solution qui satisfait une équation différentielle et une *condition initiale*, qui est donnée par une condition de la forme $y(x_0) = y_0$ (autrement dit, on veut que le graphe de la fonction y passe par le point $(x_0; y_0)$).

Un *problème de Cauchy* (aussi appelé *problème à condition initiale*) est donné par un système d'équations de la forme suivante.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(x,y,y') & = & 0 \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

Remarque importante

Actuellement, il n'y a pas de méthode générale pour résoudre des équations différentielles. On sait néanmoins résoudre certains cas particuliers.

4.3.1 Les équations différentielles à variables séparables

Une équation différentielle du premier ordre à variables séparables est toujours de la forme suivante.

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)}$$

Le terme «séparable» provient du fait que cette équation est équivalente à :

$$h(y)y' = g(x)$$

Le y n'apparaît que dans le terme de gauche et il n'y a du x que dans le terme de droite.

Méthode de résolution

Pour résoudre l'équation différentielle $y' = \frac{g(x)}{h(y)}$, on doit trouver une primitive de la fonction g, notée G, et une primitive de la fonction h, notée H.

En effet, on a

$$\begin{aligned} y' = \frac{g(x)}{h(y)} \iff h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x) &\overset{(\clubsuit)}{\iff} (H(y(x)))' = G'(x) \\ &\overset{(\spadesuit)}{\iff} H(y(x)) = G(x) + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où ($\clubsuit$) provient de la formule de la dérivation en cascade et où ($\spadesuit$) provient du théorème sur les primitives.
On peut donc se ramener à une famille d'équations (d'inconnue $y(x)$) qui ne contiennent plus de dérivée de la fonction y. Pour chaque constante $C \in \mathbb{R}$, il existe une fonction solution $y(x)$. On dit que l'équation

$$H(y(x)) = G(x) + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

définit $y(x)$ de manière implicite. Exprimer $y(x)$ de manière explicite consiste à résoudre cette équation (en isolant $y(x)$). Ce n'est pas toujours facile, mais il existe des algorithmes permettant d'estimer $y(x)$ pour chaque x avec une précision déterminée à l'avance.

4.3.2 Les équations différentielles linéaires du premier ordre

Une *équation différentielle linéaire du premier ordre* est une équation différentielle de la forme

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x) \quad \text{où } a, b \text{ et } f \text{ sont des fonctions données}$$

Théorème de résolution d'une équation différentielle du premier ordre

Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre.

$$(ED) : a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x)$$

et p une solution particulière.
Soit aussi l'*équation homogène associée.*

$$(EH) : a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

On a

1. Si y_h est une solution de (EH), alors $y_h + p$ est une solution de (ED).
2. Si y est une solution de (ED), alors $y - p$ est une solution de (EH).

Autrement dit, à travers la solution particulière p, à chaque solution de (ED) correspond une unique solution de (EH) et réciproquement.

Preuve

On suppose qu'on connaît une solution particulière p de l'équation différentielle (ED).
On doit montrer :

1. Si y_h est une solution de (EH), alors $y = y_h + p$ est une solution de (ED).

   Il suffit de vérifier (ED) pour y.

$$\begin{aligned} a(x)y'(x) + b(x)y(x) &= a(x)(y_h(x) + p(x))' + b(x)(y_h(x) + p(x)) \\ &= \underbrace{a(x)y_h'(x) + b(x)y_h(x)}_{=0 \text{ car } y_h \text{ est solution de } (EH)} + \underbrace{a(x)p'(x) + b(x)p(x)}_{=f(x) \text{ car } p \text{ est solution de } (ED)} = f(x) \end{aligned}$$

   Ainsi, y est bien une solution de l'équation (ED).

2. Si y est une solution de (ED), alors $y_h = y - p$ est une solution de (EH).

   Il suffit de vérifier (EH) pour y_h.

$$\begin{aligned} a(x)y_h'(x) + b(x)y_h(x) &= a(x)(y(x) - p(x))' + b(x)(y(x) - p(x)) \\ &= \underbrace{a(x)y'(x) + b(x)y(x)}_{=f(x) \text{ car } y \text{ est solution de } (ED)} - \big(\underbrace{a(x)p'(x) + b(x)p(x)}_{= f(x) \text{ car } p \text{ est solution de } (ED)}\big) = 0 \end{aligned}$$

   Ainsi, y_h est bien une solution de l'équation homogène (EH). □

Résolution de l'équation homogène associée

On commence (pour simplifier) par écrire l'équation à résoudre sous la forme suivante.

$$y'(x) + b(x)y(x) = f(x)$$

L'équation homogène associée ($y'(x) + b(x)y(x) = 0$) se résout en se ramenant à une équation différentielle à variables séparables.

$$y'(x) + b(x)y(x) = 0 \overset{y\neq 0}{\iff} \frac{y'(x)}{y(x)} = -b(x) \iff \ln|y| = -B(x) + C$$
$$\iff |y| = e^C \cdot e^{-B(x)} \iff y = \pm e^C \cdot e^{-B(x)}$$

On récupère la solution $y = 0$ en remplaçant $\pm e^C$ (qui vit dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) par $D \in \mathbb{R}$. On voit ainsi que la solution générale de l'équation homogène est de la forme suivante.

$$y_D(x) = De^{-B(x)} \text{ avec } D \in \mathbb{R}$$

Recherche d'une solution particulière

Il existe une technique permettant de trouver une solution particulière, notée $p(x)$, de

$$y'(x) + b(x)y(x) = f(x)$$

Cette technique s'appelle la *variation de la constante.*

On reprend les solutions de l'équation homogène, qui sont $y_D(x) = De^{-B(x)}$ avec $D \in \mathbb{R}$.

L'idée de la variation de la constante est de transformer la constante D en une fonction qui dépend de x, notée $D(x)$. On cherche ainsi $D(x)$ telle que $p(x) = D(x)e^{-B(x)}$ soit une solution particulière de l'équation.

Calculons la dérivée de $p(x)$ en se rappelant que $B'(x) = b(x)$:

$$p'(x) = \big(D(x)e^{-B(x)}\big)' = D'(x)e^{-B(x)} + D(x)\big(e^{-B(x)} \cdot (-b(x))\big)$$
$$\iff p'(x) = D'(x)e^{-B(x)} - b(x)p(x) \ (\bigstar)$$

Or, comme $p(x)$ doit être une solution particulière, $p(x)$ doit satisfaire l'équation

$$p'(x) + b(x)p(x) = f(x)$$

En substituant le résultat du calcul de $p'(x)$ trouvé en ($\bigstar$) dans cette équation, on trouve

$$D'(x)e^{-B(x)} = f(x) \iff D'(x) = \frac{f(x)}{e^{-B(x)}} = f(x)e^{B(x)}$$

On voit ainsi que $D(x)$ est une primitive de la fonction $f(x)e^{B(x)}$. On a donc trouvé la solution particulière suivante.

$$p(x) = D(x)e^{-B(x)} \text{ où } D(x) \text{ est une primitive de } f(x)e^{B(x)}$$

Remarque importante

Il ne faut pas apprendre les formules par cœur, mais il faut connaître ces méthodes.

1. On résout l'équation homogène par séparation des variables.
2. On trouve une solution particulière en faisant varier la constante de la solution de l'équation homogène.

Résolution de problèmes

Lorsque l'on modélise des phénomènes de la réalité, on se trouve souvent nez à nez à des équations différentielles. Voici différents exemples de telles modélisations.

Comportement d'une population

1. Lorsqu'on étudie la croissance d'une population (bactéries, animaux) dans un environnement idéal (espace illimité, nourriture adéquate, absence de prédateurs, résistance à la maladie), le modèle qui s'impose est le suivant.

   Notons t pour le temps qui s'écoule et y le nombre d'individus de la population au temps t. Le taux (instantané) de croissance de la population est donné par la dérivée y' (en fonction du temps). En supposant qu'il y a un coefficient de proportionnalité entre l'effectif de la population et sa croissance, on déduit l'équation différentielle suivante.

   $$y' = ky \quad \text{où } k \text{ est le facteur de proportionnalité}$$

2. Un environnement idéal ne reflète pas toujours la réalité, ainsi il peut être utile de compléter la modélisation en supposant qu'il existe une capacité maximale de la population : il s'agirait d'une valeur K vers laquelle la population se stabiliserait (soit en croissant si la population est inférieur à cette capacité, soit en décroissant si la population est supérieure à cette capacité).

   On tient compte de deux hypothèses qui vont dans ce sens.

   (a) $y' \cong ky$ lorsque y est petit (dans ce cas, on peut dire qu'on est proche de l'environnement idéal).

   (b) $y' < 0$ lorsque $y > K$ (cette condition précise que la population doit décroître au cas où elle dépasse sa capacité maximale).

   Voici un modèle simple qui vérifie ces deux hypothèses.

   $$y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

   En effet, si y est petit comparé à K, le rapport $\frac{y}{K}$ est proche de zéro et dans ce cas, l'équation différentielle dit que $y' \cong ky$. En revanche, si $y > K$, alors $1 - \frac{y}{K}$ est négatif, ce qui entraîne que y' est négatif (décroissance de la population).

Problème de mélange

Dans un problème de mélange, il y a toujours un réservoir de capacité déterminée rempli d'une solution parfaitement mélangée d'une certaine substance (du sel, par exemple). Une solution, de concentration donnée, entre dans le réservoir selon un certain débit et le mélange complètement brassé, en sort à un certain débit, qui peut être différent de celui de l'entrée. Si $y(t)$ désigne la quantité de substance solide dissoute dans le réservoir au moment t, $y'(t)$ représente la différence entre le taux auquel la substance entre et le taux auquel elle en est retirée. La description mathématique de cette situation implique souvent une équation différentielle du premier ordre à variables séparables. D'autres phénomènes entrent dans une modélisation analogue : les réactions chimiques, le déversement de polluants dans un lac, l'injection d'un médicament dans le sang.

Réaction chimique

On cherche à calculer le taux de concentration d'une molécule X obtenue à l'aide d'une transformation chimique de Y et de Z.

$$Y + Z \longrightarrow X$$

Supposons que la vitesse de formation des molécules X est proportionnelle au produit des concentrations de Y et de Z au temps t.

Notons $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ les concentrations[1] respectives de X, Y et de Z au temps t. Alors, l'hypothèse précédente se traduit[2] par la loi suivante.

$$x'(t) = ky(t)z(t) \text{ avec } k > 0 \quad (\bigstar)$$

Afin d'avoir une équation différentielle en $x(t)$, on doit exprimer $y(t)$ et $z(t)$ à l'aide de $x(t)$. Pour cela, on suppose (notons (H) cette hypothèse) qu'une molécule de Y et une molécule de Z se combinent pour former une molécule de X et qu'au départ il n'y a pas de X. Cela permet d'écrire :

$$y(0) = y(t) + x(t) \quad \text{et} \quad z(0) = z(t) + x(t)$$

L'équation $(\bigstar)$ devient ainsi l'équation différentielle suivante.

$$\begin{cases} x'(t) &= k(y(0) - x(t))(z(0) - x(t)) \\ x(0) &= 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un problème de Cauchy.

1. En chimie, on note $[X]$, $[Y]$ et $[Z]$
2. Il s'agit d'une multiplication et non d'une somme car on est face à un problème de rencontre (même type de problème en combinatoire ou en probabilité)

4.4 Les équations différentielles linéaires du deuxième ordre

Une *équation différentielle linéaire du deuxième ordre* est une équation différentielle de la forme

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x) \quad \text{où } a,\ b,\ c \text{ et } f \text{ sont des fonctions données}$$

Théorème de résolution d'une équation différentielle du deuxième ordre

Soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre.

$$(ED) : a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x)$$

et p une solution particulière.
Soit aussi l'*équation homogène associée.*

$$(EH) : a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0$$

On a

1. Si y_h est une solution de (EH), alors $y_h + p$ est une solution de (ED).
2. Si y est une solution de (ED), alors $y - p$ est une solution de (EH).

Autrement dit, à travers la solution particulière p, à chaque solution de (ED) correspond une unique solution de (EH) et réciproquement.

Preuve

On suppose qu'on connaît une solution particulière p de l'équation différentielle (ED).
On doit montrer :

1. Si y_h est une solution de (EH), alors $y = y_h + p$ est une solution de (ED).

   Il suffit de vérifier (ED) pour y.

$$\begin{aligned}
&a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) \\
&= a(x)(y_h(x)+p(x))'' + b(x)(y_h(x)+p(x))' + c(x)(y_h(x)+p(x)) \\
&= \underbrace{a(x)y_h''(x) + b(x)y_h'(x) + c(x)y_h(x)}_{=0 \text{ car } y_h \text{ est solution de } (EH)} + \underbrace{a(x)p''(x) + b(x)p'(x) + c(x)p(x)}_{=f(x) \text{ car } p \text{ est solution de } (ED)} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

   Ainsi, y est bien une solution de l'équation (ED).

2. Si y est une solution de (ED), alors $y_h = y - p$ est une solution de (EH).

   Il suffit de vérifier (EH) pour y_h.

$$\begin{aligned}
&a(x)y_h''(x) + b(x)y_h'(x) + c(x)y_h(x) \\
&= a(x)(y(x)-p(x))'' + b(x)(y(x)-p(x))' + c(x)(y(x)-p(x)) \\
&= \underbrace{a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x)}_{=f(x) \text{ car } y \text{ est solution de } (ED)} - \Big(\underbrace{a(x)p''(x) + b(x)p'(x) + c(x)p(x)}_{=f(x) \text{ car } p \text{ est solution de } (ED)}\Big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

   Ainsi, y_h est bien une solution de l'équation homogène (EH). □

Résolution de l'équation homogène associée

La technique présentée ici, ne fonctionne que si l'équation différentielle homogène est à coefficients constants et réels. Pour simplifier disons que le coefficient dominant vaut 1 (quitte à diviser) et ainsi l'équation à résoudre est sous la forme suivante.

$$y'' + by' + cy = 0$$

À une telle équation, on associe le *polynôme caractéristique* suivant.

$$x^2 + bx + c = 0$$

Le lecteur ne doit être troublé parce qu'on utilise la variable x. En effet le polynôme caractéristique n'est qu'une parenthèse lors de la résolution de l'équation homogène.

Notons r_1 et r_2 les zéros (à priori complexes, mais supposés réels pour la suite) du polynôme caractéristique. On a

$$x^2 + bx + c = (x - r_1)(x - r_2) = x^2 - \underbrace{(r_1 + r_2)}_{=b} x + \underbrace{r_1 r_2}_{=c}$$

On obtient ici ce qu'on appelle les *formules de Viète*[3].

$$\begin{cases} b &= -(r_1 + r_2) \\ c &= r_1 r_2 \end{cases}$$

Par conséquent, on peut écrire l'équation différentielle de la façon suivante.

$$y'' - (r_1 + r_2)y' + r_1 r_2 y = 0$$

Ainsi, grâce à une astuce trouvée par Paul Jolissaint, voici une équation équivalente.

$$\big(\underbrace{y' - r_1 y}_{=z}\big)' - r_2\big(\underbrace{y' - r_1 y}_{=z}\big) = 0$$

Cette façon de l'écrire est extrêmement pratique afin de pouvoir se ramener à un système équivalent de deux équations différentielles du premier degré à deux inconnues.

$$\begin{cases} z = y' - r_1 y \\ z' - r_2 z = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation est facile à résoudre par séparation des variables.

$$z' - r_2 z = 0 \iff \frac{z'}{z} = r_2 \iff \cdots \iff z(x) = Ce^{r_2 x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Ainsi la première équation devient $y' - r_1 y = Ce^{r_2 x}$.

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre en y. La solution de l'équation homogène associée vaut $y_\alpha(x) = \alpha e^{r_1 x}$ (calcul identique à celui de z ci-dessus). Pour la solution particulière, on utilise la méthode de la variation de la constante : on cherche une solution particulière de la forme $p(x) = \alpha(x)e^{r_1 x}$. En insérant ce candidat dans l'équation différentielle ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} p'(x) - r_1 p(x) = Ce^{r_2 x} &\iff \big(\alpha'(x)e^{r_1 x} + r_1\alpha(x)e^{r_1 x}\big) - r_1\alpha(x)e^{r_1 x} = Ce^{r_2 x} \\ &\iff \alpha'(x)e^{r_1 x} = Ce^{r_2 x} \iff \alpha'(x) = Ce^{(r_2 - r_1)x} \end{aligned}$$

3. à ne pas confondre avec LA formule de Viète qui donne la formule générale de résolution des zéros des polynômes du deuxième degré $\left(x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$ qui ici nous permet de trouver r_1 et r_2.

Pour résoudre $\alpha'(x) = Ce^{(r_2-r_1)x}$, on doit distinguer deux cas.

1. $r_1 \neq r_2$ (cas où le discriminant du polynôme caractéristique est positif).

   Une primitive de $\alpha'(x) = Ce^{(r_2-r_1)x}$ est évidemment

   $$\alpha(x) = \underbrace{\tfrac{C}{r_2-r_1}}_{=\beta}\ e^{(r_2-r_1)x} = \beta e^{(r_2-r_1)x} \text{ avec } \beta \in \mathbb{R}$$

   Donc la solution particulière est $p(x) = \alpha(x)e^{r_1x} = \beta e^{(r_2-r_1)x}e^{r_1x} = \beta e^{r_2x}$. Ainsi la solution de l'équation homogène est

   $$\boxed{y(x) = \alpha e^{r_1x} + \beta e^{r_2x} \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$$

2. $r_1 = r_2 = r$ (cas où le discriminant du polynôme caractéristique est nul).

   Une primitive de $\alpha'(x) = Ce^{0x} = C$ est évidemment

   $$\alpha(x) = Cx = \beta x \text{ en posant } \beta = C$$

   Donc la solution particulière est $p(x) = \alpha(x)e^{rx} = \beta xe^{rx}$. Ainsi la solution de l'équation homogène est

   $$\boxed{y(x) = \alpha e^{rx} + \beta xe^{rx} \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$$

Remarque

Dans le cas où le discriminant du polynôme caractéristique est négatif, les nombres r_1 et r_2 ne sont ni égaux, ni réels, mais complexes et de la forme $r_1 = r + is$ et $r_2 = r - is$ (avec r, $s \in \mathbb{R}$). La dérivation sur les complexes étant compatible[4] avec celle sur les réels pour les exponentielles et les polynômes, on se retrouve dans le premier cas. Donc

$$y(x) = \alpha e^{r_1x} + \beta e^{r_2x} \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Or, dans les complexes, on a $e^{i\varphi} = \text{cis}(\varphi) = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ (cela peut se vérifier avec le développement de MacLaurin[5]) et ainsi, la solution y s'écrit

$$y(x) = \alpha(e^{rx}\cos(sx) + e^{rx}i\sin(sx)) + \beta(e^{rx}\cos(sx) - e^{rx}i\sin(sx)) \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

ou encore

$$y(x) = \underbrace{(\alpha+\beta)}_{\gamma} e^{rx}\cos(sx) + \underbrace{(\alpha i - \beta i)}_{\delta} e^{rx}\sin(sx) \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

En choisissant $\alpha = \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2}i$ et $\beta = \overline{\alpha} = \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}i$, où γ et δ sont des nombres réels quelconques, on trouve les fonctions réelles suivantes comme solutions de l'équation différentielle.

$$\boxed{y(x) = \gamma e^{rx}\cos(sx) + \delta e^{rx}\sin(sx) \text{ pour tout } \gamma, \delta \in \mathbb{R}}$$

Cas particulier : si $r = 0$, autrement dit si les deux zéros du polynôme caractéristique sont purement imaginaires, alors

$$\boxed{y(x) = \gamma\cos(sx) + \delta\sin(sx) \text{ pour tout } \gamma, \delta \in \mathbb{R}}$$

---

4. même si la définition de la dérivée au sens complexe est la même, les limites se calculent de manière plus subtile dans le plan complexe.

5. le développement de MacLaurin sera présenté en analyse en fin de troisième année.