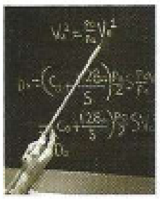
Les **équations** du **premier degré**

ÉGALITÉS MATHÉMATIQUES



Le terme « ***équation*** » fait sans doute partie de ceux que même les non-initiés connaissent et associent aux mathématiques. Mais que recouvre-t-il exactement ? C'est ce que nous allons voir, en abordant un type particulièrement simple d'équation, les équations du premier degré.

QU'EST-CE QU'UNE ÉQUATION ?

Les équations sont utilisées pour résoudre toutes sortes de problèmes, parfois dans la vie quotidienne. Afin d'appréhender ce dont il s'agit, prenons un exemple. Nous disposons d'un petit sac (de type « filet ») contenant cinq billes identiques, et nous voudrions déterminer le volume d'une seule bille, sans ouvrir le sac.

Pour ce faire, nous adoptons la démarche suivante. Prenons deux verres mesureurs. Dans le premier, le « verre-à-billes », mettons le sac de billes ; remplissons d'eau le deuxième, le « verre-à-eau », jusqu'à atteindre la graduation 100 cm³.

Versons ensuite de l'eau du verre-à-eau dans le verre-à-billes, jusqu'à ce que les billes soient entièrement recouvertes. Regardons ensuite les graduations des deux verres.

Graduation du verre-à-eau : 90 cm³.

Nous avons donc versé 10 cm³ d'eau, puisque initialement il en contenait 100. Graduation du verre-à-billes : 35 cm³. Or, que contient désormais le verre-à-billes ? Le sac de billes et l'eau versée dessus.

Le volume final contenu dans le verre-à-billes, 35 cm³, est donc égal à la somme des volumes des cinq billes et du volume de l'eau versée, c'est-à-dire 10 cm³.

La formulation ci-dessus, bien qu'utilisant des mots, est une équation. Elle répond en effet à la définition générale que l'on peut trouver dans les dictionnaires : une équation est « une égalité qui n'est vérifiée que pour certaines valeurs de la (ou des) inconnue(s) ». Dans cette définition, l' « inconnue » est une grandeur dont on ne connaît pas la valeur, mais que l'on cherche à déterminer. Dans l'exemple du sac de billes, l'inconnue représente le volume d'une bille.

Le problème précédent nous permet de constater que les équations apparaissent lorsque l'on ne connaît pas la valeur d'une grandeur, mais seulement des relations qu'elle vérifie. Si nous disposons de suffisamment de relations, nous pouvons espérer remonter à la grandeur elle-même.

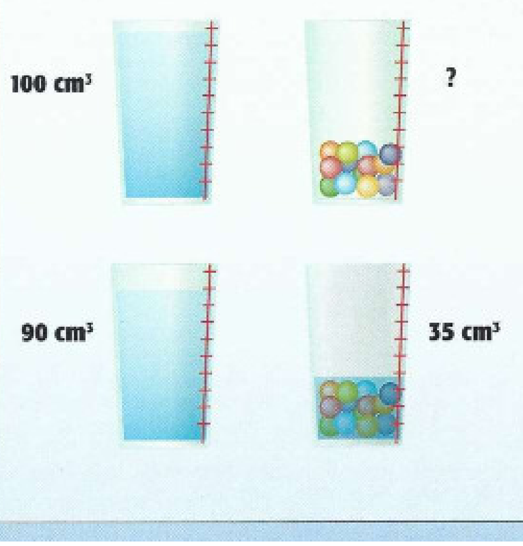
La formulation littérale a l'avantage de ne pas requérir de connaissances particulières pour être comprise. Elle présente cependant l'inconvénient de ne pas être très synthétique, et d'être peu aisée à manipuler. Ainsi, il n'est pas très simple d'en déduire le volume d'une bille. C'est pourquoi les mathématiciens ont inventé un langage plus adapté. Ce langage est composé de signes : « + » pour dire somme, « = » pour dire égal, etc.

Pour représenter les quantités inconnues, ils utilisent des lettres et en particulier le fameux x. Notons donc x le volume d'une bille. La relation que nous avons obtenue plus haut peut s'écrire en termes mathématiques :

35 = 5x + 10 (E)

Comme nous le verrons plus loin, cette égalité va pouvoir nous permettre de déterminer x. On peut déjà voir qu'elle n'est pas vérifiée pour n'importe quelle valeur de x. Par exemple, si on assigne à x la valeur 10, la somme des termes situés à droite du signe « = » vaut 60, qui est évidemment différent de la partie gauche de l'égalité (35). En revanche, si on donne à x la valeur 5, l'égalité est satisfaite.

Le problème du « sac de billes »



ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

Généralement considérées comme des « objets » mathématiques, les équations peuvent être facilement étudiées, sans avoir recours à des applications. En étudiant ces objets, les mathématiciens en découvrent les propriétés, mettent au point des méthodes pour les résoudre, etc. Il existe quantité de types d'équations, aux propriétés diverses. Elles sont classées en types variés : équations du premier degré, du deuxième degré, différentielles, elliptiques, paraboliques, etc.

Une équation est dite « du premier degré » si l'inconnue x apparaît sous cette forme x uniquement, c'est-à-dire pas élevée à une puissance, et éventuellement affublée d'un coefficient multiplicateur. L'équation (E) ci-dessus en est un exemple ; l'équation $2x + 3 = 0$ un autre. Nous verrons plus loin que la forme générale des équations du premier degré est :

$$ax + b = 0$$

x est l'inconnue que l'on cherche à déterminer, et a et b sont deux paramètres.

L'équation $x^2 + 4 = 0$ n'est pas du premier degré, car x est à la puissance 2 (elle est du deuxième degré). L'équation $x^3 + 2x + 4 = 0$ n'est pas non plus du premier degré : elle contient bien x, mais pas uniquement, puisqu'il y a aussi x^3. Enfin, $\sin(x) + 2 = 3$ n'est également pas du premier degré, puisque x apparaît dans une fonction sinus.

HISTORIQUE

L'étude et la résolution d'équations sont très anciennes. Les anciens Babyloniens (2ᵉ millénaire avant notre ère) inventèrent ce que nous appelons aujourd'hui l'algèbre. Pour trouver la solution à des problèmes posés dans la vie quotidienne (la construction, le commerce, etc.), ils savaient résoudre un certain nombre d'équations, et en particulier celles du premier et du deuxième degré. Ces équations n'utilisaient pas de symboles, mais étaient décrites par des mots dans des ***tables***.

Les Chinois, avant notre ère, et les Arabes, aux alentours du Xᵉ siècle de notre ère, firent également progresser l'algèbre et savaient résoudre les équations du premier degré. Ils utilisaient eux aussi des mots, et il fallut attendre le XVIᵉ siècle, pour que soit développé, en Europe (en particulier par l'Allemand Stiefel), l'usage de symboles mathématiques (signes « + », « = », utilisation de lettres comme x). Ceci allait donner un nouvel élan à l'algèbre en général et, en particulier, à l'étude des équations.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs que peut prendre l'inconnue pour permettre à l'égalité d'être vérifiée. Nous avons vu que l'équation (E) était satisfaite pour x = 5, qui constitue une solution. Mais y en a-t-il d'autres ? On ne connaît de solutions rigoureuses qu'aux équations les plus simples, parmi lesquelles les équations du premier degré. Pour les autres, on est obligé d'avoir recours à des méthodes approchées. Un certain nombre d'outils ont ainsi été élaborés par des mathématiciens, avec l'avantage de pouvoir être utilisés de façon systématique dans la résolution les équations.

MANIPULATION DES ÉGALITÉS

Prenons une égalité quelconque et, par commodité, notons-la :

A = B

Cette égalité peut subir toutes sortes de manipulations.

1. Ajouter la même quantité q (une quantité quelconque) de part et d'autre du signe « = » :

A + q = B + q

Par exemple, si je dispose de deux paniers contenant chacun 10 pommes, je peux en ajouter à chacun 2, j'aurai au final à nouveau autant de pommes dans chaque panier (en l'occurrence 12).

2. Retrancher la même quantité q de part et d'autre :

A - q = B - q

Cette fois, à chacun de mes paniers contenant 10 pommes, je retire 3 pommes. Au final, il me reste autant de pommes dans chaque panier (7).

3. Multiplier par la même quantité q de part et d'autre :

A x q = B x q

Je dispose de deux élastiques faisant chacun la même longueur, 20 cm. Je tire autant sur chaque élastique, de façon à multiplier leur longueur par 3. Au final, les deux élastiques auront la même taille, c'est-à-dire 60 cm chacun.

4. Diviser par la même quantité q non nulle de part et d'autre :

A/q = B/q

Reprenant les deux élastiques de même longueur (20 cm), j'en divise cette fois la longueur par 2. Au final, les deux élastiques auront la même taille (10 cm). Notons une petite restriction dans ce dernier cas : il faut que q soit différent de 0 pour pouvoir effectuer cette manipulation, car on ne peut pas effectuer de division par 0.

Tous ces manipulations constituent des propriétés des « objets » que sont les équations et peuvent être rassemblés dans le tableau suivant :

Si A = B, alors
A + q = B + q
A - q = B - q
A x q = B x q
Pour q différent de 0, A/q = B/q

RÉSOLUTIONS PROPREMENT DITES

Résolution de (E)

Les propriétés rassemblées dans le tableau ci-dessus vont nous permettre de résoudre l'équation :

5x + 10 = 35 (E)

Comme nous l'avons indiqué, les propriétés décrites au paragraphe précédent s'appliquent à tout type d'égalité, donc en particulier à (E) (tout se passe comme si l'équation 5x + 10 était A, et 35 était B).

Utilisons la propriété « 2 » du paragraphe précédent, avec q = 10 : retranchons 10 à chacun des membres de l'équation :

5x + 10 - 10 = 35 - 10

En effectuant la soustraction apparaissant dans le membre de gauche :

10 - 10 = 0

et celle du membre de droite :

35 - 10 = 25

on en déduit

5x = 25

On peut alors utiliser la propriété « 4 », et diviser par 5 les membres de part et d'autre du signe « = » :

5x/5 = 25/5

Du côté gauche, on a :

5x/5 = x

Histoire des équations

2 000 ans av. J.-C.

Pharaons, prêtres et ouvriers se servaient d'une suite de calculs sans justification, les premières équations, pour effectuer le partage des récoltes.

1 800-1 500 av. J.-C.

Les Babyloniens savaient résoudre des équations du 1ᵉʳ degré et des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues.

325-410

Diophante d'Alexandrie, appelé le père de l'algèbre, résout des équations en cherchant un nombre inconnu désigné par un symbole particulier.

IXᵉ siècle

Al-Khwarizmi, mathématicien arabe, reprend les travaux de Diophante et propose une méthode de résolution des équations.

1489

les symboles « + » et « – » font leur première apparition dans un traité d'arithmétique de J.W. d'Edger.

Descartes (1596-1650)

le premier à utiliser des **lettres** dans les équations

Première utilisation des **lettres dans les équations**

et du côté droit :
25/5 = 5
On en déduit donc :
x = 5
Le volume de chaque bille du sac est donc de 5 cm³.

Cas général

Les mathématiciens aiment bien étudier les objets mathématiques sous leur forme la plus générale possible. Cela leur permet de découvrir l'ensemble de leurs propriétés, propriétés qui n'ont plus qu'à être ensuite appliquées aux cas particuliers qu'ils rencontrent.
La forme générale des équations du premier degré est la suivante :
ax + b = 0
x est l'inconnue que l'on cherche à déterminer, et *a* et *b* sont deux paramètres. Notons que *a* doit être non nul, car si a = 0, ax est aussi nul (0 multiplié par n'importe quel nombre fait toujours 0), et x n'apparaît plus dans l'équation.
Précisons que *a* et *b* n'ont pas le statut d'inconnues : ce sont des données du problème, connues à l'avance. On cherche à déterminer x en fonction de ces paramètres.
Les équations du premier degré que nous avons vues jusqu'à présent se mettent-elles bien sous cette forme ?
(E) s'écrivait :
5x + 10 = 35
Appliquons la propriété « 2 », et retranchons 35 de chaque côté du signe « = ». On en déduit :
5x - 25 = 0
(E) peut donc prendre la forme (F) avec a = 5 et b = –25.
De façon plus directe, l'équation 2x + 3 = 0 est immédiatement de la forme (F), avec a = 2 et b = 3.
(F) peut être résolue de façon générale, toujours en utilisant les propriétés vues plus haut. Avec la propriété « 2 » (en soustrayant *b* de part et d'autre du signe « = »), on peut écrire :
ax = - b
On peut ensuite utiliser la propriété « 4 » et diviser par *a* de part et d'autre, car nous avons vu que *a* est non nul dans les équations du premier degré :
x = - b/a
La solution de l'équation du premier degré ax + b = 0 est donc x = –b/a.

Applications

Utilisons les formules ci-dessus pour résoudre quelques équations.
5x + 10 = 35 (E)
Nous avons vu ci-dessus que l'équation (E) pouvait se mettre sous la forme 5x - 25 = 0 et que, dans les notations ci-dessus, cela conduisait à : a = 5, b = -25 ; la seule solution est donc :
x = -(- 25)/5 = 5
On retrouve donc bien le résultat déjà trouvé par ailleurs.
2x + 3 = 0
Dans les notations ci-dessus, on a : a = 2, b = 3. La seule solution est :
x = -3/2 = -1,5
6 = 3x
Pour se ramener à la forme générale, il faut utiliser la propriété « 1 », pour réécrire l'équation sous la forme :
-3x + 6 = 0
On a donc a = -3 et b = 6, et la seule solution est :
x = -6/(-3) = 6/3 = 2

Équations à plusieurs inconnues

Une équation, deux inconnues

Les équations du premier degré que nous avons vues jusqu'à présent comportaient une seule inconnue : x. Mais une équation du premier degré peut comporter plusieurs inconnues. L'équation suivante, par exemple, a deux inconnues x et y :
x + y = 6 (G)
Dans ce paragraphe, nous allons donner un rapide aperçu de ce que peuvent être les équations à plusieurs inconnues, ainsi que des systèmes d'équations. Ainsi, nous n'allons pas présenter une théorie générale, mais nous contenterons d'exploiter quelques exemples. Tout d'abord, à quoi sert une équation à plusieurs inconnues ?
Considérons le problème suivant : prenons une bande de papier longue de 6 cm, coupons-là en deux, à un endroit quelconque (pas forcément au milieu). Quelles seront les tailles possibles des deux morceaux de papier restant ? Notons x la longueur du premier morceau, et y celle du second. La somme des longueurs des deux bandes doit être égale à celle de la bande initiale, ce qui, en termes mathématiques, conduit à l'équation (G) ci-dessus.

Résolution

Quelle(s) solution(s) à ce problème ?
Si on reprend les méthodes exposées plus haut, on voit qu'on peut réécrire (G) sous la forme :
x = 6 - y (G')
Ainsi, à chaque valeur de y est associée une valeur unique de x fournie par cette relation. Mais rien ne vient contraindre les valeurs que peut prendre y. L'équation (G) possède donc une infinité de solutions, sous la forme d'une infinité de couples (x,y).
Notons cependant que, si les couples solution sont en nombre infini, ils ne sont pas quelconques. Par exemple, x = 2 et y = 2 n'est pas une solution. On peut choisir y de façon quelconque, mais x va être donné par la relation (G'). En revenant à notre problème de bande de papier, cette infinité de solutions correspond au fait que l'on peut couper la bande à n'importe quel endroit, en une infinité d'emplacements, fournissant une infinité de paires de morceaux.

Systèmes d'équations

Supposons maintenant que, lors de notre découpage, nous imposions une contrainte supplémentaire : qu'un des morceaux soit deux fois plus grand que l'autre. Ceci peut s'écrire :
x = 2y (H)
Quelles sont les tailles possibles des morceaux résultants ? Nous sommes maintenant amenés à résoudre l'équation (H), mais l'équation (G) doit également être vérifiée. Nous devons donc résoudre (G) et (H) en même temps. Lorsque l'on résout ainsi plusieurs équations simultanément, on dit que l'on résout un système d'équations, généralement noté avec une accolade :

$$\begin{cases} x + y = 6 & (G) \\ x = 2y & (H) \end{cases}$$

Comment peut-on résoudre ce système d'équations ? On peut exprimer x en fonction de y à partir de la deuxième équation x = 2y, et le reporter dans la première :
2y + y = 6
Ce qui, en utilisant les propriétés énoncées plus haut, conduit à :

$$\begin{cases} 3y = 6 \\ y = 2 \end{cases}$$

Pour en déduire x, on peut alors reporter cette valeur de y dans la deuxième équation :

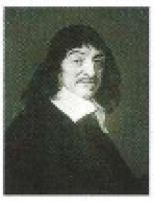
$$\begin{cases} x = 2 \times 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

La ***solution de notre système d'équations*** est donc :
x = 4, y = 2
En d'autres termes, la seule façon de couper la bande de papier de 6 cm en deux morceaux dont l'un est deux fois plus long que l'autre est de former un morceau de 4 cm et un morceau de 2 cm.
Pour conclure ce survol de la théorie des équations à plusieurs inconnues, on peut résumer le nombre de solutions (dans le cas général) que l'on a trouvé à un ensemble d'équations en fonction du nombre d'inconnues :
- une équation à une inconnue a une solution ;
- une équation à deux inconnues a une infinité de solutions ;
- un système de deux équations à deux inconnues a une solution.

Représentation graphique

Coordonnées cartésiennes

Nous allons ici donner un aperçu de ce que peut apporter la représentation graphique à la résolution d'équations, en nous contentant, là encore, de quelques exemples.



Au XVIIe siècle, un savant français, ***René Descartes***, met au point la géométrie analytique, qui permet de représenter des objets géométriques (droites, cercles, etc.) à l'aide d'équations. Pour cela, il invente ce que l'on appellera plus tard les coordonnées cartésiennes. Ce système permet de repérer la position des points composant nos objets géométriques grâce à des coordonnées, c'est-à-dire des chiffres, qui les positionnent par rapport à des axes de référence. Comment ce système d'axes fonctionne-t-il ?
Pour repérer la position d'un point sur une droite, il suffit de graduer cette droite, et de repérer à quelle graduation se situe le point. Cette graduation est sa coordonnée. Si on veut repérer un point sur un plan, il faut deux axes : un axe horizontal, et un axe vertical. Cela fonctionne exactement comme sur une carte. Un point est repéré par son abscisse (la coordonnée sur l'axe horizontal) et son ordonnée (sur l'axe vertical).

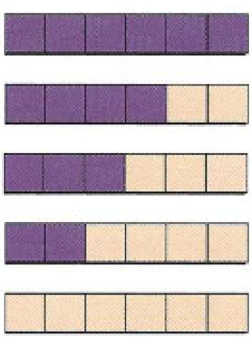
Représentation des solutions de (G)

Considérons maintenant l'équation (G) que nous avons vue plus haut :
x + y = 6 (G). Nous avons trouvé que cette équation possède une infinité de couples solution (x,y). Plaçons toutes ces solutions sur notre système d'axes, avec la convention suivante : x fournira l'abscisse, et y l'ordonnée de chaque point. Il est évidemment impossible de représenter une infinité de points.
Aussi allons-nous utiliser (mais sans le démontrer), avec toutes les conventions définies ci-dessus, le résultat suivant : « l'ensemble des solutions d'une équation du premier degré forme une droite » ou, autrement dit, « une équation du premier degré est l'équation d'une droite ».
Il devient alors beaucoup plus simple de représenter l'ensemble des solutions de (G). Il suffit d'en placer deux, quelconques, et de tracer la droite qui passe par ces deux points. Pour notre premier point P1, choisissons, de façon arbitraire, x = 0. Il vient alors de (G) : y = 6. Pour notre deuxième point P2, choisissons, toujours arbitrairement, y = 0. Il vient : x = 6. Ces deux points ont été reportés sur le graphique, ainsi que sur la droite D1 passant par ces deux points, qui représente donc l'ensemble des solutions de (G).

Solution d'un système d'équations

On peut de même étudier le système d'équations formé par les équations (G) et (H). Pour cela, sur le même graphique, on représente :
- D1, droite des solutions de (G) ;
- D2, droite des solutions de (H).
Comment trouve-t-on la solution du système d'équations ? C'est une solution de l'équation (G), donc elle se trouve sur D1 ; mais c'est également une solution de l'équation (H), donc elle se trouve aussi sur D2. La solution se trouve donc à l'intersection des droites D1 et D2. C'est le point P qui a pour coordonnées (4,2), c'est à dire, x = 4 et y = 2.

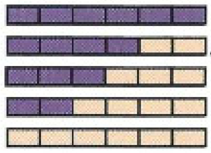
Exemples de couples solution de l'équation x + y = 6



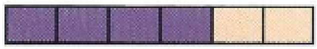
Représentations schématique et graphique des solutions du système d'équations (G) et (H)

$$\begin{cases} x + y = 6 & (G) \\ x = 2y & (H) \end{cases}$$

L'équation x + y = 6 a pour solution une infinité de couples (x,y) dont :



En revanche, un seul couple (x,y) est solution du système d'équations. Il s'agit de x = 4 et y = 2 :



Les coordonnées du point P, x = 4 et y = 2 représentent le couple solution du système :