Chapitre 4

Équations polynomiales

Définitions

1. Une *équation* est une égalité entre deux expressions mathématiques qui contiennent des variables, des lettres (représentant des valeurs fixes) et des nombres.
2. Une *variable* est une grandeur a priori inconnue. Par défaut, elle vit dans $\mathbb{R}$.
3. Une équation est *résolue* lorsqu'on a trouvé toutes les valeurs, qui mises à la place des variables correspondantes rendent la proposition (donnée par l'équation) vraie.
4. L'ensemble de ces valeurs est appelé l'*ensemble de solutions*, généralement noté S.
5. Une première équation *implique* une deuxième équation, lorsque les solutions de la première sont aussi solutions de la deuxième. Mais, il est possible qu'il y ait plus de solutions dans la deuxième que dans la première.
   Par exemple
   $$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4\,, \quad \text{mais} \quad x^2 = 4 \not\Rightarrow x = 2$$
6. Deux équations sont dites *équivalentes* si l'ensemble des solutions de chaque équation est le même.
   Par exemple
   $$|x| = 2 \iff x^2 = 4$$

Au début, on ne va travailler qu'avec des équations à une variable, notée x.

Quelques types d'équations

1. Les *équations du premier degré* sont de la forme
   $$ax + b = 0 \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0$$
2. Les *équations du deuxième degré* sont de la forme
   $$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{avec} \quad a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0$$
3. Les *équations de degré n* avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ sont de la forme
   $$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \text{avec} \quad a_k \in \mathbb{R} \text{ et } a_n \neq 0$$
4. Les *équations du deuxième degré camouflées* sont de la forme
   $$a \cdot y(x)^2 + b \cdot y(x) + c = 0 \quad \text{avec} \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ y(x) \text{ dépend de } x$$

4.1 Résolution des équations du premier degré

Dans ce cas, la méthode la plus utilisée pour résoudre une telle équation consiste à trouver une équation équivalente pour laquelle la variable est *isolée* d'un côté de l'égalité. Dans ce but, on effectue une succession d'OPÉRATIONS RÉVERSIBLES de chaque côté de l'égalité de l'équation.

Par exemple pour résoudre l'équation $5x + 6 = 2x + 4$, on peut procéder comme suit.

$$5x + 6 = 2x + 4 \overset{-6}{\iff} 5x = 2x - 2 \overset{-2x}{\iff} 3x = -2 \overset{:3}{\iff} x = -\frac{2}{3}$$

Par conséquent, l'ensemble de solutions de cette équation est $S = \{-\frac{2}{3}\}$.

Au-dessus de chaque équivalence, il peut être utile de noter l'opération que l'on fait pour passer de l'équation de gauche à celle de droite. Afin de pouvoir parler d'équivalence ($\Leftrightarrow$), il faut s'assurer que cette opération est réversible.

Il y a évidemment plusieurs façons de procéder. Ce qui compte, c'est d'avoir une équation équivalente où x est isolé !

4.2 La propriété du produit dans les nombres réels

Si a et b sont deux nombres réels, alors on a l'équivalence suivante.

$$a \cdot b = 0 \quad \iff \quad a = 0 \text{ ou } b = 0$$

L'implication '$\Longrightarrow$' traduit le fait que $\mathbb{R}$ est *anneau intègre*.

Application

Si on cherche à résoudre l'équation $(x + 1)(x - 2) = 0$ dans les nombres réels, on peut utiliser la propriété du produit qui dit que :

$$\begin{aligned} (x+1)(x-2) = 0 &\iff x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2 = 0 \\ &\iff x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 2 \end{aligned}$$

De manière plus générale, on a l'équivalence :

$$\boxed{(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad \iff \quad x = x_1 \text{ ou } x = x_2}$$

4.3 Résolution des équations du deuxième degré

Théorème

On a l'équivalence :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ admet 1 ou 2 solutions} \iff ax^2 + bx + c \text{ peut se factoriser}$$

La preuve de '$\Rightarrow$' est montrée dans les pages suivantes, et '$\Leftarrow$' se démontre de manière directe en utilisant la propriété du produit.

La contraposée (qui est aussi vraie) est :

$$ax^2 + bx + c \text{ ne se factorise pas} \iff ax^2 + bx + c = 0 \text{ n'admet pas de solution}$$

4.3.1 Deux méthodes de résolution et la formule de Viète

Pour résoudre l'équation du deuxième degré $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$, on commence par examiner les deux cas particuliers suivants.

1. Premier cas : $b = 0$.

   Dans ce cas, l'équation est $ax^2 + c = 0$ et peut être ramenée à l'équation équivalente suivante (en posant $d = -\frac{c}{a}$).

$$x^2 = d \quad \text{avec} \quad d \in \mathbb{R}$$

   Une telle équation admet exactement :

   - 0 solution si $d < 0$.

     En effet, comme x^2 est un nombre réel positif, il ne peut pas être égal à d qui est négatif.

   - 1 solution si $d = 0$.

     En effet, on a les équivalences suivantes :

$$x^2 = 0 \iff x \cdot x = 0 \overset{\substack{\text{propriété}\\\text{du produit}}}{\iff} x = 0$$

   - 2 solutions si $d > 0$. Les solutions seront $\sqrt{d}$ et $-\sqrt{d}$ (ces racines carrées existent et ne sont pas égales car $d \neq 0$). En effet, on a :

$$x^2 = d \overset{-d}{\iff} x^2 - d = 0 \underset{d>0}{\overset{\substack{\text{identité}\\\text{remarq.}}}{\iff}} (x - \sqrt{d})(x + \sqrt{d}) = 0 \overset{\substack{\text{propriété}\\\text{du produit}}}{\iff} \begin{cases} x = \sqrt{d} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{d} \end{cases}$$

   En résumé, on a l'équivalence :

$$\boxed{x^2 = d \iff x = \pm\sqrt{d}}$$

   Cette équivalence livre bien deux solutions si d est positif, une solution si d est nul et aucune solution si d est négatif (puisque la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas).

2. Deuxième cas : $c = 0$.

   Dans ce cas, l'équation est $ax^2 + bx = 0$. Pour trouver les valeurs de x, il suffit de mettre x en évidence et d'utiliser la propriété du produit.

$$ax^2 + bx = 0 \iff x(ax + b) = 0 \overset{\substack{\text{propriété}\\\text{du produit}}}{\iff} \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ ax + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

   Ainsi une telle équation admet toujours exactement 2 solutions dont 0.

   Remarque cruciale : il est très important de ne pas apprendre par cœur les solutions de cette équation. Il suffit de se souvenir de la méthode utilisée.

La formule de Viète

On peut maintenant examiner le cas général, c'est-à-dire lorsque l'équation du deuxième degré est du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a, b, c \neq 0$.

Les calculs qui suivent sont aussi valables si $b = 0$ ou $c = 0$. Mais les méthodes précédentes sont plus efficaces (gain de temps et diminution du risque de faire une erreur de calcul).

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

Dans la zone grise, on a utilisé une technique de calcul qui consiste à écrire un polynôme de degré 2 en x de façon à ce que x n'apparaisse qu'une seule fois. Cette technique sera aussi utile dans le chapitre des fonctions pour trouver le sommet d'une parabole et dans le chapitre de géométrie pour les équations des cercles et des sphères.

Ainsi, on a

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Comme on l'a vu dans le premier cas de la page précédente, le nombre de solutions d'une telle équation est donné par le signe de l'expression $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Or, comme $4a^2$ est toujours positif, le signe de l'expression $b^2 - 4ac$ détermine le nombre de solutions de l'équation.

Cette expression est ainsi appelée le *discriminant de l'équation* et est notée $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ainsi l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède exactement :

- 0 solution si son discriminant est négatif (c'est-à-dire si $\Delta < 0$).
- 1 solution si son discriminant est nul (c'est-à-dire si $\Delta = 0$).
- 2 solutions si son discriminant est positif (c'est-à-dire si $\Delta > 0$).

On utilise l'équivalence du premier cas de la page précédente pour conclure.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \overset{\sqrt{4a^2}=2|a|}{\iff} x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|} \underset{\substack{|a|=-a \\ \text{si } a<0}}{\overset{\substack{|a|=a \\ \text{si } a>0}}{\iff}} x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En résumé, on a démontré la *formule de Viète*.

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Cette équivalence livre bien deux solutions si le discriminant est positif, une solution si le discriminant est nul et aucune solution si le discriminant est négatif (puisque la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas).

Bonus : la factorisation de $ax^2 + bx + c$

Reprenons la factorisation obtenue après la technique de calcul de la zone grisée et continuons cette factorisation grâce à l'identité remarquable $d^2 - e^2 = (d - e)(d + e)$.

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \quad (\bigstar) \\
&\underset{\sqrt{4a^2}=2|a|}{\overset{\Delta \geqslant 0}{=}} a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}\right) \\
&\underset{\substack{|a|=-a \\ \text{si } a<0}}{\overset{\substack{|a|=a \\ \text{si } a>0}}{=}} a\Bigg(x - \underbrace{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}_{\substack{\text{première solution} \\ \text{de } ax^2+bx+c=0}}\Bigg)\Bigg(x - \underbrace{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}_{\substack{\text{deuxième solution} \\ \text{de } ax^2+bx+c=0}}\Bigg)
\end{aligned}$$

Remarque. Si $\Delta = 0$, en $(\bigstar)$ on a une simple identité remarquable.

Exemples

1. Résolvons l'équation $2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$.

   Comme le discriminant de cette équation est $\Delta = 4 - 4 = 0$, on sait qu'il se cache une identité remarquable (et qu'il n'y a qu'une solution).

   $$2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0 \iff 2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = 0 \iff 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$$

   Donc l'ensemble de solutions est $S = \{\frac{1}{2}\}$. Bien sûr, on aurait aussi pu utiliser la formule de Viète, mais c'est plus efficace avec l'identité remarquable.

2. Résolvons l'équation $x^2 + 2x + 2 = 0$.

   Comme le discriminant de cette équation est $\Delta = 4 - 8 < 0$, on sait qu'il n'y a pas de solution. Donc l'ensemble de solutions est vide : $S = \emptyset$.

3. Résolvons l'équation $2x^2 - x - 1 = 0$.

   Comme le discriminant de cette équation est $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$, on sait qu'il y a deux solutions et on utilise la formule de Viète pour trouver ces solutions :

   $$2x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = -\frac{1}{2} \text{ ou } 1$$

   Donc l'ensemble de solutions est $S = \{-\frac{1}{2}, 1\}$.

   Néanmoins, pour être sûr que la factorisation ci-dessus soit comprise, on factorise ce polynôme en utilisant la technique de calcul précédemment vue (zone grise).

   $$\begin{aligned}
   2x^2 - x - 1 &= 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = 2\left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}\right) \\
   &= 2\left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right) = 2\left(\left(x - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4}\right)\left(\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}\right)
   \end{aligned}$$

   Ainsi, on a $\quad 2x^2 - x - 1 = 2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$ ou 1.

4.3.2 Les équations du deuxième degré camouflées

Pour résoudre l'équation du deuxième degré en $y(x)$, $a \cdot y(x)^2 + b \cdot y(x) + c = 0$ (avec $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ et où $y(x)$ est une expression algébrique qui dépend de x), on utilise aussi la formule de Viète. On a :

$$a \cdot y(x)^2 + b \cdot y(x) + c = 0 \iff y(x) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ensuite, on termine la résolution en cherchant les valeurs de x qui sont solutions.

Exemples

1. Résolvons l'équation $2x^4 - x^2 - 1 = 0$. Il faut reconnaître une équation du deuxième degré en x^2 ! Une telle équation est aussi appelée *bicarrée*. On a :

   $$2x^4 - x^2 - 1 = 0 \iff 2(x^2)^2 - (x^2) - 1 = 0$$

   Ainsi, on a $y(x) = x^2$. Par Viète, on trouve que : $y(x) = -\frac{1}{2}$ ou 1

   Donc $x^2 = -\frac{1}{2}$ ou $x^2 = 1$. La première équation n'admettant pas de solution, il reste à résoudre $x^2 = 1$. Donc les solutions de l'équation bicarrée sont ± 1.

   Par conséquent, l'ensemble de solutions est $S = \{\pm 1\}$

2. Résolvons l'équation $2^{2x} - 2^{x+1} = 3$. Il faut reconnaître une équation du deuxième degré en 2^x ! On a :

   $$2^{2x} - 2^{x+1} = 3 \iff 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 3 = 0 \iff (2^x)^2 - 2(2^x) - 3 = 0$$

   Ainsi, on a $y(x) = 2^x$. Par Viète, on trouve que : $y(x) = -1$ ou 3

   Donc $2^x = -1$ ou $2^x = 3$. La première équation n'admettant pas de solution, il reste à résoudre $2^x = 3$. Il y a donc une seule solution qui est $x = \log_2(3) \cong 1.5850$.

   Par conséquent, l'ensemble de solutions est $S = \{\log_2(3)\}$.

4.4 Résolution des équations de degré supérieur à 2

Pour $n = 3$ ou $n = 4$, il existe des formules générales, appelées formule de Cardan pour le degré 3 et formule de Ferrari pour le degré 4, comme pour celle de Viète pour le deuxième degré, mais elles sont plus compliquées et plus difficiles à utiliser.

Le jeune Évariste Galois [1], mort en 1832, a permis de montrer, en 1843, qu'il n'y a aucune formule générale pour résoudre les équations de degré plus grand ou égal à 5.

On utilisera une méthode plus simple, consistant à trouver, par tâtonnement, une solution b. Puis à diminuer le degré de cette équation en divisant par $(x - b)$ (grâce au schéma de Horner par exemple). Ce qui permettra de diminuer le degré de l'équation... On peut effectuer cette méthode jusqu'à ce que l'on obtienne une équation de degré 2. Cette méthode est décrite en détail dans le chapitre suivant.

1. Sur la page web `http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Galois.html` (en anglais), le lecteur trouvera plus de précisions quant au contexte de sa mort et de son travail de mathématicien.

4.5 Systèmes d'équations polynomiales

Définition

Un *système d'équations* est composé de plusieurs équations. Dans ce cas, il peut aussi y avoir plusieurs variables, généralement appelées x, y, z ou encore x_1, x_2, x_3, etc.

Pour résoudre un système d'équations, on peut travailler équation par équation comme précédemment. Mais, on peut en plus, mélanger les équations. Voici deux techniques, parmi d'autres, qui sont souvent utilisées, voire mixées.

1. *Résolution par substitution.*

   On isole une variable dans une équation. Puis, chaque fois que cette variable apparaît dans les autres équations on la remplace par ce qu'on a trouvé.

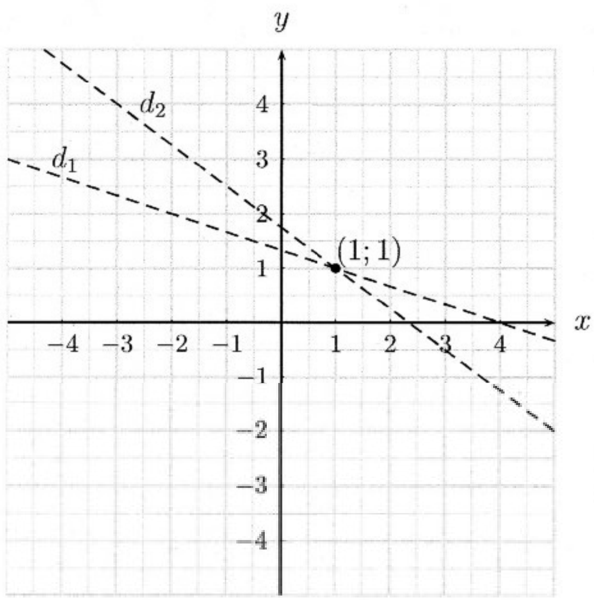
   Exemple :

$$\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 8 - 6y \\ 3x + 4y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 - 3y \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$$

$$\underset{\text{dans la 2e équation}}{\overset{\text{substitution de } x}{\iff}} \begin{cases} x = 4 - 3y \\ 3(4-3y) + 4y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 - 3y \\ -5y + 12 = 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 4 - 3y \\ y = 1 \end{cases} \underset{\text{dans la 1ère équation}}{\overset{\text{substitution de } y}{\iff}} \begin{cases} x = 4 - 3 \cdot 1 = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

   L'ensemble de solutions n'est plus un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, car on a trouvé que la seule solution de ce système d'équations est $x = 1$ et simultanément $y = 1$. Pour décrire l'ensemble de solutions, il faut se placer dans le plan $\mathbb{R}^2$. Ainsi, l'ensemble de solutions S est représenté par le point $(1;1)$ de la manière suivante.



   Donc l'ensemble de solutions $S = \{(1;1)\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.

   Pour les lecteurs avancés : en traitillés, on voit les droites $d_1 : 2x + 6y = 8$ et $d_2 : 3x + 4y = 7$. L'ensemble des solutions est ainsi l'ensemble des points d'intersection de ces deux droites. Il n'y a qu'un point d'intersection qui est $I(1;1)$.

2. *Résolution par combinaison.*

On se débarrasse d'une variable dans une équation en additionnant à cette équation un multiple d'une autre équation (il s'agit d'une soustraction si le multiple est un nombre négatif). On obtient ainsi un système équivalent (puisqu'on conserve l'autre équation) au système de départ, mais qui est plus simple à résoudre, car une des équations est une équation à une inconnue, qu'on peut résoudre et ainsi utiliser par combinaison pour résoudre l'équation restante.

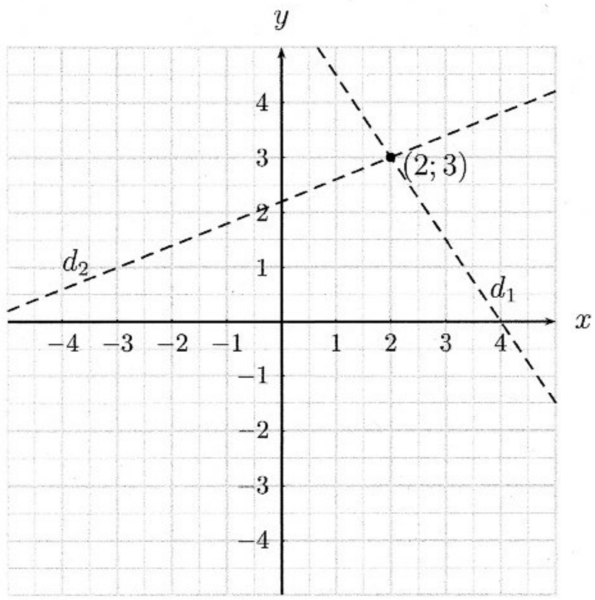
Exemple :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 2x - 5y = -11 \end{cases} \underset{\cdot 3}{\overset{\cdot 2}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} 6x + 4y = 24 \\ 6x - 15y = -33 \end{cases}$$

$$\underset{\text{on soustrait la première}}{\overset{\text{à la deuxième équation,}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} 6x + 4y = 24 \\ \quad - 19y = -57 \end{cases} \underset{\div(-19)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 6x + 4y = 24 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\underset{\text{quatre fois la deuxième}}{\overset{\text{à la première équation, on soustrait}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} 6x = 12 \\ y = 3 \end{cases} \overset{\div 6}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

On a donc l'ensemble de solutions $S = \{(2;3)\}$, qui est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ représenté graphiquement ci-dessous.



Pour les lecteurs avancés : en traitillés, on voit les droites $d_1 : 3x + 2y = 12$ et $d_2 : 2x - 5y = -11$. L'ensemble des solutions est ainsi l'ensemble des points d'intersection de ces deux droites. Il n'y a qu'un point d'intersection qui est $I(2;3)$.

Remarques

Les équations et les systèmes d'équations sur lesquels on peut tomber lorsqu'on cherche à résoudre des problèmes sont en général plus difficiles à résoudre que les exemples que l'on vient de voir. Il est fréquent que le mathématicien utilise des méthodes numériques pour trouver une bonne approximation de la solution.

Tous les jours, un peu partout dans le monde, des milliers d'ordinateurs résolvent des systèmes d'équations qui comportent des milliers d'équations et de milliers de variables.